Групповой анализ дифференциальных уравнений первого порядка и `Maple`

М. Д. Малых

Материалы к факультативному курсу лекций,
читаемому на кафедре математики физического факультета МГУ.

Москва, 2007 гг.

Содержание

1. Однопараметрические группы

Рассмотрим два уравнения вида

$$x_1 = f(x_0, y_0, \alpha), \quad y_1 = g(x_0, y_0, \alpha), \tag{1}$$

где α — параметр, принимающий непрерывное множество значений; для каждого значения α они задают преобразование, переводящее точку $M = (x_0, y_))$ плоскости в другую точку $M_1 = (x_1, y_1)$. Совокупность же таких преобразований задает то, что называют однопараметрическим семейством преобразований.

Подействуем на x_1, y_1 той же операцией, но взяв значение β для параметра, получим новую точку M_2

$$x_2 = f(x_1, y_1, \beta), \quad y_2 = g(x_1, y_1, \beta). \tag{2}$$

Эти две операции вмести представляют собой новое преобразование, которое переводит точку $M = (x_0, y_0)$ в точку $M_2 = (x_2, y_2)$. Его называют произведением двух преобразований (1) и (2).

Пусть произведение двух любых преобразований (1) и (2) из рассматриваемого семейства само принадлежит этому семейству, то есть для любых α и β найдется такое γ, что

$$x_2 = f(x_0, y_0, \gamma), \quad y_2 = g(x_0, y_0, \gamma).$$

При этом, конечно, γ является функцией α и β. В этом случае однопараметрическое семейство называют однопараметрической группой или группой Ли в честь *Софуса Ли* (Sophus Lie), начавшего их систематическое изучение в 1871.[1]

[1] *Klein F.; Lie S.* Über diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfac...// Math. Ann. 1871. S. 50 - 84

1.1. Каноническое представление однопараметрической группы

Приведем пример однопараметрической группы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} = \frac{dy}{\eta(x,y)} = d\varepsilon. \tag{3}$$

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{\xi(x,y)} - \frac{dy}{\eta(x,y)} = 0,$$

а следовательно, и система (3), имеет интеграл вида

$$F(x,y) = C_1.$$

При его помощи можем найти общее решение при помощи квадратуры:

$$\varepsilon = \int \frac{dx}{\xi(x, y(x, C_1))} = g(x, y, C_1) + C_2.$$

Подставляя $C_1 = F(x,y)$ в это выражение, видим, что общее решение (3) дается так

$$F(x,y) = C_1, \quad G(x,y) - \varepsilon = C_2.$$

В частности, решение задачи Коши с начальными условиями

$$x|_{\varepsilon=0} = x_0, \quad y|_{\varepsilon=0} = y_0$$

можно записать так

$$F(x,y) = F(x_0,y_0), \quad G(x,y) = G(x_0,y_0) + \varepsilon. \tag{4}$$

Семейство преобразований, переводящих точку $M_0 = (x_0, y_0)$ в $M = (x, y)$, является однопараметрической группой с параметром ε.

В самом деле, если преобразование при $\varepsilon = \varepsilon_1$ переводит точку $M_0 = (x_0, y_0)$ в $M_1 = (x_1, y_1)$, то есть

$$F(x_1,y_1) = F(x_0,y_0), \quad G(x_1,y_1) = G(x_0,y_0) + \varepsilon_1,$$

а преобразование при $\varepsilon = \varepsilon_2$ переводит точку $M_1 = (x_1, y_1)$ в $M_2 = (x_2, y_2)$, то есть

$$F(x_2, y_2) = F(x_0, y_0), \quad G(x_2, y_2) = G(x_1, y_1) + \varepsilon_2,$$

то преобразование при $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ переводит точку $M_0 = (x_0, y_0)$ в $M_2 = (x_2, y_2)$, поскольку

$$F(x_2, y_2) = F(x_0, y_0), \quad G(x_2, y_2) = G(x_0, y_0) + \varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Отметим еще, что изменив знак ε получаем преобразование, возвращающее все точки на место, то есть обратное преобразование, и что при $\varepsilon = 0$ получается тождественное или единичное преобразование, оставляющее все точки плоскости на мести.

