Абелевы интегралы в лекциях Вейерштрасса

М. Д. Малых

Материалы к факультативному курсу лекций,
читаемому на кафедре математики физического факультета МГУ.
Москва, 2003-2006 гг.

Оглавление

Предисловие

В 70-х годов XIX века в берлинском университете Карл Вейерштрасс читал лекции по своей теории аналитических функций, венцом которой была теория абелевых интегралов. Вейерштрасс не публиковал свои результаты в журналах, а за записями его лекций из крупнейшие университеты мира отряжали целые экспедиции. С 1875 Хеттнер и Кноблаух работали над изданием текстом лекций, состоявшемся 1902 в качестве 4 тома собрания трудов Вейерштрасса[1]. В настоящей работе пересказываются первые две части лекций Вейерштрасса по изданию 1902 года, при этом в непрерывный текст лекций внесено деление на теоремы. Изложению предшествуют необходимые сведения из алгебры. Последний раздел посвящен напрашивающемуся приложению теории главной функции к интегрированию в элементарных функциях.

На русском языке имеется несколько изложений вейерштрассовских лекций, написанных Ерамаковым[2], М. Тихомандрицким[3] и П.М. Покровским[4], однако все они написаны до 1902 и их авторы неизбежно располагали весьма отрывочными сведениями о подходе Вейерштрасса. На мой взгляд из трех авторов Покровский, располагая самой несовершенной записью лекций, составил наиболее точное представление о сути метода Вейерштрасса. Когда же лекции Вейерштрасса стали доступны, и у нас в стране исчез

[1]Weierstrass K. Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendeten // Math. Werke. Bd. 4. Berlin, Mayer&Müller, 1902

[2]Ермаков Теория абелевых функций без римановой поверхности. (Это издание мне не доступно).

[3]Тихомандрицкий М. Основания теории абелевых интегралов. Харьков, 1895.

[4]Покровский П.М. О рациональных функция эллиптического образа. М, 1900.

интерес к ним, лишь в 1970-х в связи с юбилеем С.В. Ковалевской была написана биография Вейерштрасса[5], содержащая популярный и в связи с этим неполный обзор содержания лекций.

[5] Полубаринова-Кочина П.Я. Карл Вейерштрасс.

Глава 1

Алгебраические уравнения

1.1. Неприводимые уравнения

Пусть x, y — переменные, а $f(x, y)$ — произвольный полином. Соотношение вида $f(x, y) = 0$ называют алгебраическим уравнением, связывающим переменные x и y. Если функция $f(x, y)$ не может быть представлена в виде произведения двух целых рациональных функций от x и y, то будем называть уравнение $f(x, y) = 0$ *неприводимыми*[1].

Выяснить приводимо или нет заданное уравнение на практике помогает следующий критерий

Теорема 1.1 (Критерий Эйзенштейна[2]). Уравнение

$$f(x, y) = a_n(x)y^n + \ldots a_0(x) = 0$$

неприводимо, если все коэффициенты $a_i(x)$, кроме старшего $a_n(x)$, имеют общий нуль $x = a$, простой для младшего коэффициента $a_0(x)$.

Доказательство. Допустим противное, что, именно, верно $f(x, y) = g(x, y)h(x, y)$ при

$$g(x, y) = b_d(x)y^d + \ldots b_0(x), \quad h(x, y) = c_m(x)y^m + \ldots c_0(x)$$

[1] Эйлер Л. Введение в анализ бесконечных. Кн.1, гл. 5

[2] См. Ленг С. Алгебра, гл. 5, § 7.

и $d, m \geq 1$, $b_d c_m \not\equiv 0$. По условию $f(a,y) = a_n(a)y^n \neq 0$. Это означает, что $g(a,y)h(a,y) = a_n(a)y^n$. В силу однозначность разложения полинома $P(y)$, имеем

$$g(a,y) = b_d(a)y^d, \quad h(a,y) = c_m(a)y^m$$

Значит, $b_0(x)$ и $c_0(x)$ делятся на $p(x) = x - a$. Но тогда

$$a_0(x) = b_0(x)c_0(x)$$

делится на $p(x)^2$, что невозможно. □

Пример 1.1.1. В качестве примера докажем неприводимость кривой

$$y^n + a(x) = 0,$$

где $a(x)$ полином, имеющий простой корень $x = \alpha$. Для этого возьмем $p(x) = x - \alpha$. Старший коэффициент, то есть 1, на него не делится, все прочие (т.е. $a(x)$), напротив делятся, наконец, младший коэффициент $a(x)$ не делится на $p(x)^2$, поскольку α — простой корень $a(x)$.

Существуют и более тонкие достаточные критерии приводимости и неприводимости; они реализованы `Maple` в пакете `AlgCurves` функцией `AIrreduc`. Эта функция имеет один аргумент — полином f, и возвращает три значения `true`, то есть да, неприводим, `false`, то есть, нет, приводим, и `fail`, когда ничего не получилось.

1.2. Исключение одной неизвестной из системы двух уравнений

Рассмотрим теперь систему двух алгебраических уравнений

$$\{F(x,y) = 0, \ G(x,y) = 0. \tag{1.1}$$

и найдем такие значения переменной x, при которых существует хотя бы одно решение y этой системы, то есть, как говорят, исключим из системы (1.1) переменную y.

Чисто алгебраические способы исключения были впервые указаны Эйлером[3] и Безу[4] Простейший способ исключения был предложен Сильвестром[5] и Гессе[6]. Мы изложим его следуя Бауеру[7].

Запишем F и G в виде

$$F(x,y) = f_0(x)y^n + f_1(x)y^{n-1} + \cdots + f_n(x),$$
$$G(x,y) = g_0(x)y^m + g_1(x)y^{m-1} + \cdots + g_m(x),$$

где коэффициенты $f_0,\ g_0$ не равны тождественно нулю. Если при некотором значении $x = x_0$ система совместна и имеет решение $y = y_0$, тогда тоже решение имеет система

$$\{F(x,y) = 0,\ yF(x,y) = 0, \ldots, y^{m-1}F(x,y) = 0,$$
$$G(x,y) = 0, \ldots y^{n-1}G(x,y) = 0$$

или

$$\begin{cases} f_n(x) + f_{n-1}(x)y + \cdots + f_0(x)y^n = 0 \\ 0 + f_n(x)y + f_{n-1}(x)y^2 + \cdots + f_0(x)y^{n+1} = 0 \\ \ldots \\ 0 + \cdots + 0 + f_n(x)y^{m-1} + f_{n-1}(x)y^m + \cdots + f_0(x)y^{n+m-1} = 0 \\ g_m(x) + g_{m-1}(x)y + \cdots + g_0(x)y^m = 0 \\ 0 + g_m(x)y + g_{m-1}(x)y^2 + \cdots + g_0(x)y^{m+1} = 0 \\ \ldots \\ 0 + \cdots + 0 + g_m(x)y^{n-1} + g_{m-1}(x)y^n + \cdots + g_0(x)y^{m+n-1} = 0 \end{cases}$$

