
1.3.3. Приложения теории катастроф к задачам устойчивости

1. Название работы

Приложения теории катастроф к задачам устойчивости

2. Физические предпосылки

Теория катастроф – раздел математики, который изучает нелинейные уравнения различных типов (алгебраические, дифференциальные, интегральные), зависящие от параметра. Предполагается, что имеются области изменения параметра (или параметров, если их несколько), в которых решение является гладкой функцией от параметров. Эти области разделены линиями (поверхностями), при пересечении которых решение меняется скачком. Таким образом, сколь угодно малое изменение параметров задачи приводит к конечному изменению решения. Набор параметров можно представить как точку в некотором многомерном пространстве (пространстве параметров), а решение задачи – как точку в некотором другом пространстве (конечномерном или бесконечномерном, функциональном). Решение задачи при заданном наборе параметров будем далее называть состоянием системы, а сам набор параметров будем называть вектором управления (или просто управлением). В рамках теории катастроф пространство состояний системы можно рассматривать как поверхность, вложенную в некоторое пространство большей размерности. Иначе говоря, вектор управления не определяет состояние

системы однозначным образом. Состояние системы определяется как вектором управления, так и предисторией системы, т.е. траекторией, по которой вектор управления пришел к некоторому заданному значению. Чаще всего изучается модель, в рамках которой точка в пространстве параметров перемещается по некоторой траектории, пересекающей критические поверхности. Каждый раз при пересечении такой поверхности решение меняется скачком. Предположим, что при движении вектора управления по некоторой кривой $ABCD$ в пространстве управления скачкообразное изменения состояния системы произошло в точке C . Как правило, при движении точки в пространстве параметров по той же траектории в обратную сторону, т.е. по траектории $DCBA$, скачкообразное изменение состояния системы происходит в другой позиции управления, например в точке B . Таким образом, при циклическом движении точки в пространстве управления по траектории $ABCD \rightarrow DCBA \rightarrow ABCD \dots$ движение точки в пространстве состояний будет происходить по некоторой более сложной кривой с точками скачкообразных изменений. То же самое будет происходить при движении по замкнутой гладкой кривой в пространстве управления. Теория катастроф изучает также экстремальные задачи с параметрами. Например, состояние ферромагнитного материала при заданном внешнем магнитном поле определяется условием наименьшей полной энергии (т.е. суммы энергии каждого магнитного диполя во внешнем поле

и суммы всех взаимных энергий). Хорошо известно, что состояние ферромагнитного материала зависит не только от внешнего поля в данный момент времени, но и от предистории (от траектории, по которой внешнее поле, которое в данном примере играет роль управления, пришло к текущему значению).

В данной работе предполагается рассмотреть применение теории катастроф к задачам устойчивости статических и динамических объектов. Простой пример статического объекта – мост, по которому медленно передвигается тяжелый объект. В нормальной ситуации упругие и гравитационные силы, возникающие при деформации упругих элементов, обеспечивают восстановление формы после снятия нагрузки. В перегруженном состоянии происходит скачкообразное изменение конфигурации изучаемого объекта. При обратном изменении параметров также произойдет скачкообразное изменение состояния системы, причем вектор состояния, в котором произойдет скачок при обратном движении параметров, будет отличаться от вектора состояния, в котором произошел скачок при прямом направлении движения параметров. Этот процесс называется гистерезис. Этот эффект имеет большое значение при описании пространственно-временной эволюции статических объектов.

3. Цель работы

Создать и исследовать компьютерную модель, адекватно описывающую скачкообразное изменение состояния статической системы при плавном изменении пара-

метров. Детально исследовать процесс катастрофы,
найти время протекания катастрофического изменения, сформулировать предположения о возможности предсказания катастрофы по результатам измерения некоторых характеристик.

4. Научная новизна

Методы теории катастроф позволяют по-новому, более полно и адекватно, исследовать классические задачи устойчивости разнообразных объектов, широко применяемых на практике.

5. Компьютерное моделирование

Данная работа может развиваться в двух направлениях, одно из которых предполагает в основном компьютерное моделирование, а другое – в основном аналитическое моделирование.

Выполнение дипломной работы предполагает компьютерное моделирование в значительном объеме с помощью языка программирования высокого уровня (например, C++), а также одного из математических инструментов, таких как MatLab, MathCad, Mathematica, Maple. Возможно также ограничиться только использованием математического инструмента.

6. Аналитическое моделирование

Аналитическое моделирование основано на применении методов теории катастроф. В рамках курсовой работы для анализа устойчивости мы применяем элементарные методы теории катастроф, которые являются развитием стандартных методов математического ана-

МГУ им М.В.Ломоносова Физический факультет, каф. математики

Быков А.А. Методы компьютерной математики

1. Курсовые работы 1.3. Приложения теории катастроф
лиза, применяемых для анализа векторных неявных функций и векторных задач условного экстремума, в том числе метод Лагранжа. В рамках дипломной работы применяется теория Морса.

7. Используемый математический аппарат

Основной метод, который мы используем для исследования задач устойчивости, это компьютерное моделирование. Компьютерная модель основана на численном методе решения краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для выполнения курсовой работы достаточно знать основные приемы работы с математическим инструментом. Можно использовать MatLab, Mathematica, MathCad, Maple. Аналитическое моделирование основано на использовании методов теории катастроф.

8. Возможности дальнейшего развития работы

Дипломная работа.