Задача Бертрана и априорность закона всемирного тяготения

М. Д. Малых

Материалы к факультативному курсу лекций,
читаемому на кафедре математики физического факультета МГУ.

Москва, 2003-2006 гг.

Содержание

1. Задача Бертрана

Хотя физика — наука экспериментальная, она вскрывает законы природы, которые формулируются как незыблемые истины без каких либо оговорок о способе их вывода из опыта. К несчастью, их натурфилософская интерпретация толкает к скептической трактовки: де, на самом деле никаких законов природы нет, а есть лишь гипотезы, подкрепленные с некоторой точностью конечным числом экспериментов, то есть неполной индукцией и проч. Все это, разумеется, разговоры и на деле этими принципами никто не руководствуется — все ведь знают, что никаких отклонений от классической механики при рассмотрении классических объектов найти не возможно.

Кант в «Критике чистого разума» (1785 г.) и с еще большей отчетливостью в «Пролегоменах ...» подошел к этой проблеме с другой стороны. Допустим, что все-таки существуют всегда справедливые законы природы. Тогда явления никогда не даны нам сами по себе, но наш разум упорядочивает эмпирический материал по средством некоторых форм (данных до всякого опыта, то есть априорных). Невозможно отделить эмпирический материал от этих форм и бессмысленно говорить о настоящих вещах или чистом опыте, но зато вполне можно выделить и осознать формы, в которые вкладывается опыт. Кант называет эмпирическое — остатком, вероятно, указывая на такую аналогию: если обычный опыт сопоставить с бесконечным рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то формы суть частичные суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$, остаток ряда — опыт, очищенный от форм. Подобно тому, как за конечное число действий можно вычислить частичную суммы, можно осознать формы, и подобно тому как нельзя вычислить остаток, нельзя отделить опыт от форм. Отделив от опыта априорные формы можно сделать некоторые выводы, которые будут верны всегда (до опыта, a priori), поскольку имеют отношения к способу упорядочения эмпирических данных, но не к самим данным. Иными словами, чистое естествознание имеет дело с законами, которые следуют из способа упорядочения эмпирических данных.

При всей изящности идеи Канта, ее трудно принять, поскольку Кант не указал способа выяснить, априорны ли законы механики. Априорность трех законов Ньютона сомнений не вызывает, поскольку многие их почитают за определение силы. Но уже с законом всемирного тяготения возникают большие проблемы. При своем анализе Кант все же остался на докритических позициях, пытаясь придумать механизмы передачи взаимодействия и тем самым объяснить сам закон. Эти конструкции, доведенные до совершенство Лесажем, едва ли что-то объясняют: закон Ньютона сводится к утверждению о существовании загадочных частиц с не менее загадочными свойствами. Одно почему заменяется на другое и все едет обычным чередом.

Лишь спустя сто лет выяснилось, что затруднение это было не философское, но чисто математическое. Ньютон показал, что его закон всемирного притяжения и его механика приводят к эмпирическим законом Кеплера, но оставил открытым вопрос о том, существуют ли другие взаимодействия, ведущие к законам Кеплера, обозначив его его в «Математических Началах». Ситуация изменилась лишь в конце 1870-х годов, когда Бертран (Bertrand J.) и его коллеги обратились к следующей задаче:

Первая задача Бертрана. Найти закон сил, зависящих только от положения движущейся точки, и заставляющей ее описывать конические сечения, каковы бы ни были начальные условия.

Эта задача была успешно решена Дарбу и Альфеном[1] при дополнительном предположении, что сила центральная, а затем удалось отбросить и это условие[2]. Оказалось, что таких взаимодействия два — закон всемирного тяготения и закон Гука. Тем самым вопрос, остававшийся со времен Ньютона был исчерпывающе решен: для вывода закона всемирного тяготения достаточно было узнать из опыта, что траектории планет — конические сечения и что этот закон — не закон Гука.

Однако предположение о центральности силы можно было бы сделать и из общих соображений симметрии задачи. Если прибавить его, то нельзяли еще ослабить данные, взятые из опыта? Для решения этого вопроса Бертран предложил следующую задачу:

Вторая задача Бертрана. Зная, что сила, вызывающая движение планеты вокруг Солнца, зависит только от расстояния и такова, что она заставляет свою точку приложения описывать замкнутую кривую, каковы

[1]Это решение удалось упростить Аппелю, см. Аппель П. Механика, п. 232

[2]Despeyrous Cours de mécanique. T. 2. Paris: A. Herman, 1886.