Поэтому при $x = x_0$ система $n + m$ линейных уравнений вида

$$\mathfrak{A}(x)z = 0$$

[3]Euler.// Mem. de Berlin. 1764 (Bauer G.)
[4]Bézout.// Mém. de Paris. 1764 (Bauer G.)
[5]Sylvester.//Philos. Mag. 1840, p. 372 (Bauer G.)
[6]Hesse. // Crelles Journal. 1843. Bd. 27 или Werke, p.85 (Bauer G.)
[7]Bauer G. Algebra. Kap. XXVIII

с матрицей

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} & f_{n-2} & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_n & f_{n-1} & \dots & & f_0 & 0 & \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_n & \dots & & & f_0 \\ g_m & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & g_m & g_{m-1} & \dots & & g_0 & 0 & \dots \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & g_m & \dots & & & g_0 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

имеет нетривиальное решение

$$z = (1, y_0, y_0^2, \dots, y_0^{n+m-1})$$

Поэтому определитель матрицы $\mathfrak{A}$ при $x = x_0$ должен быт равен нулю. Этот определитель представляет собой полином по x и может быть сразу выписан при помощи одних арифметических действий для данных полиномов F и G.[8] Его называют *результантом полиномов* F и G по y. Таким образом, мы доказали, что *результант* $R(x)$ *полиномов* F *и* G *по* y *во всех точках* x*, при которых совместна система* (1.1).

Обращение этого утверждения, которое Бауер обошел общими фразами, требует больших усилий, поскольку уравнение $R(x) = 0$ влечет лишь существование решения у линейной системы

$$\mathfrak{A}(x)z = 0,$$

но не то, что одно из ее решений имеет вид

$$z = (1, y, y^2, \dots, y^{n+m-1}).$$

Докажем, следуя Ленгу[9], сначала следующее:

[8]Отметим, что при этом несущественно, считаем ли мы x — фиксированной точкой с известными комплексными координатами, или напротив, рассматриваем ее как переменную.

[9]Ленг С. Алгебра

Теорема 1.2. Пусть $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \ldots, \beta_m$ — независимые переменные, тогда результатнт r полиномов

$$f = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n} (y - \alpha_i), \quad g = \beta_0 \prod_{i=1}^{m} (y - \beta_i)$$

равен

$$r = \alpha_0^m \beta_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j).$$

Доказательство. (i) Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — полином, и пусть на гиперплоскости $a_1 x_1 + \ldots a_n x_n = 0$ он обращается в нуль, тогда он делится нацело на $a_1 x_1 + \ldots a_n x_n$.

Для доказательства сделаем линейную замену переменных

$$y_1 = a_1 x_1 + \ldots a_n x_n, \ldots$$

и разложим F по степеням y_1:

$$F = F_0(y_2, \ldots y_n) + F_1(y_2, \ldots) y_1 + F_2 y^2 + \ldots.$$

Поскольку при $y_1 = 0$ и любых $y_2, \ldots y_n$ он равен нулю, то F_0 равно нулю тождественно и поэтому

$$F = y_1(F_1 + y_1 F_2 + \ldots) = (a_1 x_1 + \ldots a_n x_n) G(x_1, \ldots, x_2),$$

где G — некоторый полином.

(ii) Из выписанного выше выражения для результанта получается, что он равен

$$R = \alpha_0^m \beta_0^n \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m),$$

где φ — полином. На гиперплоскости $\alpha_i = \beta_j$ уравнения $f(y) = 0$ и $g(y) = 0$ совместны, поэтому результант равен нулю. В силу (i) отсюда следует, что R делится на все множители вида $\alpha_i - \beta_j$, то есть

$$h = \frac{r}{\alpha_0^m \beta_0^n \prod (\alpha_i - \beta_j)}$$

— полином относительно переменных α_i, β_j.

С другой стороны, результатнт r можно рассмотреть как функцию коэффициентов $a_i(\beta_0, \dots)$ полинома $g(y)$ при фиксированных значениях α_i. Поскольку результант полиномов f и λg больше R в λ^n раз, то

$$r(\lambda a_0, \lambda a_1 \dots) = \lambda^n r(a_0, a_1, \dots),$$

то есть r есть однородная функция этих коэффициентов степени n. Используя

$$\beta_0 \prod (y - \beta_j) = g(y),$$

знаменатель h можно записать как

$$\alpha_0^m \prod_{i=1}^{n} g(\alpha_i),$$

то есть как целую однородную функцию коэффициентов степени n. Но это значит, что h является целой и однородной функцией коэффициентов a_i полинома $g(y)$ степени нуль. А таковой может быть только константа. Это означает, что h не меняется при любом изменении коэффициентов полинома $g(y)$, а значит и при любом изменении переменных $\beta_0, \beta_1, \dots$. Меняя ролями α и β видим, что

$$r = \mathrm{const} \alpha_0^m \beta_0^n \prod (\alpha_i - \beta_j)$$

Подсчитав результант для $y^m = 0$ и $y^n = 1$, видим, что $\mathrm{const} = 1$. □

Рассмотрим теперь точку x с комплексными координатами, в которой результант R равен нулю, старшие коэффициенты $f_0(x) = a_0$ и $g_0(x) = b_0$ не равны нулю. Допустим, что в тоже время система $F = 0$ и $G = 0$ не совместна, тогда комплексные корни a_i полинома F не могут даже частично совпадать с комплексными корнями b_j полинома G. С другой стороны, полиномы F и G получаются из полиномов f и g предыдущей теоремы, если придать α_i и β_i числовые значения a_i и b_i. Поэтому и результант по y

полиномов F и G должен получиться из r при указанной подстановке. Но это не так, поскольку подстановка в r этих чисел не может дать в итоге $R = 0$. Таким образом, доказана теорема:

Теорема 1.3. Для того, чтобы при некотором x система (1.1) была совместна, необходимо, чтобы $R(x) = 0$, и достаточно, чтобы

$$\{R(x) = 0, \quad f_0(x)g_0(x) \neq 0.$$

Выражение

$$R(x) = \begin{vmatrix} f_n & f_{n-1} & f_{n-2} & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_n & f_{n-1} & \dots & & f_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & f_n & \dots & & & f_0 \\ g_m & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & g_m & g_{m-1} & \dots & & g_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & g_m & \dots & & & g_0 \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

можно переписать, прибавив к первому столбцу второй, умноженный на y, третий, умноженный на y^2 и т.д., тогда

$$R(x) = \begin{vmatrix} F(x,y) & f_{n-1} & f_{n-2} & \dots & f_0 & 0 & 0 & \dots \\ yF(x,y) & f_n & f_{n-1} & \dots & & f_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ y^{n-1}F(x,y) & 0 & \dots & f_n & \dots & & & f_0 \\ G(x,y) & g_{m-1} & g_{m-2} & \dots & g_0 & 0 & 0 & \dots \\ yG(x,y) & g_m & g_{m-1} & \dots & & g_0 & 0 & \dots \\ \dots & & & & & & & \\ y^{m-1}G(x,y) & 0 & \dots & g_m & \dots & & & g_0 \end{vmatrix}. \tag{1.4}$$

Поэтому результант $R(x)$ всегда можно представить в виде

$$R(x) = U(x,y)F(x,y) + V(x,y)G(x,y),$$

где U и V — целые рациональные функции x и y, причем U по y степени не выше $n-1$, а V по y — степени не выше $n-1$.