Теорема 1. Любая однопараметрическая группа, имеющая единичное преобразование, может быть представлена в виде (4) как интеграл некоторой системы вида (3).

Доказательство. Условие того, что семейство (1) представляет группу можно записать так:

$$f(x_1, y_1, \beta) = f(x_0, y_0, \gamma), \quad g(x_1, y_1, \beta) = g(x_0, y_0, \gamma),$$

где γ некоторая функция переменных α и β. Запишем эту связь так

$$\beta = \psi(\alpha, \gamma)$$

и будем считать x_0, y_0 и γ — константами, α — независимой переменной, а все прочие переменные — функциями α. Тогда дифференцируя последние тождества по α, получим

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{d\alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{d\psi}{d\alpha}, \quad \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{dx_1}{d\alpha} + \frac{\partial g}{\partial y_1}\frac{dy_1}{d\alpha} = \frac{\partial g}{\partial \beta}\frac{d\psi}{d\alpha}.$$

Поскольку здесь f и g и их производные зависят только от x_1, y_1 и β, для производных x_1 и y_1 по α имеет место представление

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = \lambda(\alpha, \beta)\xi(x_1, y_1, \beta), \quad \frac{dy_1}{d\alpha} = \lambda(\alpha, \beta)\eta(x_1, y_1, \beta).$$

Поскольку x_1, y_1 не зависят от β, придавая ему фиксированное значение, получим

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = \lambda(\alpha)\xi(x_1, y_1), \quad \frac{dy_1}{d\alpha} = \lambda(\alpha)\eta(x_1, y_1).$$

Таким образом, соотношение (4) доставляет решение системы

$$\frac{dx_1}{\xi(x_1, y_1)} = \frac{dy_1}{\eta(x_1, y_1)} = \lambda(\alpha)d\alpha. \tag{5}$$

с начальным условием

$$x_1|_{\alpha=\alpha_0} = x_0, \quad y_1|_{\alpha=\alpha_0} = y_0,$$

где α_0 — такое значение параметра, при котором получается единичное преобразование. Остается перейти от параметра α к параметру

$$\varepsilon = \int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} \lambda(\alpha)d\alpha.$$

□

Способ задания группы в виде (4) будем называть далее каноническим. В связи с группой, заданной соотношением (4), можно ввести канонические переменные

$$u = F(x, y), \quad v = G(x, y),$$

в которых уравнения группы записывается особенно просто:

$$u_1 = u_0, \quad v_1 = v_0 + \varepsilon. \tag{6}$$

Отметим, что часто группу задают путем указания пары функций (ξ, η) или так называемого инфинитезимального оператора

$$A = \xi(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Само название связано с тем, что для произвольной функции $\varphi(x, y)$ верно

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_0, y_0) + A[\varphi]|_{(x_0,y_0)}\,\varepsilon + \frac{1}{2!}A^2[\varphi]\Big|_{(x_0,y_0)}\varepsilon^2 + \ldots, \tag{7}$$

где

$$A[\varphi] = \xi(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

1.2. Инварианты группы

Объект любой природы, который в некотором смысле не меняется под действием группы, называют инвариантом. Простейший пример инварианта доставляет функция $\varphi(x,y)$, значение которой не меняется под действием группы в том смысле, что

$$\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_0, y_0).$$

Эта функция неизбежно является интегралом

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

и поэтому инвариантом являются только функция $F(x,y)$ из (4) и любые функции от нее

$$\varphi(x,y) = \lambda(F(x,y)).$$

Из соотношения (7) сразу видно, что функция φ будет инвариантом, тогда и только тогда, когда

$$A[\varphi] = 0.$$

Однопараметрическое семейство кривых

$$H(x,y,\alpha) = 0 \tag{8}$$

назовем инвариантным относительно группы, если любое преобразование группы переводит любую кривую семейства в некоторую кривую того же семейства. Аналитически это означает, что для любых α и ε можно указать такое число $\beta(\alpha,\varepsilon)$, что из

$$H(x_0, y_0, \alpha) = 0$$

и (4) следует

$$H(x_1, y_1, \beta) = 0.$$

Для случая, когда соотношение (8) разрешено относительно α, можно указать простой критерий инвариантности:

Теорема 2. Для того, чтобы семейство кривых

$$u(x, y) = \alpha$$

было инвариантно относительно группы с инфинитезимальным оператором A, необходимо и достаточно, чтобы $A[u]$ выражалось через u:

$$A[u] = h(u).$$

Доказательство. Если семейство кривых

$$u(x, y) = \alpha$$

инвариантно, то из

$$u(x_0, y_0) = \alpha$$

следует

$$u(x_1, y_1) = \beta(\alpha, \varepsilon).$$

В силу (7) верно

$$u(x_1, y_1) = \alpha + A[u]|_{(x,y)=(x_0,y_0)}\varepsilon + \dots,$$

поэтому из

$$u(x, y) = \alpha$$

следует

$$A[u] = h(\alpha)$$

при всех (x, y). Это означает, что

$$A[u] = h(u).$$

Наоборот, если для функции $u(x, y)$ выражение $A[u]$ можно выразить через u как $h(u)$, то в силу (7) из

$$u(x_0, y_0) = \alpha$$

следует

$$u(x_1, y_1) = \alpha + h(\alpha)\varepsilon + \frac{1}{2!}h'(\alpha)\varepsilon^2 + \ldots .$$

Правую часть задает функцию $\beta(\alpha, \varepsilon)$, такую, что из

$$u(x_0, y_0) = \alpha$$

следует

$$u(x_1, y_1) = \beta.$$

Это и значит, что $u(x, y) = \alpha$ — инвариантное семейство. □

Семейство (8) инвариантных кривых можно рассматривать как семейство интегральных кривых дифференциального уравнения вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

которое можно найти исключая параметр α из

$$H = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy = 0.$$

Это дифференциальное уравнение будем называть инвариантным относительно действия рассматриваемой группы. Характеристическое свойство этого уравнения состоит в том, что его интегральные кривые под действием группы переходят друг в друга.

Теорема 3. Для того, чтобы дифференциальное уравнение

$$Mdx + Ndy = 0$$

было инвариантным относительно группы с инфинитезимальным оператором $A = \xi\partial_x + \eta\partial_y$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\mu = \frac{1}{M\xi + N\eta}$$

было интегрирующим множителем для уравнения.

Доказательство. Пусть $u(x, y) = \text{const}$ — интеграл $Mdx + Ndy = 0$. В силу теоремы 2, для того, чтобы семейство $u(x, y) = \alpha$ было инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\xi(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + \eta(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = h(u).$$

Коль скоро u — интеграл, то имеется такой интегрирующий множитель μ, что

$$du = \mu(Mdx + Ndy),$$

поэтому

$$\xi\mu M + \eta\mu M = h(u),$$

откуда

$$\mu = \frac{h(u)}{M\xi + N\eta}$$

Замечая, что $h(u)$ — интеграл, видим, что $(M\xi + N\eta)^{-1}$ — тоже интегрирующий множитель. □

