

### **1.1.8. Компьютерное моделирование двумерной задачи реакции-адвекции-диффузии в движущейся среде**

#### **1. Название работы**

Компьютерное моделирование двумерной задачи реакции-адвекции-диффузии в движущейся среде

#### **2. Физические предпосылки**

Имеется большое разнообразие математических моделей, описывающих процессы различной природы, включающие эффекты диффузии, размножения (поглощения), переноса (адвекции). Нас в данной работе интересует эволюция популяции, состоящей из подвижных объектов, стремящихся занять наиболее выгодную позицию в пространстве с учетом

(1) наличия ресурсов, используемых для поддержания жизни,

(2) величины плотности населения, превышение критического уровня которой приводит к ухудшению условий жизни,

(3) перемещения носителя популяции в целом (например, ветер или течение в реке, в океане)

(4) размножения, скорость которого определяется ресурсами внешней среды, плотностью населения и некоторыми другими факторами. Предполагается, что в пространстве имеется область с благоприятными условиями для поддержания популяции, что приводит, вообще говоря, к появлению расширяющейся области с большой плотностью населения (называемой пятном).

Однако, имеется также внешнее воздействие на популяцию, сводящееся к направленному перемещению всех объектов одновременно с заданной скоростью. Наша цель состоит в том, чтобы сформулировать и обосновать условия, при которых пятно популяции будет сохраняться в области с благоприятными условиями, несмотря на направленное перемещение в область с худшими условиями. Математическая модель включает уравнение реакции-диффузии.

Уравнение реакции-адвекции-диффузии (РАД) описывает процессы, протекающие в различных физических, химических, биологических объектах. Начально-краевая задача для уравнения реакции-адвекции-диффузии на отрезке имеет вид

$$\begin{cases} \rho u_t = V u_x + (k(x)u_x)_x - f(u, x, t), \\ u(a, t) = u^{(a)}(t), t \geq t_0, u(b, t) = u^{(b)}(t), t \geq t_0, \\ u(x, t_0) = u^{(0)}(x), a < x < b. \end{cases}$$

(RAD)

Если уравнение РАД применяется для описания процесса диффузии некоторого вещества в движущейся среде, то  $\rho(x)$  есть удельная емкость,  $V(x)$  скорость переноса,  $k(x)$  коэффициент диффузии,  $f(u, x, t)$  плотность источников. Незвестная функция  $u(x, t)$  (которую будем дальше называть концентрацией данного вещества) зависит от координат и времени и определяется тремя процессами. Реакция означает изменение (возрастание или убывание) концентрации за счет внешних источников данного вещества. Интенсивность источни-

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

**Быков А.А. Методы компьютерной математики**

**1. Курсовые работы** 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии ~~ков~~ ~~зависит~~ от концентрации, от координат, от времени, и, возможно, от концентрации других компонент, участвующих в реакции. Например, процесс распространения пожара в лесу описывается в простейшем приближении уравнением реакции-диффузии-адвекции, в котором  $u$  есть температура,  $k$  коэффициент радиационной диффузии,  $V$  скорость ветра. Для исследование задачи (RAD) мы используем асимптотический метод разложения решения в ряд по малому параметру, которым обычно является отношение толщины ВПС к диаметру области. Имеются многочисленные работы, в которых задача (RAD) исследуется численно и аналитически.

При достаточно общих предположениях модель динамики популяции приводит к решениям типа контрастной структуры (КС).

Понятие контрастной структуры является одним из основных в математической теории нелинейных эволюционных уравнений, которые описывают такие процессы, как химические реакции в неоднородных средах, процессы динамики популяций в биологии и экологии, процессы горения и взрыва, генерацию магнитных полей в турбулентных средах и многие другие. Контрастные структуры появляются также как решения некоторых нелинейных волновых уравнений. Термин "Контрастная структура" (КС) применяют в тех случаях, когда **(1)** решение задачи плавно зависит от координаты (или от координат в многомерном случае) в нескольких областях, называемых пятнами КС, расположенных внутри

(2) решение быстро изменяется на узких промежутках, разделяющих пятна КС (такие промежутки называются внутренними переходными слоями, ВПС).

Контрастные структуры могут быть статическими (в том случае, когда существует решение задачи типа КС, которое не зависит от времени) и динамическими (когда любое решение типа КС зависит от времени). Для статических КС основные математические проблемы сводятся к существованию, единственности и устойчивости решения, а также к построению функциональных рядов, в некотором смысле аппроксимирующих решение (так называемых асимптотических рядов). Положение динамических ВПС меняется со временем. Этот процесс называют дрейфом ВПС. Для динамических КС математические проблемы—существование, единственность, устойчивость, вычисление скорости дрейфа. Для динамических КС также важно построению асимптотических рядов, аппроксимирующих решение.

Рассматриваются одномерные и многомерные задачи, имеющие решения типа КС. Теория многомерных КС в настоящее время только создается.

Математические модели, приводящие к решениям типа КС, могут включать уравнение адвекции-реакции-диффузии, систему уравнений адвекции-реакции-диффузии, а также алгебраические уравнения, интегральные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения в различных комбинациях.

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

**Быков А.А. Методы компьютерной математики**

**1. Курсовые работы** 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии

В настоящее время происходит значимое расширение набора моделей, имеющих решения типа КС. Рассматриваются не только уравнения классических типов (параболические, гиперболические, эллиптические), но и значительно более сложные типы уравнений, например, так называемые псевдопараболические. Большое значение будет иметь в ближайшей перспективе исследование сильно нелинейных уравнений (таких, в которых старшие производные сходят в уравнение в виде некоторых нелинейных функций от них).

### **3. Цель работы**

Исследование эффектов динамики популяций, связанных с действием внешних факторов, в первую очередь – с наличием направленного дрейфа поддерживающей популяцию экологической структуры. Исследование возможности стационарной конфигурации в движущейся среде с учетом неоднородной плотности ресурсов.

### **4. Научная новизна**

Двумерное моделирование задач динамики популяций в движущейся среде является новой темой.

### **5. Компьютерное моделирование**

Выполнение дипломной работы предполагает компьютерное моделирование в значительном объеме с помощью языка программирования высокого уровня (например, C++), а также одного из математических инструментов, таких как MatLab, MathCad,

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

**Быков А.А. Методы компьютерной математики**

**1. Курсовые работы** 1.1. Задачи реакции-адвекции-диффузии

Mathematica, Maple. Возможно также ограничиться только использованием математического инструмента.

## **6. Аналитическое моделирование**

Возможно дальнейшее развитие данной работы в направлении аналитического исследования решения системы дифференциальных уравнений в частных производных методом асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Метод асимптотического разложения включает построение формальной асимптотики, построение так называемых нижнего и верхнего решений, обоснование формальной асимптотики с помощью так называемого метода дифференциальных неравенств.

## **7. Используемый математический аппарат**

Основной метод, который мы используем для исследования двумерной задачи динамики популяций в движущейся среде, это компьютерное моделирование. Компьютерная модель основана на численном методе решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для выполнения курсовой работы достаточно знать основные приемы работы с математическим инструментом. Можно использовать MatLab, Mathematica, MathCad, Maple.

## **8. Возможности дальнейшего развития работы**

Дипломная работа.