1.2.1. Случай, когда результант тождественно равен нулю

Особо следует рассмотреть тот случай, когда результант $R(x)$ тождественно равен нулю, а значит система совместна при всех x кроме конечного числа значений x, для которых $f_0(x)g_0(x) \neq 0$. Иными словами, имеется бесконечно много решений (x, y) у системы (1.1), что и отличает этот случай от случая с $R(x) \not\equiv 0$.

Соотношение

$$U(x,y)F(x,y) = -V(x,y)G(x,y)$$

в котором степень V строго меньше степени F, заставляет высказать следующее утверждение:

Теорема 1.4. Если $F = 0$ неприводимо, а результант $F = 0$ и $G = 0$ тождественно равен нулю, то G делится на цело на F.

Прямое доказательство из выписанного равенства затруднено тем обстоятельством, что U и V могут быть равны нулю тождественно. Поэтому мы пойдем другим, увы, довольно таки окольным путем: рассматривая коэффициенты уравнений (1.1) не как целые функции x, а как рациональные. Поскольку решений бесконечно много, добавление или убавление их числа посредством деления или умножения на функцию от x, не делает число решений конечным.

Далее, линейная замена переменных

$$x = ax' + by', \quad y = cx' + dy'$$

не меняет свойства системы (1.1) иметь бесконечное число решений. Поэтому можно сначала сделать такую линейную замену, чтобы у преобразованных уравнений старшие коэффициенты при y не зависели от x. Будем считать эти коэффициенты равными единице.

Поскольку F неприводим, то есть его нельзя представить в виде произведения двух полиномов $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, тогда его нельзя и представить в виде произведения двух рациональных функций, целых только по y. Это сразу следует из теоремы:

Теорема 1.5. (Лемма Гаусса) Если полином $f(y) = y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots = 0$ с целыми коэффициентами a_i можно представить как произведение множителей с рациональными коэффициентами, то есть

$$y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \dots + a_0 = (y^u + b_{u-1}y^{u-1} + \dots + b_0)(y^v + c_{v-1}y^{v-1} + \dots + c_0)$$

то коэффициенты b_i и c_i на самом деле целые.[10]

Доказательство. Допустим, что среди коэффициентов есть не целые. Тогда в знаменатель хотя бы одного из них входит некоторое простое число p или некоторый неприводимый полином от $p(x)$, то есть не являющийся произведением каких либо полиномов. Обозначим как s его наивысшую степень, входящую в хотя бы один из знаменателей b_i, а через s — наивысшую степень, входящую в хотя бы один из знаменателей c_i; при этом хотя бы одно из чисел s и t больше нуля. Далее, обозначим как k такой индекс, что знаменатель b_k содержит p^s, а b_i при $i > k$ не содержат столь большую степень p, аналогично введем индекс l для второго множителя. Тогда коэффициент

$$a_{k+l} = b_k c_l + b_{k+1}c_{l-1} + \dots + b_{k-1}c_{l+1} + \dots$$

должен благодаря слагаемому $b_k c_l$, которому не с чем сократиться, содержать в знаменателе множитель p^{s+l}, что невозможно. □

Теперь можно применить те же соображения, которые используются при делении целых чисел (*алгоритм Евклида*). Пусть задано два полинома

[10] Эта теорема верна как для поля рациональных чисел, так и для поля рациональных функций

$f(y)$ и $g(y)$ с коэффициентами из поля k и пусть степень g не больше чем степень f, тогда можно найти такой полином q_1, что

$$f(y) = q_1(y)g(y) + r_1(y),$$

где степень полинома r_1 строго меньше степени g. Полином r_1 называют *остатком* от деления f на g.

Для его разыскания положим

$$f = \sum_{n=0}^{N} a_n y^n, \quad g = \sum_{n=0}^{M} b_n y^n, \quad q_1 = \sum_{n=0}^{N-M} c_n y^n$$

тогда полином

$$\sum a_n y^n - \sum c_n b_m y^{n+m}$$

будет степени, меньшей M, если коэффициенты при $y^N,\ y^{N-1} \dots y^M$ будут равны нулю, но эти коэффициенты суть $a_N - c_{N-M} b_M, \quad a_{N-1} - c_{N-M-1} b_M - c_{N-M} b_{M-1}, \quad \dots, \quad a_M - c_0 b_M - c_1 b_{M-1} - \dots - c_M b_0$ Приравнивая их нулю, получим

$$\begin{aligned}
&c_{N-M} = \frac{a_N}{b_M},\\
&c_{N-M-1} = \frac{a_{N-1} - c_{N-M} b_{M-1}}{b_M},\\
&\dots\\
&c_0 = \frac{a_M - c_1 b_{M-1} - c_2 b_{M-2} - \dots - c_M b_0}{b_M}
\end{aligned}$$

Поэтому взяв таковыми коэффициенты q_1 добьемся того, что $r_1 = f - q_1 g$ станет степени, меньшей степени g, что и требовалось.

Общим делителем полиномов f и g называют полином r с коэффициентами из k такой, что эти полиномы можно представить в виде $f = f_1 r$ и $g = g_1 r$, где f_1 и g_1 — полиномы с коэффициентами из k. Общий делитель наибольшей степени со старшим коэффициентом, равным единице, называют *наибольшим общим делителем* (НОД).

Для разыскания наибольшего общего делителя применим процедуру деления несколько раз

$$
\begin{aligned}
&f = q_1 g + r_1,\\
&g = q_2 r_1 + r - 2,\\
&\dots,\\
&r_{m-2} = q_m r_{m-1} + r_m,\\
&r_{m-1} = r_m q_{m+1} + r_{m+1}
\end{aligned}
$$

и либо на $m+1$ шаге получим $r_{m+1} \equiv 0$, или дойдем до отличного от нуля полинома $r_{m+1}(y)$ наименьшей, то есть нулевой степени, то есть до отличной от нуля константы $r_{m+1}(y) \equiv a \neq 0$.

В первом случае существуют такие полиномы f_1 и g_1, что $f(y) = f_1(y)r_m(y)$ и $g(y) = g_1(y)r_m(y)$, то есть f и g делятся на r_m без остатка. Более того, если $r(y)$ наибольший общий делитель f и g, то он будет делителем $r_1,\ r_2,\dots$, поэтому наибольший общий делитель совпадает с r_m, и мы, стало быть, нашли алгоритм построения наибольшего общего делителя полиномов f и g и при этом оказалось, что он представим в виде

$$r(y) = u(y)f(y) + v(y)g(y),$$

где u и v некоторые полиномы. Во втором случае, наибольший общей делитель f и g должен быть делителем ненулевой константы r_{m-1}, то есть сам равен единице, и опять можно найти такие полиномы u и v, что

$$u(y)f(y) + v(y)g(y) = 1.$$

Отсюда между прочим следует, что если НОД равен единице, то полиномы f и g не имеют общих корней.

Описанный способ нахождения полиномов u и v называется *алгоритмом Евклида* и реализован в пакете `Maple` в виде функции `gcdex(f,g,y,'u','v')` над полями рациональных чисел и рациональных функций.