В канонических переменных

$$u = F(x, y), \quad v = G(x, y)$$

группа записывается в виде (6). При фиксированных u_0, v_0 для приращений верно

$$du_1 = 0, \quad dv_1 = d\varepsilon,$$

поэтому уравнения (3) имеют вид

$$\frac{du}{0} = \frac{dv}{1} = d\varepsilon.$$

Значит, уравнение

$$M(u, v)du + N(u, v)dv$$

будет инвариантным тогда и только тогда, когда

$$\frac{M(u, v)}{N(u, v)}du + dv$$

будет полным дифференциалом. Последнее означает, что

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{M(u,v)}{N(u,v)} = 0,$$

то есть

$$\frac{M(u,v)}{N(u,v)} = F(u).$$

Таким образом, любое уравнение $Mdx + Ndy = 0$ будет инвариантным относительно группы тогда и только тогда, когда в канонических переменных этой группы он записывается как уравнение с разделяющимися переменным:

$$S(u)du + dv = 0.$$

Отсюда возникает такой способ отыскания всех дифференциальных уравнений, инвариантных относительно заданной группы. Сначала нужно записать группу в каноническом виде (4), а затем записать

$$S(F(x,y))dF(x,y) + dG(x,y) = 0.$$

2. Группы Ли и интегрирование дифференциальных уравнений

Обратимся теперь к интегрированию дифференциального уравнения

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0. \tag{9}$$

Если известно, что оно является инвариантным относительно действия однопараметрической группы и известен инфинитезимальный оператор $A = \xi\partial_x + \eta\partial_y$ этой группы, то в силу теоремы 3 можно указать интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{M\xi + N\eta};$$

поэтому интегрирование (9) сводится к квадартуре

$$\int \frac{Mdx + Ndy}{M\xi + N\eta} = \mathrm{const}.$$

Эту группу называют группой Ли или группой симметрий уравнения (9).

Пример 2.1. Соотношения

$$x_1 = \alpha x_0, \quad y_1 = \alpha y_0$$

задают однопараметрическую группу, которая называется группой гомотетии. Зафиксировав x_0 и y_0 имеем

$$dx_1 = x_0 d\alpha = x_1 \frac{d\alpha}{\alpha}, \quad dy_1 = y_0 d\alpha = y_1 \frac{d\alpha}{\alpha},$$

поэтому система (5) может быть записана так

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dy_1}{y_1} = \frac{d\alpha}{\alpha} = d\varepsilon.$$

Здесь

$$\varepsilon = \int\limits_1^\alpha \frac{d\alpha}{\alpha} = \ln \alpha,$$

то есть $\alpha = \exp \varepsilon$. В каноническом виде группа может быть записана в виде

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_0}{x_0}, \quad \ln x_1 = \ln x_0 + \varepsilon$$

и имеем инфинитезимальный оператор

$$A = x\partial_x + y\partial_y.$$

Следовательно, все инвариантные относительно группы гомотетии уравнения имеют вид

$$F\left(\frac{y}{x}\right) d\frac{y}{x} + d\ln x = 0,$$

или

$$F\left(\frac{y}{x}\right) \frac{dy - ydx}{x^2} + \frac{dx}{x} = 0,$$

или

$$F\left(\frac{y}{x}\right) dy + (1 - \frac{y}{x})dx = 0.$$

В силу произвольности F, все инвариантные уравнения можно записать так
$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right).$$

Таким образом, группе гомотетии соответствует элементарное правило интегрирование однородных уравнений, состоящее в предложении взять в качестве множителя
$$\mu = (xG - y)^{-1}.$$
В самом деле, переходя к переменным $x, t = y/x$ имеем
$$\frac{Gdx - dy}{xG - y} = \frac{G(t)dx - d(xt)}{xG(t) - tx} = \frac{dx}{x} - \frac{dt}{G(t) - t}$$
то есть полный дифференциал.

2.1. Интегрирование в `Maple`

Задача об отыскании группы Ли для данного дифференциального уравнения не проще чем, задача об отыскании интегрирующего множителя. Однако существуют такие классы групп, что для любого заданного уравнения можно или найти группу Ли из этого класса или точно сказать, что в этом классе уравнение не имеет группы Ли. В 1990-х *E.S. Cheb-Terrab* и его коллеги собрали коллекцию таких классов и на их основе создали семейство алгоритмов интегрирования дифференциальных уравнений, реализованных в пакете `DETools` при `Maple`.[2]

Первым следует назвать класс групп, для которых ξ и η являются полиномами или рациональными функциями степени не выше K. В этом случае, коэффициенты ξ и η можно считать принять за искомые неизвестные. Если M и N — рациональные, то подставляя выражение
$$\mu = \frac{1}{M\xi + N\eta}$$

[2] *E.S. Cheb-Terrab, E.S. Cheb-Terrab* Computer Algebra Solving of First Order ODEs // Computer Physics Communications, 101 (1997) 254.

