COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

PUBLIÉS,

CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

En date du 13 Juillet 1835,

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

TOME QUATRE-VINGT-QUATRIÈME.

JANVIER — JUILLET 1877.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1877

COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 9 AVRIL 1877.

PRÉSIDENCE DE M. PELIGOT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction.* Note de M. J. **Bertrand**.

« Si Kepler n'avait déduit de l'observation qu'une seule de ses lois : *Les planètes décrivent des ellipses dont le Soleil occupe le foyer,* on aurait pu, de ce seul résultat érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne est dirigée vers le Soleil et inversement proportionnelle au carré de la distance.

» Soient, en effet, X et Y les composantes de la force qui sollicite la planète dont le mouvement, par hypothèse, s'accomplit dans un plan, les équations différentielles du mouvement sont

$$(1) \qquad \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y', \quad \frac{dx'}{dt} = X, \quad \frac{dy'}{dt} = Y,$$

et il faut déterminer X et Y en fonction de x et de y, de telle sorte que la trajectoire ait une équation de la forme

$$(2) \qquad r = ax + by + c;$$

qui représente, comme on sait, toutes les coniques ayant pour foyer l'origine et dans laquelle a, b, c sont arbitraires, puisque l'équation de la trajectoire, déduite de l'intégration de (1), doit renfermer évidemment trois constantes distinctes.

» En différentiant l'équation (2), on en déduit

$$\frac{xx'+yy'}{r} = ax'+by', \tag{3}$$

et, en différentiant une seconde fois, en ayant égard au système (1),

$$\frac{\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y+x'^2+y'^2}{r} - \frac{xx'+yy'}{r^3} = a\mathrm{X}+b\mathrm{Y}, \tag{4}$$

que l'on peut écrire

$$r^2(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y)+(xy'-yx')^2 = r^3(a\mathrm{X}+b\mathrm{Y}). \tag{5}$$

Les équations (3) et (5) donnent

$$a = \frac{x}{r} + \frac{y'}{r^3}\frac{(xy'-yx')^2}{\mathrm{X}y'-\mathrm{Y}x'}, \tag{6}$$

$$b = \frac{y}{r} - \frac{x'}{r^3}\frac{(xy'-yx')^2}{\mathrm{X}y'-\mathrm{Y}x'}, \tag{7}$$

et, en différentiant (6),

$$\left\{\begin{aligned}
0 = {} & \frac{y}{r^3}(x'y-xy') \\
& + (xy'-yx')^2\left\{\frac{\mathrm{Y}}{r^3(\mathrm{X}y'-\mathrm{Y}x')} - \frac{3y(xx'+yy')}{r^5(\mathrm{X}y'-\mathrm{Y}x')}\right. \\
& \qquad \left. + \frac{y'\left[y'\left(x'\frac{d\mathrm{X}}{dx}+y'\frac{d\mathrm{X}}{dy}\right)-x'\left(x'\frac{d\mathrm{Y}}{dx}+y'\frac{d\mathrm{Y}}{dy}\right)\right]}{r^3(\mathrm{X}y'-\mathrm{Y}x')^2}\right\} \\
& + \frac{2(xy'-yx')(x\mathrm{Y}-y\mathrm{X})y'}{r^3(\mathrm{X}y'-\mathrm{Y}x')}.
\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Cette équation, ne contenant pas de constante et se trouvant la conséquence du système (1), est nécessairement une identité; or une telle identité est impossible, quelles que soient les fonctions X et Y indépendantes de x' et de y', à moins que le binôme $\mathrm{X}y'-\mathrm{Y}x'$ ne soit un diviseur de $xy'-yx'$. On le démontre en supprimant le facteur $xy'-yx'$ et en supposant en-suite $x' = x$, $y' = y$. L'équation (8) se réduirait à $\frac{-y}{r^3} + \frac{2y}{r^3} = 0$ si cette hypothèse n'annulait pas le dénominateur $Xy' - Yx'$. Nous pouvons donc poser

$$X = Ux,$$
$$Y = Uy,$$

et l'équation (8) devient, en supprimant les facteurs communs,

$$(9) \qquad x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy} = -\frac{3U}{r^2}(xx' + yy').$$