В интересующем нас случае, когда k — поле рациональных функций x, мгновенно из неприводимости $F(x, y)$ над полем рациональных функций x следует, что НОД F и G или равен F или единице. Во втором случае, из равенства

$$U(x, y)F(x, y) + U(x, y)G(x, y) = q(x),$$

в котором все функции целые, следует (1.1) имеет лишь конечное число решений. В первом же случае, $G(x, y) = F(x, y)H(x, y)$, где $H(x, y)$ — рациональная функция, целая по y. В силу леммы Гаусса, эта функция является целой и по x, что и доказывает теорему 1.4.

Глава 2

Алгебраические кривые

Понятие алгебраической функции подразумевает неравноправность переменных x и y, однако при рассмотрении абелева интеграла можно считать x функцией y. Желая сохранить равноправие, мы рассмотрим сначала свойства алгебраических кривых, а затем вернемся к алгебраическим функциям.

Множество же точек (x, y) с комплексными координатами, удовлетворяющими уравнению $f(x, y) = 0$, называют *алгебраической кривой*. Будем всюду далее в этой главе считать уравнение $f = 0$ неприводимым.

К числу наиболее изученных кривых относятся кривые вида

$$y^2 = P(x),$$

где $P(x)$ — полином с простыми корнями. Как мы видели в примере 1.1.1, уравнение этой кривой неприводимо. Если степень P равна 2, то кривую, заданную этим уравнением называют тригонометрической, если эта степень равна 3 или 4, то кривую называют эллиптической, в противном случае говорят о гиперэллиптической кривой.

Изучение тригонометрической кривой не встречает затруднения. поскольку ее можно представить параметрически, напр., так

$$x = \sin(t), \quad y = \cos(t).$$

В общем случае не ясно, как найти такое представление (униформизацию кривой), поэтому мы вслед за Вейерштрассом покажем, как это сделать локально в окрестности произвольной точки.

Под окрестностью произвольной точки (a, b) алгебраической кривой будем понимать пересечение обычной евклидовой окрестности точки (a, b) в $\mathbb{C}^2$ и самой кривой. Нам бы хотелось все точки (x, y) кривой $f(x, y) = 0$, лежащие в достаточно малой окрестности заданной точки (a, b), представить как однозначные функции x_t, y_t некоторого параметра t лежащего в некоторой области G так, чтобы между t из G и точками этой окрестности было взаимно однозначное соответствие.

К сожалению, окрестность точки $(0, 0)$ кривой $y^2 = x^2$ легко представить как объединение двух множеств

$$x = t, \quad y = t,$$

и

$$x = t, \quad y = -t$$

но нельзя представить единым выражением (x_t, y_t). Поэтому *задачу о локальной униформизации* мы сформулируем осторожнее: представить окрестность произвольной точки как объединение множеств вида

$$x = x_t^{(n)}, \quad y = y_t^{(n)}, \quad t \in G_n$$

так, чтобы между t из G и точками этой окрестности было взаимно однозначное соответствие.

Для ее разрешения требуются два вспомогательных результата: обобщение теоремы о неявной функции и теория неизвестной из двух уравнений.

2.1. Подготовительная теорема Вейерштрасса

Начнем с теоремы, обобщающей элементарную теоремы о неявной функции.

Теорема 2.1 (Подготовительная теорема Вейерштрасса[1]). Пусть функция

$$g(x,y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\nu(x) y^\nu$$

голоморфна в точке $(0,0)$, причем

$$g_0(0) = \cdots = g_{m-1}(0) = 0,\ g_m = 1.$$

Тогда существует голоморфная функция $e(x,y)$, не равная нулю при $x = 0,\ y = 0$, и многочлен степени m

$$\omega(x,y) = \sum_{k=0}^{m} s_k(x) y^k$$

с голоморфными коэффициентами, такие, что

$$g(x,y) = e(x,y)\omega(x,y).$$

Если рассматривать $g(x,y)$ как элемент кольца $K < y >$ степенных рядов от y с коэффициентами, голоморфными при $x = 0$, то можно сформулировать эту теорему так: $g(x,y)$ может быть представлен в виде произведения обратимого элемента $e(x,y)$ и полинома $\omega(x,y)$.

Доказательство. Запишем g в виде

$$g(x,y) = y^m(1 + \sum_{\nu=0}^{m-1} g_\nu(x) y^{\nu-m} + \sum_{\nu>m} g_\nu(x) y^{\nu-m}),$$

Если обозначить

$$u = \sum_{\nu=0}^{m-1} g_\nu(x) y^{\nu-m},\ v = \sum_{\nu>m} g_\nu(x) y^{\nu-m}),\ w = u + v$$

[1] Первое доказательство этой теоремы было дано Вейерштрассом в начале 1860-х [Weierstrass K. Math. Werke. Bd. 3.], затем было предложено ряд модификаций этого доказательства, наиболее распространенное приведено у Фукса Л.Б.. Мы же приведем изящное и короткое доказательство этой теоремы, указанное Штикельбергером в 1887 году, затем надолго забытое и лишь в 1968 году возвращенное к жизни К. Зигелем [Грауэрт-Либ с. 51-53].

то

$$g = y^m(1+w)$$

где w — ряд Лорана по y, причем u — его сингулярная, а v — регулярная части. Поскольку

$$g_0(0) = \cdots = g_{m-1}(0) = 0,$$

можно так подобрать константы δ и ρ, чтобы в области

$$|x| < \delta,\ \frac{\rho}{2} < |y| < \rho$$

функция

$$u = \sum_{\nu=0}^{m-1} \frac{g_\nu(x)}{y^{m-\nu}}$$

была бы голоморфная и по абсолютному значению меньше $1/2$, а функция

$$v(x,y) = \sum_{\nu>m} g_\nu(x) y^{\nu-m})$$

была голоморфна в области

$$|x| < \delta,\ |y| < \rho$$

и тоже меньше $1/2$ по абсолютному значению.

Первое сразу следует из неравенства

$$|u| < \max_{|x|<\delta,\nu} |g_\nu(x)|((2/\rho)^m + \cdots + 2/\rho),$$

а второе — из того, что $v(x,y)$ — ряд по положительным степеням x, y и $v(0,0) = 0$.

Тогда $|w| < 1$ и вполне определено выражение

$$\ln(1+w) \equiv w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} - \dots$$

Его можно разложить в ряд Лорана по y в рассматриваемом кольце $\rho/2 < |y| < \rho$. Обозначим его регулярную часть как A, а сингулярную часть как B. Тогда, понимая под $\exp(z)$ ряд $\sum z^\nu/\nu!$, имеем

$$y^m \exp(\ln(1+w)) = y^m(1+w) = g(x,y)$$

откуда

$$g(x,y)\exp(-A) = y^m \exp(B)$$

Здесь в левой части стоит голоморфная функция в окрестности очки $x = 0,\ y = 0$, следовательно, такова и правая часть. Но поскольку

$$\exp(B) = 1 + B + \dots$$

и B содержит только отрицательные члены как сингулярная часть ряда Лорана, справа неизбежно стоит полином степени m, причем его коэффициент при y^m равен 1. Полагая

$$\omega = y^m \exp(B),\ e = \exp(A)$$

приходим к $g = e\omega$, где ω — действительно полином указанного вида, а e — голоморфная в области $|x| < \delta,\ |y| < \rho$ функция, причем $e(0,0) = \exp(A(0,0)) \neq 0$. □

2.2. Униформизация окрестности регулярной точки

Обратимся теперь локальной униформизации произвольной неприводимой алгебраической кривой

$$f(x,y) = 0.$$

Обозначив частные производные первого порядка от целой рациональной функции через $f(x,y)_1$ и $f(x,y)_2$, второго порядка — через $f(x,y)_{11},\ f(x,y)_{12},\ f(x,y)_{22}$ и т. д., по формуле Тейлора найдем

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b)_1(x-a) + f(a,b)_2(y-b) + \\ + \frac{1}{2}f(a,b)_{11}(x-a)^2 + f(a,b)_{12}(x-a)(y-b) + \frac{1}{2}f(a,b)_{22}(y-b)^2 + \dots \end{aligned}$$

Разложение $f(x,y)$ начинается с членов второй или большой степени от $x-a$ и $y-b$ только при такой точке (a,b), в которой

$$f(a,b)_1 = 0 \quad \text{и} \quad f(a,b)_2 = 0$$

Условимся называть такие точки кривой особыми. Исключим их пока из рассмотрения.