в уравнение множителя

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} - \frac{\partial \mu N}{\partial x} = 0$$

и приравнивая нулю коэффициенты при разных степенях $x^n y^m$, получим систему линейных уравнений для отыскания коэффициентов ξ и η. Если она совместно, то найден множитель, если не совместна, то уравнение не допускает группы Ли с рациональным инфинитезимальным оператором.

Если M и N — содержат алгебраические или трансцендентные функции, то требуется лишь уточнить алгоритм получения из уравнения для множителя уравнений для коэффициентов, на чем мы не будем останавливаться.

В `Maple` этот алгоритм получил называние `way` № 3 (полиномы) и № 4 (рациональные функции), степень K является глобальной переменной `dgun`. В качестве примера можно указать на решение № 236 из Камке.

Следующие классы составляют группы, для которых ξ и η имеют один из следующих простых видов функциональной зависимости от x и y:

$$\{\xi = 0,\, \eta = f(x)\}, \quad \{\xi = 0,\, \eta = f(y)\}, \quad \{\xi = f(x),\, \eta = 0\}, \quad \{\xi = f(y),\, \eta = 0\} \tag{10}$$

где f — неизвестная функция одной переменной. В этом случае инвариантные уравнения имеют очень простой вид. Напр., для

$$\xi = 0,\, \eta = f(x)$$

группа имеет вид

$$x_1 = x_0, \quad \frac{y_1}{f(x_1)} = \frac{y_0}{f(x_0)} + \varepsilon$$

а следовательно, все инвариантные уравнения имеют вид

$$F(x)dx + d\frac{y}{f(x)} = 0$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}y + G(x),$$

где F и G — произвольные функции. Поэтому заданное уравнение $y' = \Phi(x,y)$ имеет такую группу только тогда когда оно линейно и по коэффициенту при y, скажем $a(x)$, можно вычислить группу так:

$$\xi = 0, \quad \eta = f(x) = \exp \int a(x).$$

Остается проверить подстановкой, является ли эта группа группой Ли уравнения $y' = \Phi(x,y)$.

Аналогично можно рассмотреть остальные случаи, а также более общий классы групп, для которых ξ и η имеют виды

$$\{\xi = 0,\, \eta = f(x)\, g(y)\}, \qquad \{\xi = f(x)\, g(y),\, \eta = 0\},$$
$$\{\xi = 0,\, \eta = f(y) + g(x)\}, \qquad \{\xi = f(y) + g(x),\, \eta = 0\} \tag{11}$$

где f и g — произвольные функции. Примером может служить № 120 из Камке. Процедура отыскания инвариантных уравнений для заданного вида зависимости (ξ,η) от x и y тоже зашита в `Maple`, см. пример `equinv.mw`.

Тестирование проводилось разработчиками `DETools` на задачах из справочника Камке. В этом справочнике собрано 576 уравнений первого порядка, ранее обсуждавшихся в литературе и имеющих, если угодно, большое прикладное значение. Из их числа были исключены №№ 47, 48, 50, 55, 56, 74, 79, 82, 202, 205, 206, 219, 234, 235, 237, 265, 250, 253, 269, 331, 370, 461, 503 и 576, поскольку в них или не дано решение, или рассматривается слишком общий вид уравнений. Таким образом имеется набор из 552 уравнений, важных для приложений, с бо́льшей частью из которых `DETools` справляется.