U ne contenant ni x' ni y', l'équation (9) exige que $\frac{dU}{dx}$ et $\frac{dU}{dy}$ soient proportionnels à x et y, et que, par conséquent,

$$U = \varphi(x^2 + y^2) = \psi(r);$$

elle devient alors

$$(10) \qquad \frac{dU}{dr} = -\frac{3U}{r},$$

d'où l'on déduit

$$U = \frac{\mu}{r^3},$$

et, par conséquent,

$$X = \frac{\mu x}{r^3},$$

$$Y = \frac{\mu y}{r^3},$$

qui sont les composantes d'une force dirigée vers l'origine et inversement proportionnelle au carré de la distance.

» Il serait intéressant de résoudre la question suivante :

» *En sachant que les planètes décrivent des sections coniques, et sans rien supposer de plus, trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite, exprimées en fonction des coordonnées de son point d'application.*

» Nous connaissons deux solutions : La force peut être dirigée vers un centre fixe et agir proportionnellement à la distance ou en raison inverse de son carré. En existe-t-il d'autres ?

» La méthode précédente pourrait conduire à la solution de ce problème, mais les calculs sont tellement compliqués qu'aucun géomètre, je crois, ne tentera de les exécuter avant d'avoir trouvé le moyen de les simplifier.

» On aurait pu, par exemple, substituer au calcul qui précède le raisonnement suivant, qu'il est malheureusement impossible d'étendre au cas général :

» L'équation

$$r = ax + by + C$$

étant, quelles que soient les constantes a, b, c, une solution du problème correspondant à des données initiales convenables, supposons $b = 0$, $c = 0$. L'équation représente alors une ligne droite passant par l'origine et de direction arbitraire. Puisque ces droites sont au nombre des trajectoires possibles, les forces, évidemment, agissent suivant leur direction et doivent passer par l'origine des coordonnées. La solution du problème rentre dès lors dans la théorie classique. »

THERMOCHIMIE. — *Quelques-unes des données fondamentales de la Thermochimie.* Note de M. **Berthelot**.

« 1. La suite de mes expériences m'a conduit à faire de nouvelles déterminations de quelques-unes des données fondamentales de la Thermochimie, qui se sont présentées dans le cours de mes recherches : je veux parler de la chaleur de formation de l'acide sulfureux et des composés que le brome et l'iode forment, tant avec l'hydrogène qu'avec l'oxygène.

» 2. *Acide sulfureux.* — La chaleur de combustion du soufre intervient dans la formation thermique des acides oxygénés du soufre et de leurs sels. Quoique mesurée à plusieurs reprises, elle n'est pas bien connue. En effet, les nombres des divers observateurs, rapportés à 16 grammes de soufre, sont fort discordants : Dulong ayant trouvé + 41,6; Hess 41,1; Andrews + 36,9; Favre et Silbermann + 35,6, pour le soufre octaédrique. Les derniers auteurs attribuent ces divergences à la formation de l'acide sulfurique anhydre, opinion qui m'avait semblé d'abord douteuse, à cause de la grande quantité d'acide anhydre dont elle supposerait la formation; en effet, la chaleur dégagée par la métamorphose de l'acide sulfureux en acide sulfurique anhydre

$$SO^2 + O = SO^3, \text{ soit } + 17,2$$

n'est pas même la moitié de la chaleur de formation de l'acide sulfureux. Depuis il m'est venu quelques scrupules, en réfléchissant que la présence de la moindre trace d'humidité dans le gaz doit déterminer la formation de

COMPTES RENDUS

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 16 AVRIL 1877.