Для того, чтобы не исследовать частные случаи, когда одна из $f(a,b)_1$ и $f(a,b)_2$ равна нулю, введем вместо $x,\ y$ новые переменные $s,\ t$, положив

$$\begin{aligned} s &= f(a,b)_1(x-a) + f(a,b)_2(y-b), \\ t &= \alpha(x-a) + \beta(y-b), \end{aligned} \tag{2.1}$$

в котором константы α и β можно взять любыми, лишь бы определитель

$$\beta f(a,b)_1 - \alpha f(a,b)_2 \neq 0.$$

При этом условии преобразование задает взаимно однозначное и непрерывное соответствие между переменными x, y и s, t.

В качестве окрестности U точки (a,b) возьмем множество

$$|\alpha(x-a) + \beta(y-b)| < \delta, \quad f(x,y) = 0$$

где δ — некоторое произвольное число, значение которого мы уточним в дальнейшим так, чтобы сходились все получающиеся ряды. При линейно преобразовании (2.1) эта окрестность переходит в окрестность V вида

$$|s|\delta, \quad F(s,t) = 0,$$

где

$$F(s,t) = s + (s,t)_2 + (s,t)_3 + \cdots = 0,$$

а $(s,t)_\mu$ означает целую однородную функцию μ-ого порядка по $s,\ t$, и наоборот.

В силу подготовительной теоремы 2.1 уравнение $F(s,t) = 0$ можно записать в виде

$$[s - A(t)]e(s,t) = 0,$$

где $A(t) = \mathfrak{P}(t)$ — голоморфная в нуле функция, а $e(s,t) \neq 0$ при достаточно малых s и t. Поэтому множество всех точек (s,t), лежащих в V, аннулирует множитель $s - A(t)$, то есть это множество можно представить в виде

$$s = \mathfrak{P}(t).$$

Подставив $s = \mathfrak{P}(t)$ в преобразование, обратное к (2.1), сразу получим, что точки окрестности U представимы в виде

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t) = a - f(a,b)_2 t + \cdots = \mathfrak{P}(t), \\ y &= \psi(t) = b + f(a,b)_1 t + \cdots = \mathfrak{P}(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi(t)$, $\psi(t)$ представляют собой степенные ряды по натуральным степеням t, которые имеют вид и сходятся в K_0. Между t и точками (x, y) соответствие взаимно однозначное, поскольку $t = \alpha(x-a) + \beta(y-b)$ Стало быть, t — униформизирующая переменна. Умножая t на подходящий множитель, мы можем добиться того, чтобы эти ряды сходились в единичном круге $K_0 = \{|t| < 1\}$.

Теорема 2.2. Для любой регулярной точки (a, b) кривой $f(x, y) = 0$ найдется такая линейная функция $T(x, y) = \alpha(x-a) + \beta(y-b)$, что соотношение $t = T(x, y)$ задает взаимно однозначное соответствие между точками малой окрестности точки (a, b) и единичным кругом K_0 комплексной плоскости t, при этом все точки окрестности представимы в виде рядов

$$x = x_t = \mathfrak{P}_1(t), \quad y = y_t = \mathfrak{P}_2(t),$$

сходящихся в K_0.

2.3. Униформизация окрестности особой точки

Обратимся теперь к самому общему случаю, когда в окрестности точки (a, b) кривой $f(x, y) = 0$ разложение в ряд Тейлора для полинома f имеет вид

$$f = (x-a, y-b)_\mu + (x-a, y-y)_{\mu+1} + \ldots, \quad (\mu > 1)$$

где $(u, v)_n$ — однородные функции порядка n, а $(x-a, y-b)_\mu$ — однородная функция наименьшего порядка, не равная тождественно нулю. Если $\mu > 1$, говорят об особой точке порядка μ.

При линейном отображении

$$u = \alpha(x-a) + \beta(y-b), \quad y = \gamma(x-a) + \delta(y-b)$$

плоскости (x, y) на плоскость (u, v) окрестность точки $(x, y) = (a, b)$ переходит в окрестность точки $(u, v) = O$, а точки кривой $f(x, y) = 0$ в точки кривой

$$F(u, v) = 0;$$

при этом всегда можно подобрать коэффициенты $\alpha, \ldots$ так, чтобы в окрестности точки O

$$F(u, v) = v^\mu + g_1(u)v^{\mu+1} + \ldots,$$

где $g_1(u), \ldots$ — полиномы относительно u.

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса 2.1, в некоторой окрестности точки O, скажем

$$|u| < \delta, \quad |v| < \varepsilon,$$

уравнение $F = 0$ эквивалентно

$$v^\mu + s_1(u)v^{\mu-1} + \cdots + s_\mu(u) = 0,$$

где $s_1(u), \ldots$ — голоморфные функции. Это означает, что в рассматриваемой области O лежит μ в общем различных точек, имеющих одну и ту же координату u. При этом подразумевается, что лишь при некоторых значениях u эти точки могут совпадать. Если бы среди этих точек имелись совпадающие при всех u, то уравнения $F = 0$ и $F_v = 0$ были бы совместны при всех малых u. Но тогда их результант по v был бы тождественно равен нулю, а кривая $F = 0$ была бы составлена из нескольких кривых, одна из которых — НОД этих двух полиномов. Это, однако, невозможно в силу неприводимости рассматриваемой кривой.

Сделаем теперь т.н. квадратичное преобразование

$$\xi = u, \quad \eta = \frac{v}{u},$$

которое задает бирациональное соответствие между плоскостями (u, v) и (ξ, η), но имеет особенность вдоль прямой $u = 0$ (или $\xi = 0$) и "разрывает"окрестность этой точки. Поскольку полином $F(\xi, \xi\eta)$ можно записать как произведение ξ^μ и некоторого полинома $G(\xi, \eta)$, то между точками кривой $F = 0$, лежащими вне прямой $u = 0$, и точками кривой $G = 0$, лежащими вне прямой $\xi = 0$, имеется взаимно однозначное соответствие.