бы ни были начальные условия, если только скорость некоторого предела, найти закон этой силы.

а Кенигс как будто бы еще более общую:

Задача Кенигса (Koenigs G.). Зная, что сила, вызывающая движение планеты вокруг Солнца, зависит только от расстояния и такова, что она заставляет свою точку приложения описывать алгебраическую кривую, каковы бы ни были начальные условия, найти закон этой силы.

Как это не удивительно, но в обоих случаях, мы приходим к одному и тому же ответу: закон силы может быть или законом Гука или законом всемирного тяготения.

2. Решение второй задачи Бертрана

Решение этой задачи было дано Бертраном, однако ссылки на его публикацию в CR противоречивы. Поэтому мы приведем решение, следуя заметке Дарбу в механике Депейру[3].

Поскольку сила центральная и зависит только от r, условие замкнутости траектории может быть записано так

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{c d\frac{1}{r}}{\sqrt{-\frac{c^2}{r^2} + 2\int F(r)dr + h}} = \mu\pi$$

где μ — рациональное число, c — постоянная момента импульса, а h — полной энергии. При этом движение происходит между двумя радиусами r_1 и r_2, являющихся нулями знаменателя.

Положим

$$\frac{1}{r} = z, \quad 2\int F(r)dr = \varphi(z)$$

и вместо старых констант введем более удобные

$$A = \frac{1}{c^2}, \quad B = \frac{h}{c^2}.$$

[3]Despeyrous T. Cours de mécanique. T. 2. Paris: A. Herman, 1886. P. 461-466

Тогда уравнение траектории примент вид

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dz}{\sqrt{-z^2 + A\varphi(z) + B}} = \mu\pi, \tag{1}$$

где α и β — корни уравнения

$$-z^2 + A\varphi(z) + B = 0$$

Исключая из системы

$$A\varphi(\alpha) + B = \alpha^2, \quad A\varphi(\beta) + B = \beta^2$$

коэффициенты A и B, получим

$$A = -\frac{1}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} \begin{vmatrix} \alpha^2 & 1 \\ \beta^2 & 1 \end{vmatrix}$$

и

$$B = \frac{1}{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)} \begin{vmatrix} \varphi(\alpha) & \alpha^2 \\ \varphi(\beta) & \beta^2 \end{vmatrix}$$

Поэтому условие (1) можно записать так

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dz\sqrt{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}}{\sqrt{\Delta(z)}} = \mu\pi, \tag{2}$$

где

$$\Delta(z) = \begin{vmatrix} z^2 & \varphi(z) & 1 \\ \alpha^2 & \varphi(\alpha) & 1 \\ \beta^2 & \varphi(\beta) & 1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Положим теперь

$$\alpha = a - h, \quad \beta = a + h, \quad z = a + ht$$

и разложим φ в ряд по степеням h

$$\varphi(\alpha) = \varphi - h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' - \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots$$
$$\varphi(\beta) = \varphi + h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots$$
$$\varphi(z) = \varphi + ht\varphi' + \frac{h^2t^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3t^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4t^4}{24}\varphi^{iv} + \dots$$

где $\varphi, \varphi', \dots$ — произодные $\varphi(z)$, взятые в точке a, то есть $\varphi(a),\ \varphi'(a), \dots$.

Прежде чем подставить эти ряды в (2), нужно вычислить

$$\varphi(\beta) - \varphi(a) = 2h\left[\varphi' + \frac{h^2}{6}\varphi''' + \dots\right]$$

и определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 + 2aht + h^2t^2 & \varphi + ht\varphi' + \frac{h^2t^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3t^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4t^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ a^2 - 2ah + h^2 & \varphi - h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' - \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ a^2 + 2ah + h^2 & \varphi + h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Это можно сделать так. Вычтем из первого столбцу третий, умноженный на a^2, а из второго — третий, умноженный на φ:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2aht + h^2t^2 & ht\varphi' + \frac{h^2t^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3t^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4t^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ -2ah + h^2 & -h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' - \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ +2ah + h^2 & +h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \end{vmatrix}$$

Прибавим теперь ко второй строке третью и разделим ее на два:

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2aht + h^2t^2 & ht\varphi' + \frac{h^2t^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3t^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4t^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ h^2 & \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ 2ah + h^2 & +h\varphi' + \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \end{vmatrix}$$

а затем вычтем из третьей стоки вторую:

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 2aht + h^2t^2 & ht\varphi' + \frac{h^2t^2}{2}\varphi'' + \frac{h^3t^3}{6}\varphi''' + \frac{h^4t^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ h^2 & \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \dots & 1 \\ 2ah & h\varphi' + \frac{h^3}{6}\varphi''' + \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Вычтем теперь из первой строки вторую, умноженную на t^2, и третью, умноженную на t:

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & \frac{h^3}{6}(t^3-t)\varphi''' + \frac{h^4}{24}(t^4-t^2)\varphi^{iv} + \ldots & 1-t^2 \\ h^2 & \frac{h^2}{2}\varphi'' + \frac{h^4}{24}\varphi^{iv} + \ldots & 1 \\ 2ah & h\varphi' + \frac{h^3}{6}\varphi''' + \ldots & 0 \end{vmatrix}$$

Этот определитель можно вычислить непосредственно, разлогая по первой строке:

$$\Delta/2 = -\,[\frac{h^3}{6}(t^2-1)t\varphi''' + \frac{h^4}{24}t^2(t^2-1)\varphi^{iv} + \ldots](-2ah) +$$
$$+ (1-t^2)[h^3\varphi' + \frac{h^5}{6}\varphi''' - \frac{2ah^3}{2}\varphi'' - \frac{2ah^5}{24}\varphi^{iv} + \ldots]$$

то есть

$$\Delta = 2(1-t^2)h^3[\varphi' - a\varphi'' - \frac{h}{3}at\varphi''' + \frac{h^2}{12}(2\varphi''' - a\varphi^{iv}(1+t^2)) + \ldots]$$

Подтсавляя это выражение в (2) пролучим

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{\varphi' + \frac{h^2}{6}\varphi''' + \ldots dt}}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{\varphi' - a\varphi'' - \frac{h}{3}at\varphi''' + \frac{h^2}{12}(2\varphi''' - a\varphi^{iv}(1+t^2)) + \ldots}} = \mu\pi \qquad (4)$$

Переходя к перделу $h = 0$, имеем

$$\sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi' - a\varphi''}} \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \mu\pi$$

или

$$\sqrt{\frac{\varphi'}{\varphi' - a\varphi''}} = \mu$$

Поскольку левая часть зависит от a непрерывно, а правая принимает только рациональные значения, левая часть вообще не зависит от a, то есть

$$\frac{d}{da}\frac{a\varphi''}{\varphi'} = 0 \qquad (5)$$

Это дифференциальное уравнение не трудно проинтегрировать: вводя констнту C_1 имеем

$$a\varphi'' = C_1\varphi',$$

пологая $\varphi' = \psi$, можем напиать

$$\frac{\psi'}{\psi} = \frac{C_1}{a}$$

интегрируюя по a, имеем

$$\ln(\psi) = C_1 \ln(a) + {}_2$$

или, переобозначая C_2 обычым способом,

$$\varphi' = C_2 a^{C_1}$$

Интегрируя это соотношение по a, получим

$$\varphi = C_2 a^{C_1+1}/(C_1+1) + C_3$$

Поэтому все решения уравнения (5) даются формулой:

$$\varphi(a) = Ca^m + C'$$

где m, C, C' — произвольные константы. Поскольку при введении потенциала произвольная константа несущественна, можно утверждать, что потенциал, удовлетворяющей условию задачи, имеет вид

$$\varphi(z) = Cz^m;$$

при этом

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2-m}}$$

— рациональное число.

Очевидно, что потенциал удовлетворяет условиям задачи не зависимо от значения C, однако, на m эти условия налагают ограничения, которые можно найти, рассмотрев следующий порядок малости по h. Подставляя

$$\varphi(z) = Cz^m$$

в (2) и полагая для краткости

$$k = \frac{h}{a},$$

получим

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 + \frac{k^2(m-1)(m-2)}{6} + \ldots}\, dt}{\sqrt{2-m}\sqrt{1-t^2}\sqrt{1 - \frac{k(1-m)t}{3} + \frac{k^2}{12}[2-(m-3)(1+t^2)] + \ldots}} = \mu\pi$$

Разлогая корни по формуле бинома Ньютона, найдем

$$\sqrt{1 + \frac{k^2(m-1)(m-2)}{6} + \ldots} = 1 + \frac{k^2(m-1)(m-2)}{12} + \ldots$$