PRÉSIDENCE DE M. PELIGOT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

MÉCANIQUE. — *Note sur un problème de Mécanique;* par M. J. **Bertrand**.

« Dans la séance du 9 avril dernier, j'ai proposé le problème suivant :

» *En sachant que les planètes décrivent des sections coniques et sans rien supposer de plus, trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite, en fonction des coordonnées de son point d'application.*

» Avant de résoudre ce problème, digne je crois de l'attention des géomètres, il me semblait indispensable de simplifier, par une étude préalable, les calculs trop prolixes auxquels conduirait une méthode directe.

» J'ai présenté cette simplification dans une leçon faite depuis au Collége de France; on me permettra de la reproduire ici.

» Si l'on suppose, en un point, la vitesse dirigée dans le sens de la force, le rayon de courbure de la trajectoire, en ce point, sera infini; or une conique dont, en un point, le rayon de courbure est infini est nécessairement une ligne droite, et des droites, en nombre infini puisqu'il en passe une par chaque point, sont au nombre des trajectoires possibles. Ces droites ne peuvent d'ailleurs se couper qu'en un point où la direction de la force soit indéterminée, et l'on en conclut qu'elles doivent être parallèles ou passer par un même point; la première hypothèse étant incompatible avec une orbite fermée, il faut admettre que les forces sont dirigées vers un centre fixe.

» Cette condition, introduite dans l'énoncé, fait disparaître la difficulté et la complication des calculs: l'expression de la force qui, dirigée vers un centre fixe, fait décrire une section conique est immédiatement donnée par les formules classiques, mais elle contient évidemment, outre la constante des aires, cinq constantes arbitraires, et il reste à chercher si l'on peut, par le choix de celle-ci, et à l'aide de deux relations convenables entre les cinq autres, donner à l'expression de la force une forme commune pour toutes les coniques dont l'équation générale ne contiendra plus que trois constantes.

» Le problème ainsi transformé a été immédiatement résolu par M. Darboux, qui assistait à la leçon dans laquelle je l'ai proposé; du calcul très-simple qu'il m'a envoyé le jour même il résulte que le problème admet un nombre infini de solutions dont les deux solutions connues, dans lesquelles la force dépend de la distance seulement, sont des cas particuliers.

» Notre confrère M. Yvon Villarceau, dans ses belles recherches sur les étoiles doubles, avait été conduit à rechercher l'expression de la force centrale qui, dirigée vers un point donné du plan, peut faire décrire une ellipse, et l'expression qu'il a obtenue, et insérée dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1852, coïncide précisément avec une des solutions du problème que j'ai proposé. »

ASTRONOMIE PHYSIQUE. — *Sur une tache solaire apparue le 15 avril 1877.* Note de M. **J. Janssen.**

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie deux photographies solaires obtenues à l'observatoire de Meudon, et qui présentent un intérêt particulier.

» Ces photographies montrent qu'une tache solaire très-importante s'est formée sur le Soleil du 14 au 15 avril.

» En effet, dans la photographie du 14 (vers 8 heures du matin, temps moyen de Paris), la surface solaire est absolument exempte de taches. Or, sur cette photographie, le diamètre du disque est de 30 centimètres, et les

Position moyenne de l'étoile de comparaison pour 1877,0.

	Grandeur.	Ascension droite.	Distance polaire.
2246 Lalande. .	8^e-9^e	$1^h 9^m 46^s,20$	$34°43'49'',7$

» La comète est brillante, ronde, avec un petit noyau; elle ressemble à une nébuleuse résoluble. »

MÉCANIQUE. — *Recherche de la loi que doit suivre une force centrale pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique;* par M. **G. Darboux.**

« Dans une Communication insérée à ce *Compte rendu*, M. Bertrand a démontré que, si un point matériel soumis à l'action d'une force dépendant uniquement de la position décrit toujours une conique, quelles que soient les conditions initiales, la direction de la force va passer par un point fixe. Proposons-nous donc la question suivante :