При этом младший член $(u, v)_\mu$ в F преобразуется в

$$(u, v)_\mu = (\xi, \eta\xi)_\mu = \xi^\mu (1, \eta)_\mu;$$

поскольку $(u, v)_\mu$ содержит v^μ, то полином $(1, \eta)_\mu$ имеет степень μ и старший коэффициент в нем равен единице. Значит,

$$(u, v)_\mu = \xi^\mu \prod_{i=1}^{\nu} (\eta - a_i)^{\mu_i} \quad (a_i \neq a_j)$$

и

$$G = \prod_{i=1}^{\nu} (\eta - a_i)^{\mu_i} + \xi (1, \nu)_{m+1}$$

В точке $(\xi, \eta) = (0, a_i)$ это уравнение имеем уже меньшую особенность — именно, порядка, который не превышает $\mu_i \leq \mu$.

В силу подготовительной теоремы Вейерштрасса, в окрестностях точек $(\xi, \eta) = (0, a_i)$ это уравнение эквивалентно соответственно уравнениям

$$(\eta - a_i)^{\mu_i} + g_i(\xi)(\eta - a_i)^{\mu_i - 1} + \cdots = 0.$$

Это означает, что существует такие δ' и ε', что в окрестности

$$|\xi| < \delta', \quad |\eta - a_i| < \varepsilon'$$

имеется μ_i в общем различных точек (ξ, η) кривой $G = 0$, имеющих одну и ту же координату ξ. Ограничим изменение ξ константой δ'' столь малой, чтобы

$$\delta'' \leq \min(\delta, \delta'), \quad \delta''(\max |a_i| + \varepsilon) \leq \varepsilon;$$

тогда найденным $\mu_1 + \cdots = \mu$ точкам кривой $G = 0$ отвечают точки $(u, v) = (\xi, \xi\eta)$ кривой $F = 0$, лежащих в окрестности

$$|u| < \delta'', \quad |v| = |\xi||\eta| < \delta(\max |a_i| + \varepsilon) < \varepsilon$$

точки O и имеющих одну и ту же координату ξ. Но и всего таких точек у кривой $F = 0$ имеется μ, следовательно, любую точку, лежащую в достаточно малой окрестности O, можно получить как прообраз некоторой точки кривой $G = 0$, лежащей в окрестности одной из точек $(\xi, \eta) = (0, a_i)$.

Доказанное, можно сформулировать так: если в окрестности особой точки (a, b) порядка μ кривой $f = 0$, младшая однородную функцию в ряде Тейлора для f раскладывается на множители

$$(x - a, y - b)_\mu = A \prod_{i=1}^{\nu} (g_i(x - a) - h_i(y - b))^{\mu_i}$$

то существует такое квадратичное преобразование плоскости в себя, при котором кривая переходит в кривую, на которой можно указать ν точек порядков не выше $\mu_1, \ldots \mu_\nu$, малые окрестности которых находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторой окрестностью точки (a, b).

Если все множители $(x - a, y - b)_\mu$ простые, то все точки кривой $f(x, y) = 0$, лежащие в некоторой малой окрестности точки (a, b), можно представить как объединение прообразов окрестностей μ простых точек преобразованной кривой. Коль скоро последние описываются рядами, выписанными в пред. разделе, а преобразование квадратичное, окрестность точки (a, b) описывается μ различными дугами

$$x = a + t\mathfrak{P}_{1,i}(t), \quad y = b + t\mathfrak{P}_{2,i}(t), \quad |t| < r,\ i = 1, \ldots, \mu;$$

но обратное преобразование дается как

$$t = q\xi + p(\eta - a_i) = \frac{quv + p(v - a_i v)}{v} = \frac{Px + Qy}{\alpha(x-a) + \beta(y-b)},$$

то есть не линейной, но дробно-линейной функцией.

Если среди множителей $(x-a, y-b)_\mu$ имеются кратные, то, применяя к каждой из этих точек преобразованной кривой ту же процедуру, вновь понизим порядок и в итоге за несколько шагов придем к тому же выводу: окрестность точки (a,b) описывается несколькими различными дугами

$$x = a + t\mathfrak{P}_{1,i}(t), \quad y = b + t\mathfrak{P}_{2,i}(t), \quad |t| < r,\ i = 1, \ldots;$$

но обратное преобразование дается как

$$t = T_i(x,y),$$

где T_i — некоторая рациональная функция.

Остается разобраться со случаем, когда ряд Тейлора для уравнения исходной кривой в точке (a,b) или уравнения получившейся на некотором шаге преобразованной кривой в интересующей нас точке начинается с членов, которые можно записать как некоторую степень линейной функции, и последующие квадратичные преобразования не меняют ситуацию. Это означает, что имеется уравнение вида

$$F(\xi,\eta) = C(g\xi - h\eta)^\mu + (\xi,\eta)_{\mu+1} + \cdots = 0;$$

квадратичная подстановка

$$\xi = (g + \alpha\eta_1)\xi_1, \quad \eta_{r-1} = (h + \beta\eta_1)\xi_1$$

дает

$$F(\xi,\eta) = \xi_1^\mu F_1(\xi_1,\eta_1),$$

где полином

$$F_1(\xi_1,\eta_1) = C\eta^\mu + \xi_1(g + \alpha\eta_1, h + \beta\eta_1)_{\mu+1} + \ldots,$$

по предположению, опять имеет ту же особенность, то есть

$$F_1(\xi,\eta) = C_1(g_1\xi - h_1\eta)^\mu + (\xi,\eta)'_{\mu+1} + \dots = 0;$$

и так r раз подряд. Но тогда

$$\xi_{r-1} = (g_{r-1} + \alpha_{r-1}\eta_r)\xi_r, \quad \eta_{r-1} = (h_{r-1} + \beta_{r-1}\eta_r)\xi_r$$

и далее,

$$\begin{aligned}
&\xi_{r-2} = \xi_r(g_{r-1}g_{r-2} + \dots), \quad \eta_{r-2} = \xi_r(g_{r-1}h_{r-2} + \dots)\\
&\dots\\
&\xi_1 = \xi_r(g_{r-1}g_{r-2}\dots g_1 + \dots), \quad \eta_1 = \xi_r(g_{r-1}\dots g_2h_1 + \dots)\\
&\xi = \xi_r(g_{r-1}g_{r-2}\dots g_1g + \dots), \quad \eta = \xi_r(g_{r-1}\dots g_1h + \dots)
\end{aligned}$$

причем, быть может меняя ξ и η ролями, можно добиться того, чтобы один из $g_{r-1}g_{r-2}\dots g_1g \neq 0$.

Как уже отмечалось выше, $F(\xi,\eta) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0$ могут быть совместны только при конечном наборе значений ξ, который мы исключим из рассматриваемой окрестности. Значит, их результант $R(\xi)$ не исчезает тождественно, то есть

$$R(\xi) = \xi^\lambda(c_0 + c_1\xi + \dots),$$

где $\lambda > 0$, коль скоро точка $(0,0)$ особая. Подставляя сюда выражения ξ через ξ_r и η_r, имеем

$$R(\xi) = \xi_r^\lambda R_0(\xi_r,\eta_r),$$

причем $R_0(0,0) \neq 0$.