и

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{k(1-m)t}{3} + \frac{k^2}{12}[2-(m-3)(1+t^2)] + \ldots\right)^{-1/2} = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{k(1-m)t}{3} + \frac{k^2}{12}[2-(m-3)(1+t^2)]\right) + \frac{1}{2}\frac{3}{4}\left(\frac{k(1-m)t}{3}\right)^2 + \ldots \\
&= 1 + \frac{k(1-m)}{6}t + \frac{k^2(m-1)}{24}[2-(m-3)(1+t^2)] + \frac{k^2(m-1)^2}{24}t^2 \\
&= 1 + \frac{k(1-m)}{6}t + \frac{k^2(m-1)}{24}[2-(m-3)(1+t^2)+(m-1)t^2] \\
&= 1 + \frac{k(1-m)}{6}t + \frac{k^2(m-1)}{24}(5-m+2t^2)
\end{aligned}$$

Перемножая эти ряды, получим

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{k(1-m)}{6}t + \frac{k^2(m-1)}{24}(5-m+2t^2) + \frac{k^2(m-1)(m-2)}{12} + \cdots = \\
&1 + \frac{k(1-m)}{6}t + \frac{k^2(m-1)}{24}(m+1+2t^2) + \ldots
\end{aligned}$$

Значит

$$\mu\pi = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{2-m}\sqrt{1-t^2}}\left(1 + \frac{k(1-m)}{6}t + \frac{k^2(m-1)}{24}(m+1+2t^2) + \ldots\right)$$

Вспоминая, что

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = 0, \quad \int\limits_{-1}^{1} \frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$\mu\pi = \frac{\pi}{\sqrt{2-m}} \left(1 + \frac{k^2(m-1)(m+2)}{24} + \dots\right)$$

Правая часть опять непрерывно зависит от k, а левая — кратна π, что возможно только если правая часть от k не зависит, то есть если

$$(m-1)(m+2) = 0$$

Стало быть, движение по замкнутой траектории возможно лишь тогда, когда потенциал

$$\varphi(z) = Cz, \quad \text{или} \quad \varphi(z) = \frac{C}{z^2}$$

то есть

$$\int F(r)dr = \frac{C}{r}, \quad \text{или} \quad \int F(r)dr = Cr^2$$

и значит, *сила может быть или пропорциональна расстоянию (закон Гука), или обратно пропорциональна квадрату расстояния (закон всемирного тяготения)*. Это и есть ответ к задаче.

3. Решение задачи Кенигса

Решение задачи было дано самим Кенигсом[4].

Пусть $F(r)$ — искомый закон сил, а

$$U(r) = \int F(r)dr$$

— соответствующая потенциальная энергия. Закон сохранения энергии и момента импульса дают

$$(\frac{dr}{dt})^2 = 2U(r) + h - \frac{c^2}{r^2}, \tag{6}$$

[4]Koenigs G. // Bull. de la Socié té de France, t. 17, p. 153-155.

где h — постоянная полной энергии, c — постоянная момента импульса.

Пусть в некотором кольце G между $r = a$ и $r = b > a$ сила $F(r)$ является притяжением, другими словами $U'(r)$ отрицательна между $r = a$ и $r = b$. Пусть материальная точка M_0 находилась в начальный момент времени в точке, лежащей в G. Обозначим ее начальное положение полярными координатами r_0 и ϑ_0. Начальную скорость этой точки, то есть значения r_0' и ϑ_0', мы выберем так, чтобы траектория точки M_0 вся лежала внутри круга $r < r_1$, где r_1 — заданное число, удовлетворяющее неравенству

$$b > r_1 > r_0 > a.$$

Этого можно добиться, ограничив их значения сверху, следующим образом. В силу теоремы Ролля

$$U(r_0) - U(r_1) = U'(r_*)(r_0 - r_1) > 0,$$

поскольку U' меньше нуля на всем промежутке $r_0..r_1$. Это позволяет взять величину ϑ_0' такой, чтобы выполнялось неравенство

$$2[U(r_0) - U(r_1)] - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} r_0^2 {\vartheta_0'}^2 > 0 \tag{7}$$

Это, в свою очередь, позволяет выбрать r_0' таким, чтобы выполнялось неравенство

$${r_0'}^2 < 2[U(r_0) - U(r_1)] - \frac{r_1^2 - r_0^2}{r_1^2} r_0^2 {\vartheta_0'}^2 \tag{8}$$

Поскольку

$$c = r_0^2 \vartheta_0', \quad h = r_0'^2 - 2U(r_0) + r_0^2 \vartheta'^2,$$

правая часть (6) равна

$$r_0'^2 + 2(U(r) - U(r_0)) + \frac{r^2 - r_0^2}{r^2} r_0^2 {\vartheta_0'}^2$$

Это выражение при $r = r_0$ равно

$$r_0'^2 > 0,$$

что и следовало ожидать, а при $r = r_1$

$$r_0'^2 + 2(U(r_1) - U(r_0)) + \frac{r_1^2 - r_0^2}{r^2} r_0^2 \vartheta_0'^{\,2} < 0$$

и поэтому этол значение не доступно для движения, поскольку r' не может быть мнимой. Значит, движение действительно происходит в круге $r < r_1$.