» *Sachant qu'un point matériel soumis à l'action d'une force centrale décrit toujours une conique, trouver l'expression de la force.*

» On connaît déjà deux solutions de ce problème : le cas où la force est proportionnelle à la distance et celui où elle est en raison inverse du carré de la distance. Mais, dans ce qui va suivre, nous ne supposerons pas qu'il y ait une fonction des forces, c'est-à-dire nous admettrons que la force, agissant sur un point, peut dépendre, en même temps que de la distance du point au centre fixe, de l'angle que fait la direction de la force avec une droite fixe du plan.

» Rapportons le mouvement à des coordonnées polaires, et prenons pour pôle le centre attirant ou origine de la force. Soient r et ω les coordonnées du mobile, C la constante des aires, F la grandeur de la force. L'expression de F sera, comme on sait,

$$F = \frac{C^2}{r^2}\left[\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\omega^2}\right]. \tag{1}$$

» La trajectoire étant une conique, nous aurons, en écartant le cas, du reste très-facile à traiter, où la conique passe au pôle, une équation de la forme

$$\frac{1}{r} = a\cos\omega + a\sin\omega + \sqrt{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H}, \tag{2}$$

a, b, A, B, H étant les cinq paramètres qui définissent la conique.

» On déduit de l'équation (2), par un calcul des plus simples,

$$\frac{1}{r}+\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\omega^2}=\frac{H^2-A^2-B^2}{(A\cos 2\omega+B\sin 2\omega+H)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui donne

$$(3)\qquad F=\frac{C^2(H^2-A^2-B^2)}{r^2(A\cos 2\omega+B\sin 2\omega+H)^{\frac{3}{2}}}.$$

» Cette expression, relativement simple de F, permet d'apercevoir deux solutions du problème.

» 1° Posons

$$(4)\qquad A=\theta^2\alpha,\quad B=\theta^2\beta,\quad H=\theta^2 h,\quad C^2(H^2-A^2-B^2)=\mu\theta^3.$$

Nous aurons, pour l'expression de la force,

$$(5)\qquad F=\frac{\mu}{r^2(\alpha\cos 2\omega+\beta\sin 2\omega+h)^{\frac{3}{2}}},$$

et pour équation de la trajectoire

$$(6)\qquad \frac{1}{r}=a\cos\omega+b\sin\omega+\theta\sqrt{\alpha\cos 2\omega+\beta\sin 2\omega+h}.$$

Cette formule, contenant trois constantes arbitraires a, b, θ, ne figurant pas dans l'expresion de la force, est donc l'*équation la plus générale de la trajectoire* quand la force est représentée par l'équation (5).

» Les coniques représentées par l'équation (6) ont une propriété géométrique remarquable et qui suffit à définir le système qu'elles forment. Lorsque a, b, θ varient, elles demeurent tangentes à deux droites fixes réelles ou imaginaires passant par l'origine des coordonnées.

» Si l'on veut que la force ne dépende pas de ω, il faudra supposer $\alpha=\beta=0$, ce qui conduira à la loi de Newton.

» 2° En tenant compte de l'équation de la trajectoire, l'expression de la force peut aussi s'écrire

$$(7)\qquad F=\frac{C^2(H^2-A^2-B^2)}{r^2\left(\frac{1}{r}-a\cos\omega-b\sin\omega\right)^3}.$$

Il suit de cette nouvelle expression de la force une deuxième solution du problème proposé. On voit en effet qu'en adoptant la trajectoire définie par l'équation

$$(8)\qquad \frac{1}{r} = a\cos\omega + b\sin\omega + \sqrt{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H},$$

et en la supposant parcourue de telle manière que la constante des aires ait la valeur déterminée par la formule

$$(9)\qquad C^2(H^2 - A^2 - B^2) = \mu,$$

on aura, pour expression de la force,

$$(10)\qquad F = \frac{\mu}{r^2\left(\frac{1}{r} - a\cos\omega - b\sin\omega\right)^3}.$$

L'équation (8), contenant trois constantes A, B, H ne figurant pas dans l'expression de la force, représente la trajectoire la plus générale qu'un point matériel puisse décrire sous l'action de cette force, et, cette trajectoire étant encore une conique, on obtient une deuxième loi de la force satisfaisant à toutes les conditions posées.