Этот результант можно вычислить еще и другим способом. Вспомним, что существуют целые рациональные функции $P(\xi,\eta)$ и $Q(\xi,\eta)$, такие, что

$$P(\xi,\eta)F(\xi,\eta) + Q(\xi,\eta)\frac{\partial F}{\partial \eta} = R(\xi)$$

Подставим сюда

$$F(\xi,\eta) = \xi_1^\mu F_1(\xi_1,\eta_1) = \dots = (\xi_1\dots\xi_r)^\mu F_r(\xi_r,\eta_r),$$

и выражение
$$\frac{\partial F}{\partial \eta}$$
через x_r и η_r. Для нахождения последнего, заметим, что с одной стороны
$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi}(g+\alpha\eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \eta}(h+\beta\eta_1),$$
а с другой
$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1} = \mu\xi_1^{\mu-1}F_1(\xi_1,\eta_1) + \xi_1^{\mu}\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1},$$
поэтому
$$\frac{\partial F}{\partial \xi}(g+\alpha\eta_1) + \frac{\partial F}{\partial \xi}(h+\beta\eta_1) = \mu\xi_1^{\mu-1}F_1(\xi_1,\eta_1) + \xi_1^{\mu}\frac{\partial F_1}{\partial \xi_1}$$
Аналогично, с одной стороны
$$\frac{\partial F}{\partial \eta_1} = \frac{\partial F}{\partial \xi}\alpha\xi_1 + \frac{\partial F}{\partial \eta}\beta\xi_1,$$
а с другой
$$\frac{\partial F}{\partial \eta_1} = \xi_1^{\mu}\frac{\partial F_1}{\partial \eta_1},$$
поэтому
$$\frac{\partial F}{\partial \xi}\alpha + \frac{\partial F}{\partial \eta}\beta = \xi_1^{\mu-1}\frac{\partial F_1}{\partial \eta_1}.$$
Обращая эти равенства, видим, что
$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \xi_1^{\mu-1}G(\xi_1,\mu_1),$$
где G — целая рациональная функция. Применяя те же размышления r раз, придем к
$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = (\xi_1\dots\xi_r)^{\mu-1}G(\xi_r,\mu_r)$$
Подставляя это в выражения для результанта, получим
$$R(\xi) = (\xi_1\dots\xi_r)^{\mu-1}\left\{\xi_1\dots\xi_rF_rP + GQ\right\} = (\xi_r)^{r(\mu-1)}\mathfrak{P}(\xi_r,\eta_r)$$
Сравнивая это с предыдущем выражением для результанта имеем $r(\mu-1)\leq\lambda$. Значит, величина r ограничена величинами μ и λ, зависящими

только от $f(x, y) = 0$, и рано или поздно указанная процедура обязательно понизит порядок особенности.

Для того, чтобы теорема об униформизиции сохранила прежний вид, условимся считать, что особая точка указанного вида — это K особых точек с окрестностями U_k. Тогда можно утверждать следующее:

Теорема 2.3. Для любой точки (a, b) кривой $f(x, y) = 0$ найдется такая рациональная функция $T(x, y)$, что соотношение $t = T(x, y)$ задает взаимно однозначное и биголоморфное соответствие между точками малой окрестности точки (a, b) и единичным кругом K_0 комплексной плоскости t.

Отметим еще, что выбор униформизирующей переменной определен с точность до конформного преобразования круга K_0 на себя, сохраняющего неподвижным начало координат. Разумеется, такое преобразование $\tau = F(t)$ не может иметь производную, равную нулю, поэтому оно неизбежно является сходящимся в K_0 рядом вида

$$\tau = c_1 t + c_2 t^2 + \dots,$$

где $c_1 \neq 0$.

2.4. Бесконечно удаленные точки и их окрестности

Поскольку простейшие преобразования, напр.,

$$x' = 1/x, \quad y' = y$$

не переводят окрестность точки с $x = 0$ в окрестность некоторой конечной точки, удобно добавить конечным точкам (a, b) бесконечно удаленные точки: напр., точка (a, ∞) принадлежит кривой, если существует последовательность конечных точек кривой (a_n, b_n), такая, что $a_n \to a,\ b_n \to \infty$.

Окрестность точки (a, ∞) введем как открытое односвязное множество, содержащее

$$|x - a| < \delta, \quad |1/y| < \delta.$$

Нетрудно заметить, что точка (a, ∞) принадлежит кривой тогда и только тогда, когда точка $(a, 0)$ принадлежит кривой $F(x, z) \equiv f(x, 1/z)z^n = 0$. Более того, между окрестностями этой точки и бесконечно удаленной сущесвует взаимно однозначное соответствие. Поэтому теоремы (2.3) сразу приводит к тому, что окрестность бесконечно удаленной точки (a, ∞) может быть представлена как

$$x = \mathfrak{P}(t), \quad y = 1/\mathfrak{P}(t) = P(t).$$

2.5. Локальная униформизация эллиптической кривой

Под эллиптической кривой понимаю кривую

$$y^2 = P(x)$$

где $P(x)$ — полином 3-ей или 4-ой степени. Поскольку кривая

$$y^2 = x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$$

сводится (взаимно однозначной) заменой

$$x = \frac{1}{x'} + \alpha, \quad y = -\frac{y'}{(x')^2}$$

к кривой

$$y^2 = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$$

в дальнейшем мы будем рассматривать случай полинома третей степени.

Пусть нули полинома e_1, e_2, e_3 все различны. В качестве окрестности точки $(a, \sqrt{P(a)})$ возьмем множество

$$|x - a| < \delta, \quad y^2 = P(x)$$

При $a \neq e_i$ это множество может быть представлено в виде

$$x = a + t, \quad y = \sqrt{P(a+t)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

где t меняется в круге $|t| \leq \min |a - e_i| = \delta$. В случае $a = e_1$ подставим $x = e_1 + t^2$ в

$$y = \sqrt{P(x)} = \sqrt{t^2(e_1 - e_2 + t^2)(e_1 - e_3 + t^2)} = \pm t\mathfrak{P}(t)$$

Это означает, что пара функций

$$x(t) = e_1 + t^2, \quad y(t) = t\mathfrak{P}(t)$$

описывает всю рассматриваемую окрестность. В самом деле, пусть $(x_1 y_1)$ — произвольная точка из рассматриваемой окрестности. Взяв одно из двух значений $t_1 = \pm\sqrt{x_1 - e_1}$ и вычислив $(x(t_1), y(t_1))$, получим точку (x_1, y_2), лежащую на кривой $y^2 = P(x)$. Поэтому y_2 или равен y_1, или $-y_1$. Поменяв выбор корня при вычислении t_1 мы и во втором случае получим $y(t_1) = y_1$. Поэтому любая точка окрестности представима в виде $(x(t), y(t))$, при этом выбор t предрешен однозначно. Таким образом, $(e_i, 0)$ — особая точка.

Если x стремиться к бесконечности, то таково и y, и наоборот. Поэтому все бесконечно удаленные точки имеют вид (∞, ∞). Подставим $x = 1/t^2$ в

$$y = \sqrt{P(x)} = \sqrt{(1 - t^2 e_1)(1 - t^2 e_2)(1 - t^2 e_3)/t^6} = t^{-3}(1 - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{2} t^2 + t^4 \mathfrak{P}(t))$$

Значит, при всех достаточно больших x все соответствующие y описываются так

$$y = t^{-3}(1 - \frac{e_1 + e_2 + e_3}{2} t^2 + t^4 \mathfrak{P}(t)), \quad \text{где } x = t^{-2}$$

Значит, у эллиптической кривой существует одна бесконечно удаленная точка.