Во время этой работы выяснилось удивительное обстоятельство, 78% из 552 уравнений, в том числе самые распространенные, имеют группы Ли одного и того же класса. В 2000 г. *E.S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov*[3] назвали

[3] *E.S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov* First order ODEs, Symmetries and Linear Transformations // Submitted to “European Journal of Applied Mathematics” - July 2000.

группы из этого класса линейными и нашли алгоритм, позволяющий для заданного уравнения, отличного от уравнения Риккати, найти его линейную группу, если таковая существует. Подчеркнем, что любой группе Ли отвечает правило интегрирования каких-то уравнений, но, получается, что "общераспространенными"являются лишь правила, связанные с линейной группой.

2.2. Класс Камке

2.2.1. Описание класса

Группы вида

$$p(x_1)y_1 + q(x_1) = p(x_0)y_0 + q(x_0), \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon \tag{12}$$

E.S. Cheb-Terrab и T. Колокольников называли линейными, что не вполне удачно, мы будем говорить, что они составляют класс Камке.

Полагая (x_0, y_0) постоянными, имеем

$$pdy_1 + (p'y_1 + q')dx_1 = 0, \quad f'dx_1 = d\varepsilon,$$

откуда

$$\frac{f'dx_1}{1} = -\frac{pf'dy_1}{p'y_1 + q'} = d\varepsilon$$

Таким образом, инфинитезимальный оператор имеет вид

$$\xi = F(x), \eta = P(x)y + Q(x).$$

Инвариантные уравнения имеют вид

$$S(py + q)d(py + q) + df = 0,$$

или

$$Spdy + (f' + S(p'y + q')dx = 0,$$

то есть

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{p(x)}G(p(x)y + q(x)) + \frac{p'(x)y + q'(x)}{p(x)}, \tag{13}$$

где G — произвольная функция.

2.2.2. Способ интегрирования заданного уравнения

Опишем теперь, как проинтегрировать заданное уравнение, скажем

$$\frac{dy}{dx} = \Psi(x, y), \tag{14}$$

являющееся инвариантным для некоторой незаданной группы вида (12).

При этом будем считать, что Ψ — какая угодно, в том числе многозначная функция, но Ψ_{yyy} не равно тождественно нулю, то есть уравнение не есть уравнение Риккати.

(i) Если уравнение (14) инвариантно относительно группы вида (12), то зная лишь $\Psi(x, y)$ можно указать новые переменные x, u, в которых уравнение (14), скажем

$$\frac{du}{dx} = \mathit{\Phi}(x, u),$$

инвариантно относительно группы с инфинитезимальным оператором вида

$$\xi(x)\partial_x + \eta(x)\partial_u.$$

В самом деле, верно

$$\Psi_y = f'G'(py + q) - \frac{p'}{p},$$

$$\Psi_{yy} = f'pG''(py + q),$$

$$\Psi_{yyy} = f'p^2G'''(py + q),$$

и поэтому

$$\frac{\Psi_{yy}}{\Psi_{yyy}} = \frac{1}{p}K(py + q) \quad \text{где} \quad K = \frac{G''}{G'''}. \tag{15}$$

Положим для краткости

$$A(x, y) := \frac{\Psi_{yy}}{\Psi_{yyy}}. \tag{16}$$

Если $A_y \equiv 0$, то имеется такая константа k, что

$$kp(x) = A(x)^{-1},$$

и поэтому (14) инвариантно относительно группы вида

$$A(x_1)^{-1}y_1 + kq(x_1) = A(x_0)^{-1}y_0 + kq(x_0), \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon$$

В новых переменных

$$x, \quad u = A(x)^{-1}y$$

уравнение (14), скажем

$$\frac{du}{dx} = \Phi(x, u),$$

инвариантно относительно группы вида

$$u_1 + g(x_1) = u_0 + g(x_0), \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon$$