» Les ellipses représentées par l'équation (8), lorsque A, B, H varient, sont caractérisées par cette propriété que la polaire de l'origine des coordonnées parrapport à l'une quelconque d'entre elles est une droite fixe dont l'équation est

$$\frac{1}{r} = a\cos\omega + b\sin\omega.$$

» Si a et b sont nuls, la loi de la force devient

$$F = \mu r,$$

les ellipses représentées par l'équation (8) ont l'origine pour centre, et l'on retombe sur un résultat connu.

» Les deux lois précédentes sont les seules pour lesquelles la trajectoire soit toujours une conique. Mais le défaut d'espace m'oblige à remettre à une autre occasion la démonstration de ce point essentiel. »

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur les lois de réciprocité dans la théorie des résidus de puissances.* Note du P. **Pépin**, présentée par M. Puiseux.

« En continuant mes recherches sur les lois de réciprocité auxquelles donne lieu la considération des restes obtenus en divisant par un nombre premier les puissances semblables des nombres entiers, je suis parvenu à des théorèmes généraux qui renferment comme cas particuliers les théo-

MÉCANIQUE. — *Recherche de la loi que doit suivre une force centrale pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique;* par M. G. **Darboux.**

« Dans une précédente Communication (p. 760), nous avons obtenu deux lois différentes satisfaisant à toutes les conditions posées. Il nous reste à établir que ces lois sont les seules pour lesquelles la trajectoire soit toujours une conique.

» Soit

$$\frac{1}{r} = a\cos\omega + b\sin\omega + \sqrt{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H} \tag{1}$$

l'équation de l'une des trajectoires; a, b, A, B, H sont cinq fonctions inconnues des trois constantes arbitraires que nous appellerons α, β, γ. L'expression de la force agissant sur le mobile est, comme on l'a vu,

$$F = \frac{C^2(H^2 - A^2 - B^2)}{r^2(A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

C désignant la constante des aires, ou plus simplement

$$F = \frac{1}{r^2}\left(\frac{K}{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H}\right)^{\frac{3}{2}}, \tag{3}$$

K désignant comme C une fonction inconnue des trois constantes arbitraires.

» Cela posé, faisons varier les constantes arbitraires α, β, γ de telle manière que la conique trajectoire passe toujours par un point déterminé (r, ω). On aura, en différentiant l'équation (1) dans cette hypothèse,

$$\cos\omega\,\delta a + \sin\omega\,\delta b + \frac{\cos 2\omega\,\delta A + \sin 2\omega\,\delta B + \delta H}{2\sqrt{A\cos 2\omega + B\sin 2\omega + H}} = 0. \tag{4}$$

D'ailleurs, la force devant rester constante pour le même point, on aura dans les mêmes conditions $\delta F = 0$, c'est-à-dire

$$(A\,\delta K - K\,\delta A)\cos 2\omega + (B\,\delta K - K\,\delta B)\sin 2\omega + H\,\delta K - K\,\delta H = 0, \tag{5}$$

et cette relation différentielle doit être vérifiée pour chaque valeur de ω, α, β, γ toutes les fois que l'équation (4) le sera

» Or cette condition ne peut être remplie que de deux manières différentes :

