
1.3.2. Приложения теории катастроф к эволюционным задачам динамики популяций

1. Название работы

Приложения теории катастроф к эволюционным задачам динамики популяций

2. Физические предпосылки

Теория катастроф – раздел математики, который изучает нелинейные уравнения различных типов (алгебраические, дифференциальные, интегральные), зависящие от параметра. Предполагается, что имеются области изменения параметра (или параметров, если их несколько), в которых решение является гладкой функцией от параметров. Эти области разделены линиями (поверхностями), при пересечении которых решение меняется скачком. Таким образом, сколь угодно малое изменение параметров задачи приводит к конечному изменению решения. Набор параметров можно представить как точку в некотором многомерном пространстве (пространстве параметров), а решение задачи – как точку в некотором другом пространстве (конечномерном или бесконечномерном, функциональном). Решение задачи при заданном наборе параметров будем далее называть состоянием системы, а сам набор параметров будем называть вектором управления (или просто управлением). В рамках теории катастроф пространство состояний системы можно рассматривать как поверхность, вложенную в некоторое пространство большей размерности. Иначе

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы

1.3. Приложения теории катастроф

~~говоря, вектор управления не определяет состояние~~ системы однозначным образом. Состояние системы определяется как вектором управления, так и предисторией системы, т.е. траекторией, по которой вектор управления пришел к некоторому заданному значению. Чаще всего изучается модель, в рамках которой точка в пространстве параметров перемещается по некоторой траектории, пересекающей критические поверхности. Каждый раз при пересечении такой поверхности решение меняется скачком. Предположим, что при движении вектора управления по некоторой кривой $ABCD$ в пространстве управления скачкообразное изменения состояния системы произошло в точке C . Как правило, при движении точки в пространстве параметров по той же траектории в обратную сторону, т.е. по траектории $DCBA$, скачкообразное изменение состояния системы происходит в другой позиции управления, например в точке B . Таким образом, при циклическом движении точки в пространстве управления по траектории $ABCD \rightarrow DCBA \rightarrow ABCD \dots$ движение точки в пространстве состояний будет происходить по некоторой более сложной кривой с точками скачкообразных изменений. То же самое будет происходить при движении по замкнутой гладкой кривой в пространстве управления. Теория катастроф изучает также экстремальные задачи с параметрами. Например, состояние ферромагнитного материала при заданном внешнем магнитном поле определяется условием наименьшей полной энергии (т.е. суммы

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы

1.3. Приложения теории катастроф

~~энергии каждого магнитного диполя во внешнем поле и суммы всех взаимных энергий~~). Хорошо известно, что состояние ферромагнитного материала зависит не только от внешнего поля в данный момент времени, но и от предистории (от траектории, по которой внешнее поле, которое в данном примере играет роль управления, пришло к текущему значению).

Математические модели динамики популяций в настоящее время относятся к наиболее интересным и важным разделам теоретической и прикладной математики. Популяция биологических объектов описывается плотностью, подвижностью, коэффициентом размножения, взаимодействием с популяциями других биологических видов и с окружающей средой. Простейшая модель включает так называемое уравнение реакции-адвекции-диффузии с нелинейным источником, начальные и граничные условия.

В данной работе предполагается рассмотреть применение теории катастроф к задачам динамики популяций. Пусть на достаточно большой территории имеется заданное распределение благоприятных и неблагоприятных для поддержания данной популяции условий, которое медленно изменяется со временем. В каждый данный момент времени наибольшая плотность популяции будет сосредоточена в регионах с наиболее благоприятными условиями. Со временем благоприятный регион может стать неблагоприятным, а благоприятные условия могут возникнуть в другом регионе, удаленном от прежнего и даже отделенном

областью с неблагоприятными условиями. В этом случае произойдет скачкообразная миграция популяции в более благоприятную область, причем время миграции много меньше характерного временного масштаба изменения внешних условий. При обратном изменении параметров также произойдет скачкообразное изменение состояния системы, причем вектор состояния, в котором произойдет скачок при обратном движении параметров, будет отличаться от вектора состояния, в котором произошел скачок при прямом направлении движения параметров. Этот процесс называется гистерезис. Этот эффект имеет большое значение при описании пространственно-временной эволюции популяции некоторых биологических объектов.

3. Цель работы

Создать и исследовать компьютерную модель, адекватно описывающую скачкообразное изменение состояния системы популяционной динамики при плавном изменении параметров. Детально исследовать процесс катастрофы, найти время протекания катастрофического изменения, сформулировать предположения о возможности предсказания катастрофы по результатам измерения некоторых характеристик.

4. Научная новизна

До настоящего времени методы теории катастроф не применялись для описания системы, описывающей динамику популяции.

5. Компьютерное моделирование

Выполнение дипломной работы предполагает компьютерное моделирование в значительном объеме с помощью языка программирования высокого уровня (например, C++), а также одного из математических инструментов, таких как MatLab, MathCad, Mathematica, Maple. Возможно также ограничиться только использованием математического инструмента.

6. Аналитическое моделирование

Возможно дальнейшее развитие данной работы в направлении аналитического исследования решения системы дифференциальных уравнений в частных производных методом асимптотического разложения решения в ряд по степеням малого параметра. Метод асимптотического разложения включает построение формальной асимптотики, построение так называемых нижнего и верхнего решений, обоснование формальной асимптотики с помощью так называемого метода дифференциальных неравенств.

7. Используемый математический аппарат

Основной метод, который мы используем для исследования задачи динамики популяций, это компьютерное моделирование. Компьютерная модель основана на численном методе решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для выполнения курсовой работы достаточно знать основные приемы работы с математическим инструментом. Можно использовать MatLab, Mathematica, MathCad, Maple.

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы

1.3. Приложения теории катастроф

8. Возможности дальнейшего развития работы

Дипломная работа.