то есть группы с инфинитезимальным оператором вида

$$\xi(x)\partial_x + \eta(x)\partial_u.$$

Если $A_{yy} \equiv 0$, но $A_y \not\equiv 0$, то

$$A(x, y) \equiv \frac{k_1(py + q) + k_0}{p} \quad (k_1 \neq 0),$$

поэтому (14) инвариантно относительно группы вида

$$k_1[p(x_1)y_1 + q(x_1)] + k_0 = k_1[p(x_0)y_0 + q(x_0)] + k_0, \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon$$

или

$$\ln A(x_1, y_1) + \ln p(x_1) = \ln A(x_1, y_1) + \ln p(x_1), \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon$$

В новых переменных

$$x, \quad u = \ln A(x, y)$$

уравнение (14) опять инвариантно относительно группы вида

$$u_1 + g(x_1) = u_0 + g(x_0), \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon$$

то есть группы с инфинитезимальным оператором вида

$$\xi(x)\partial_x + \eta(x)\partial_u.$$

Наконец, если $A_{yy} \not\equiv 0$, то можно образовать величину

$$B(x,y) := \frac{A_{xy}}{A_{yy}} = \frac{p'y + q'}{p} \tag{17}$$

Поэтому функция B необходимо линейна по y и

$$p(x) = k \exp \int B_y dx,$$

где k — некоторая константа. Поэтому искомая замена дается как

$$x, \quad u = \exp \int B_y dx y.$$

Верно и обратное: если уравнение (14) не инвариантно относительно группы вида (12), то ни замена $u = a(x)y$, ни замена

$$u = \ln a(x) + b(x)y$$

не могут привести к уравнению с группой вида $f(x)\partial_x + g(x)\partial_u$.

Для доказательства допустим противное, то есть что имеется группа

$$u_1 + p(x_1) = u_0 + p(x_0), \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon.$$

Это значит, что в исходных переменных имеется группа

$$a(x_1)y_1 + p(x_1) = a(x_0)y_0 + p(x_0), \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon$$

или

$$\frac{a(x_1) + b(x_1)y_1}{e^{-p(x_1)}} = \frac{a(x_0) + b(x_0)y_0}{e^{-p(x_0)}}, \quad f(x_1) = f(x_0) + \varepsilon,$$

что невозможно.

Доказанное можно сформулировать так:

Теорема 4 (E.S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov, 2000[4])**.** Пусть дано уравнение (14), отличное от уравнения Риккати. В зависимости от

$$A(x,y) := \frac{\Psi_{yy}}{\Psi_{yyy}}$$

[4] *E.S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov* First order ODEs, Symmetries and Linear Transformations // Submitted to "European Journal of Applied Mathematics" - July 2000.

перейдем от y к новой переменной u так:

$A_y \equiv 0$	$u = A(x)y$
$A_y \not\equiv 0,\ A_{yy} \equiv 0$	$u = \ln A(x,y)$
$A_y A_{yy} \not\equiv 0$	$u = \exp \int B_y dxy$, где $B(x,y) := \frac{A_{xy}}{A_{yy}}$

Уравнение (14) в новых переменных инвариантно относительно группы вида $f(x)\partial_x + g(x)\partial_u$ тогда и только тогда, когда (14) в старых переменных инвариантно относительно группы Камке (12).

(ii)Если уравнение

$$\frac{du}{dx} = \Phi(x,u)$$

нелинейно и инвариантно относительно группы с инфинитезимальным оператором вида

$$f(x)\partial_x + g(x)\partial_u,$$

то зная только Φ можно найти f и g и свести, тем самым, уравнение к квадратуре.

Для этой группы дифференциальное уравнение (3) имеет вид

$$\frac{dx}{f(x)} = \frac{du}{g(x)} = d\varepsilon,$$

поэтому канонические уравнения группы таковы

$$u_1 - \int^{x_1} \frac{g(x)}{f(x)}dx = u_1 - \int^{x_1} \frac{g(x)}{f(x)}dx \int^{x_1} \frac{dx}{f(x)} = \int^{x_0} \frac{dx}{f(x)} + \varepsilon,$$

а инвариантные уравнения даются как

$$S\left(u - \int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right)(du - \frac{g(x)}{f(x)} + \frac{dx}{f(x)} = 0,$$

или

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{f(x)}\left(g(x) - G\left(u - \int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right)\right), \tag{18}$$

где G — произвольная функция.