» 1° L'équation (5) peut avoir lieu, quel que soit ω, c'est-à-dire que l'on a

$$A\,\delta K - K\,\delta A = 0,\quad B\,\delta K - K\,\delta B = 0,\quad H\,\delta K - K\,\delta H = 0,$$

ou

$$\delta\left(\frac{A}{K}\right) = 0,\quad \delta\left(\frac{B}{K}\right) = 0,\quad \delta\left(\frac{H}{K}\right) = 0.$$

» En d'autres termes, $\frac{A}{K}$, $\frac{B}{K}$, $\frac{C}{K}$ sont des constantes, ce qui nous conduit à la première loi trouvée, exprimée par la formule

$$(6)\qquad F = \frac{\mu}{r^2(m\sin 2\omega + n\cos 2\omega + p)^{\frac{3}{2}}}.$$

» 2° L'équation (5) n'est pas identiquement vérifiée, et alors elle doit être une conséquence de la formule (4), et cela, quel que soit ω. Pour qu'il en soit ainsi, il faut évidemment que les termes en $\sin\omega$, $\cos\omega$, qui ne figurent pas dans l'équation (5), disparaissent de la relation (4). On doit donc avoir

$$\delta a = 0,\quad \delta b = 0,$$

et par conséquent a, b doivent être des constantes, ne dépendant pas des arbitraires α, β, γ. L'expression de la force devenant alors

$$F = \frac{C^2(H^2 - A^2 - B^2)}{r^2\left(\frac{1}{r} - a\cos\omega - b\sin\omega\right)^3},$$

il faut que $C^2(H^2 - A^2 - B^2)$ ne dépende pas de α, β, γ, et l'on obtient ainsi la formule

$$(7)\qquad F = \frac{\mu}{r^2\left(\frac{1}{r} - a\cos\omega - b\sin\omega\right)^3},$$

qui constitue la seconde loi indiquée dans notre première Communication.

» En résumé, nous n'obtenons comme solutions du problème posé que les deux lois représentées par les formules (6) et (7). Il nous reste à ajouter quelques remarques.

» I. Supposons qu'une trajectoire déterminée, dont l'équation est

$$\frac{1}{r} = \varphi(\omega),$$

soit parcourue par le mobile, sous l'action de la force centrale, et qu'on ait mis l'expression de la force sous la forme

$$F = \frac{1}{r^2}\psi(\omega).$$

Si l'on cherche la trajectoire la plus générale, décrite sous l'action d'une telle force, on aura l'équation

$$\frac{1}{r} = a\cos\omega + b\sin\omega + h\varphi(\omega),$$

la constante des aires ayant pour valeur $\frac{1}{\sqrt{h}}$. Cette remarque presque évidente entraîne cette conséquence intéressante que l'on peut concevoir des lois de la force, donnant comme trajectoires des courbes algébriques, toutes du même degré. On a même ce théorème de Géométrie : *Toutes les courbes homologiques d'une courbe fixe, le centre d'homologie étant l'origine de la force centrale et l'axe d'homologie étant quelconque, peuvent être considérées comme étant décrites sous l'action d'une même force.*

» II. Nous avons exclu le cas où les coniques passeraient toutes au centre attractif. On verra facilement que cette circonstance se présente seulement pour la loi donnée par la formule

$$F = \frac{\mu}{r^2(a\cos\omega + b\sin\omega)^3},$$

cas particulier à la fois des deux lois générales.

» III. Enfin, si l'on exprime les deux lois trouvées en introduisant les coordonnées rectilignes au lieu des coordonnées polaires, on obtient les deux formules

$$F = \frac{\mu r}{(ax^2 + bxy + cy^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{8}$$

$$F = \frac{\mu r}{(ax + by + c)^3}, \tag{9}$$

qui, par une généralisation facile, conduisent aux deux suivantes :

$$F = \frac{\mu r}{(ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy)^{\frac{3}{2}}}, \tag{10}$$

$$F = \frac{\mu r}{(ax + by + cz + d)^3}, \tag{11}$$

contenant les trois coordonnées d'un point quelconque de l'espace, et pour lesquelles la trajectoire sera toujours une conique, qui pourra d'ailleurs être située dans un plan quelconque, passant par l'origine de la force. »

MÉCANIQUE. — *Sur les lois de Kepler. Solution d'un problème proposé par M.* Bertrand. Note de M. **Halphen**.