Заметим теперь, что кривая, целиком лежащая в круге, или замкнута, или имеет предельную точку. По условию задачи траектория является алгебраической кривой и, следовательно, не имеет предельных точек, то есть является замкнутой. Таким образом, любая точка, лежащая в начальный момент в G, описывает замкнутую траекторию, если ее скорость достаточно мала. Но это свойство в точности то, о котором речь шла во второй задаче Бертрана (при ее рассмотрении r все время лежало между двумя границами, и, значит, ее условия, не меняя решение, можно ослабить требованием замкнутости траектории в некотором круге). Вспоминая вывод Бертрана, можем утверждать, что и в данном случае закон сил — это или закон всемирного тяготения, или закон Гука.

Чтобы свести случай, когда имеет место отталкивание, а не притяжение при всех r, к уже рассмотренному, достаточно сделать в уравнениях Ньютона замену $t' = \sqrt{-1}t$, тогда последние примут вид

$$\frac{d^2x}{dt'^2} = -F_x, \ldots$$

т.е. будут описывать притяжение точки к центру. По условию кривая $x = x(t),\ y = y(t)$ — алгебраическая при вещественных t, то есть существует полином $P(x, y)$ такой, что $P(x(t), y(t)) = 0$. Но, если сила является аналитической функцией, в силу принципа аналитического продолжения уравнение $P(x(t), y(t)) = 0$ справедливо при всех комплексных t. Поэтому траектория же при такой замене все равно останется алгебраической.

Вернемся теперь к вопросу об априорности закона всемирного тяготения. Исторически для его вывода были нужны эмпирические данные, а именно законы Кеплера, но на самом деле нужно было опытным путем выяснить, что траектории планет замкнуты или что планеты описывают алгебраические кривые. Но ведь именно это и невозможно узнать опытным путем: находясь на Земле невозможно непрерывно наблюдать движение планет и на опыте может быть найдено конечное число точек траектории, но не как не более. На самом деле, конечно, и это получается при помощи некоторый других форм, о которых говорят в философии. Эти точки в пределах точности удалось описать при помощи единого уравнения — кривой второго порядка. При этом говорят, что узнали это из опыта, а на самом деле экспериментаторы сами сочли нужным так упорядочить имеющийся в их распоряжении материал, что траектории оказались и замкнутостями, и алгебраическими. Значит, закон всемирного тяготения не есть закон эмпирический, а есть неизбежное следствие принятого способа упорядочения эмпирических данных. Тем самым априорность или, как сказал бы Кант, аподиктическая достоверность этого закона вполне объясняется. Такое объяснение Кант называет трансцендентальным. Разумеется, зависимость силы от масс не нашла своего трансцендентального объяснения.

Здесь, однако, возникает вопрос: каким способом от конечного числа точек переходят к уравнению траектории и возможно ли было упорядочить эмпирический материал иначе? К несчастью, у нас имеется только разработанная теория (метод наименьших квадратов), которая позволяет подобрать из заданного семейства кривых, зависящего от конечного сила параметров, кривую, описывающую опытные данные с заданной точностью или показать, что таковой нет. Способ же нахождения семейства до сих пор остается искусством. Однако одно правило указать все же можно: для описания однозначных функций предпочитают брать рациональные функции как можно меньшего порядка, а для многозначных — алгебраические уравнения. Поэтому если траекторию в пределах точности можно представить кривой второго порядка, то это будет обязательно сделано, а, стало быть, неизбежно получится или закон всемирного тяготения или закон Гука.

Обратимся теперь к математической стороне вопроса: при решении задачи Бертрана мы показали, что дифференциальные уравнения заданного вида (уравнения траектории) имеют решение в классе алгебраических функций лишь в двух случаях. Хорошо известно, что дифференциальные уравнения редко *разрешимы* в «конечном виде» (аналитические решения). Обычно это трактуют как досадную неприятность, теперь же мы видим, что именно это обстоятельство позволяет давать трансцендентальные объяснения законам физики.