Образуем

$$E(x,u) := \frac{\Phi_u}{\Phi_{uu}}, \tag{19}$$

эта функция неизбежно должна иметь вид

$$E(x,u)=\frac{G'}{G''}=E\left(u-\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\right)$$

Если $E_u\not\equiv 0$, то по данной $\Phi(x,u)$ можно вычислить

$$F(x):=\frac{E_x}{E_u}=-\frac{g(x)}{f(x)}. \tag{20}$$

С другой стороны, коль скоро

$$\mu=g(x)-f(x)\Phi(x,u)$$

интегрирующий делитель для $du-\Phi dx$, то

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\mu}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Phi}{\mu}=0$$

Отсюда

$$-\mu^{-2}\mu_x-\mu^{-2}\Phi\mu_u+\mu^{-1}\Phi_u=0$$

или

$$\mu_x+\Phi\mu_u-\mu\Phi_u=0$$

или, наконец,

$$g'-f'\Phi-f\Phi_x-g\Phi_u=0. \tag{21}$$

Используя (20), это равенство можно записать так

$$(F'+\Phi_x-F\Phi_u)f+(F+\Phi)f'=0.$$

Значит, с точность до мультипликативной константы k верно

$$f=k\exp-\int\frac{F'+\Phi_x-F\Phi_u}{F+\Phi}.$$

Это означает, что уравнение допускает группу с

$$f=\exp-\int\frac{F'+\Phi_x-F\Phi_u}{F+\Phi},\quad g=-F(x)f, \tag{22}$$

которая тот час может быть вычислена, как только дано $\Psi(x,u)$. Прямая проверка покажет, верно это или нет.

Если же $E_u \equiv 0$, то и $E_x \equiv 0$ и поэтому в силу (19) имеется такая константа k_1, что

$$\frac{G''}{G'} = k_1,$$

откуда

$$G(s) = k_2 + k_3 \exp k_1 s$$

Поэтому уравнение (18) имеет вид

$$\frac{du}{dx} = a(x) + b(x) \exp k_1 u, \tag{23}$$

где a и b — произвольные функции, выражающиеся через f и g. Это уравнение всегда имеет группу Ли вида $f(x)\partial_x + g(x)\partial_u$, поскольку уравнение (21) при

$$\varPhi(x,u) = a(x) + b(x) \exp k_1 u$$

имеет решение f, g.

В самом деле, этому уравнению можно удовлетворить, приравняв нулю коэффициенты при $\exp k_1 u$ и 1:

$$-f'b - fb' - k_1 g b = 0.$$

$$g' - f'a - fa' = 0.$$

Эта система интегрируется явно: из второго уравнения

$$g = fa + C_1,$$

и тогда для fb получается линейное уравнение

$$(fb)' = -k_1(fa + C_1)b = -k_1 a(fb) - k_1 C_1 b,$$

откуда

$$fb = \left[C_2 - k_1 C_1 \int b(x) e^{+k_1 \int a(x)dx} dx\right] e^{-k_1 \int a(x)dx}$$

В частности, при $C_1 = 0$ и $C_2 = 1$ имеем

$$f = \frac{\exp -k_1 \int a(x)dx}{b(x)}, \quad g = \frac{a(x)\exp -k_1 \int a(x)dx}{b(x)}.$$

Используя это решение и теорему 3, можно образовать интегрирующий делитель

$$\mu := f(x)\,(a(x) + b(x)\exp k_1 u) - g(x)$$

для (23), то есть свести (23) к квадратуре.

2.2.3. Алгоритм интегрирования заданного уравнения и примеры

Пусть теперь задано уравнение (14), отличное от уравнения Риккати. …