« *En sachant que les planètes décrivent des sections coniques, et sans rien supposer de plus, trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite, exprimées en fonction des coordonnées de son point d'application* ([1]).

» Tel est le problème dont je donne ici une solution.

» Lemme. — *Si une force, dépendant seulement de la position de son point d'application, fait décrire à ce point, quelles que soient les circonstances initiales, une trajectoire plane, cette force passe par un point fixe ou est parallèle à une direction fixe.*

» Soient x, y, z les coordonnées du point d'application. Le déterminant $(x'y''z''')$ des dérivées de ces coordonnées est constamment nul, puisque la trajectoire est plane. Je prends ces dérivées par rapport au temps, et je désigne par X, Y, Z les composantes de la force. J'ai alors

$$(1)\qquad x''=\mathrm{X},\quad x'''=\left(x'\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+z'\frac{\partial}{\partial z}\right)\mathrm{X},\ \ldots.$$

» Grâce aux équations telles que (1), je transforme le déterminant $(x'y''z''')$ en une fonction quadratique et homogène de x', y', z', qui doit être identiquement nulle. En égalant à zéro les coefficients des carrés, j'obtiens

$$(2)\qquad \mathrm{Z}\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial x}-\mathrm{Y}\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial x}=0,\quad \mathrm{X}\frac{\partial\mathrm{Z}}{\partial y}-\mathrm{Z}\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial y}=0,\quad \mathrm{Y}\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial z}-\mathrm{X}\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial z}=0.$$

» Soient ξ, η, ζ trois fonctions d'une seule variable, x pour la première, y pour la seconde, z pour la troisième, et soit U une fonction quelconque de x, y, z. La solution la plus générale du système (2) est

$$(3)\qquad \mathrm{X}=\mathrm{U}\xi,\quad \mathrm{Y}=\mathrm{U}\eta,\quad \mathrm{Z}=\mathrm{U}\zeta.$$

» J'égale maintenant à zéro les coefficients des rectangles dans la fonction quadratique ci-dessus. En vertu de (3), les nouvelles équations se réduisent à

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{d\eta}{dy}=\frac{d\zeta}{dz}=\text{const.}$$

([1]) *Comptes rendus*, p. 673 de ce volume.

» J'en conclus donc

$$\xi = kx + a, \quad \eta = ky + b, \quad \zeta = kz + c,$$

ce qui démontre le lemme annoncé.

» Soit maintenant à résoudre le problème suivant : *Une force agissant dans un plan, et dépendant seulement de la position de son point d'application, est telle que la trajectoire de ce point satisfasse toujours à une équation différentielle donnée : trouver les équations auxquelles satisfont les composantes de cette force*. On exprimera les dérivées successives $\frac{d^n y}{dx^n}$ au moyen de x', y', X, Y et des dérivées partielles de X, Y. On substituera ces expressions dans l'équation donnée. On obtiendra les relations cherchées en exprimant que l'équation ainsi transformée a lieu quelles que soient les valeurs de x', y', z'. Ici il suffira de remarquer que l'on a

$$(4) \qquad x'^{2n-1} \frac{d^n y}{dx^n} = \mathrm{A} + x'^{n-2} \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-2} (x'\mathrm{Y} - y'\mathrm{X}),$$

relation dans laquelle A est une fonction entière, ne contenant pas le facteur x', et dont le degré en x', y' est inférieur à celui de l'autre partie du second membre. Les symboles de dérivation de cette seconde partie ne s'appliquent, bien entendu, qu'à X et Y.

» Pour équation différentielle, je prends celle des coniques :

$$(5) \qquad \Theta = 40 \left(\frac{d^3 y}{dx^3} \right)^3 - 45 \frac{d^2 y}{dx^2} \frac{d^3 y}{dx^3} \frac{d^4 y}{dx^4} + 9 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 \frac{d^5 y}{dx^5} = 0 \text{ [1]}.$$

Après substitution des valeurs (4), le dénominateur x'^{15} est commun aux trois termes de Θ. Après suppression de ce dénominateur, la partie du degré le plus élevé, dans chacun de ces termes, contient le facteur commun x'^3. A ce facteur près cette partie θ s'obtient simplement en remplaçant, dans chaque terme de Θ, $\frac{d^n y}{dx^n}$ par $\left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-2} (x'\mathrm{Y} - y'\mathrm{X})$.

» Je suppose maintenant, suivant le lemme, que la force passe par un point fixe, origine des coordonnées. Il en résulte

$$\mathrm{X} = \mathrm{U}x, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{U}y,$$

$$\left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \right)^n (x'\mathrm{Y} - y'\mathrm{X}) = (x'y - y'x) \left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} \right)^n \mathrm{U}.$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 64.

Par suite, θ contient le facteur $(x'y - y'x)^3$. A ce facteur près, θ s'obtient en remplaçant, dans Θ, $\frac{d^n y}{dx^n}$ par $\left(x' \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y}\right)^n$ U. La partie du degré le plus élevé en x' s'obtient donc en remplaçant, dans Θ, $\frac{d^n y}{dx^n}$ par $\frac{\partial^{n-2} U}{\partial x^{n-2}}$. Comme (5) est l'équation différentielle des coniques, j'en conclus :

$$(6) \qquad y = ax + b + (mx^2 + 2nx + p)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = (mp - n^2)(mx^2 + 2nx + p)^{-\frac{3}{2}}.$$

» Donc U est la puissance $-\frac{3}{2}$ d'un polynôme du second degré en x. Semblablement U est aussi la puissance $-\frac{3}{2}$ d'un polynôme du second degré en y. Cette conclusion doit subsister quand on change la direction des axes de coordonnées; on voit donc, sans se préoccuper des autres équations, que U est la puissance $-\frac{3}{2}$ d'un polynôme V du second degré en x, y.

» J'essaye maintenant cette solution. Au moyen de l'intégrale des aires, on obtient, pour la trajectoire, l'équation différentielle

$$(7) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \mathrm{CU}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

Pour la conique (6) et d'après la valeur supposée de U, il en résulte

$$(8) \qquad c^{\frac{2}{3}}[b(y - ax - b) + nx + p]^2 - (mp - n^2)^{\frac{2}{3}}\mathrm{V} = 0.$$

» L'équation (8) coïncide avec celle de la conique (6) ou bien est une identité. Dans le premier cas, on voit aisément que V doit être homogène en x, y, sans quoi la conique (8) ne contiendrait qu'une arbitraire. Dans le second cas, V est un carré. On obtient ainsi deux solutions qui peuvent s'énoncer comme il suit, et qui sont les seules :

» Première solution. — *Soit une force passant par un point fixe* (origine des coordonnées), *proportionnelle à la distance de ce point au point d'application, et en raison inverse de la puissance $\frac{3}{2}$ d'un polynôme* P *homogène et du second degré par rapport aux coordonnées du point d'application. Sous l'action de cette force, tout point matériel décrit une conique doublement tangente au cône* P = o.

» Deuxième solution. — *Soit une force passant par un point fixe, proportionnelle à la distance de ce point fixe au point d'application, et en raison inverse du cube de la distance de ce dernier à un plan fixe. Sous l'action de cette force, tout point matériel décrit une conique, par rapport à laquelle la polaire du point fixe est dans le plan fixe.*

» L'hypothèse d'une force parallèle à une direction fixe donne lieu à deux solutions analogues, qu'il est inutile de rapporter ici. »