Глава 3

Теория главной функции

При построении теории абелевых интегралов так или иначе стремятся следовать аналогии, существующей между рациональными функциями одного x и рациональными функциями на кривой. Поскольку аналогия не полная, то здесь возможны различные подходы. Мы последует за Вейерштрассом, который положил в основу обобщение теории элементарных дробей.

3.1. Рациональные функции одной переменной и пары (xy)

Для вейерштрассовской теории алгебраических функций существенна аналогия, которую можно проследить между просто рациональными функциями $R(x)$ и рациональными функциями $R(xy)$ на алгебраической кривой. Первейшая теорема теории рациональных функций гласит: *рациональная функция принимает любое заданное значение a с учетом кратности m раз, причем число m (т.н. степень (grad) рациональной функции) не зависит от a.* Для распространения этой теоремы на рациональные функции на алгебраической кривой нужно ввести понятие кратности.

Определение 3.1. Говорят, что рациональная функция $R(xy)$ принимает значение r кратности s в точке (a, b) алгебраической кривой $f(x, y) = 0$, если при подставное пары функция (x_t, y_t), униформизирующей окрестность точки (a, b) в $R(x, y)$ получим

$$R(x_t, y_t) = r + c_1 t^s + \dots$$

где $c_1 \neq 0$. Рациональная функция $R(x, y)$ обращается в точке (a, b) в бесконечность порядка s, если при подставное пары функция (x_t, y_t), униформизирующей окрестность точки (a, b) в $R(x, y)$ получим

$$R(x_t, y_t) = c_1 t^{-s} + \dots.$$

При этом, разумеется, не важно, представляет ли (x_t, y_t) элемент, центр которого конечен или бесконечен.

Мы будем предполагать далее, что кривая $f(x, y) = 0$ неприводима, тогда не может быть нулей бесконечной кратности, поскольку это означало бы, что $R(x, y)$ тождественно равно r в окрестности некоторой точки кривой. Иными словами, уравнения

$$R(x, y) = r, \quad f(x, y) = 0$$

имели бы бесконечно много совместных решений. Если кривая неприводима, это означает, что $R(x, y) - r$ делится на $f(x, y)$, то есть $R(x, y) = r + f(x, y)\varPhi(x, y)$. Понятно, что такую функцию пары мы считаем просто константой.

Пусть функция $R(xy)$ принимает значение r в σ точках $(x_1, y_1), \dots$ с кратностями $s_1, \dots s_\sigma$. Выясним, в скольких точках функция $R(xy)$ принимает значение $r + \varepsilon$, если ε меняется вдоль произвольной кривой на ε-плоскости. Если (x_t, y_t) описывает окрестность одной из этих точек, скажем (x_1, y_1), то

$$R(x_t, y_t) = r + c_1 t^{s_1} + \dots.$$

Уравнение

$$c_1 t^{s_1} + \dots = \varepsilon$$

или

$$c_1 t(1+\mathfrak{P}(t)) = \sqrt[s_1]{\varepsilon}$$

имеет при достаточно малых $|\varepsilon|$ в точности s_1 корень и все они даются одним выражением

$$t = \mathfrak{P}(\sqrt[s_1]{\varepsilon})$$

Следовательно, $R(xy)$ принимает значение $r+\varepsilon$ в $s = s_1+s_2+\ldots$ различных точках с кратностью 1.

Допустим, что при некотором $\varepsilon = \varepsilon_0$ число таких точек увеличивается, что происходит скачком. Это может произойти двумя способами: или при ε_0 имелось s точек, а при всех больших (в смысле положения на кривой) ε стало $s+1$, или при всех ε, меньших ε_0 было s точек, а при ε_0 их стало $s+1$. И то, и другое невозможно, поскольку в силу доказанного в окрестности точки $\varepsilon = \varepsilon_0$ имеется одно и тоже число нулей уравнения $R(xy) = r+\varepsilon$. Таким образом, *число точек, в которых $R(xy)$ имеет значение r, с учетом кратности не зависит от выбора r. Это число называют степенью (grad) рациональной функции $R(xy)$.*

Второе важнейшее предложение теории рациональных функций одной переменной состоит в возможности разложение произвольной функции на элементарные дроби. Один из способов его доказательства опирается на теорему о вычетах: если $F(x)$ — рациональная функция, то

$$[F(1/t)]_t = \sum [F(a_\nu + t)]_{t^{-1}}, \tag{3.1}$$

где a_ν — все полюса $F(x)$.

Сказанное является переформулировкой теоремы Коши. В самом деле, пусть $\mathfrak{C}$ — контур на плоскости x, содержащий все точки a_ν внутри себя, то по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} F(x)dx = \sum [F(a_\nu + t)]_{t^{-1}}$$

а с другой стороны

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}} F(x)dx = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}'} F(1/y)\frac{dy}{y^2}$$

где $\mathfrak{C}'$ — контур, получающийся из $\mathfrak{C}$ после замены x на y. Так как контур $\mathfrak{C}$ обходит $x = 0$ по часовой стрелки, $\mathfrak{C}'$ обходит $y = 0 = 1/\infty$ против часовой стрелки, поэтому последний интеграл равен

$$+[F(1/t)t^2]_{t^{-1}} = [F(1/t)]_t$$

Объединяя два полученных выражения, получим доказываемое (3.1).

Соотношение (3.1) можно записать еще так

$$\sum [F(x_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0, \tag{3.2}$$

где x_t пробегает все элементы "кривой"$x = y$, в том числе и бесконечно удаленный. В самом деле, число членов в этой сумме конечно, и более того, вклад в сумму дают лишь элементы с центром в $x = a_\nu$, то есть в полюсе $F(x)$, и, быть может, бесконечно удаленный элемент. Элементы с центром в $x = a_\nu$ имеют вид

$$x_t = a_\nu + t,$$

а бесконечно удаленный элемент

$$x_t = t^{-1}.$$

Подставляя эти выражения в (3.2), получим в точности (3.1).

Замечательно то, что соотношение (3.2) прямо переносится на случай произвольной алгебраической кривой:

Теорема 3.1. Для любой рациональной функции $F(xy)$ на неприводимой кривой $f(x, y) = 0$ справедливо соотношение

$$\sum [F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0, \tag{3.3}$$

где (x_t, y_t) пробегает все элементы кривой, в том числе и бесконечно удаленные.

Если $(x_t y_t)$ описывают окрестность точки (ab), то число

$$[F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

независим от выбора униформизующей переменной t и называется вычетом функции $F(x_t y_t)$ в точке (ab). Теорема, стало быть, утверждает, что сумма вычетов рациональной функции пары (xy) равна нулю.

Доказательство. В выражении

$$F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}$$

отрицательные степени t могут встретиться лишь в двух случаях: когда центр (x_t, y_t) — полюс $F(xy)$ и когда производная x_t по t содержит отрицательные степени. Последнее возможно только при бесконечно удаленных элементов с центром $x = \infty$, число которых конечно. Значит, написанная сумма конечна.

Пусть $a_1, \ldots, a_m, \infty$ — все значения x, при которых $F(x, y)$ обращается в бесконечность хотя бы при одном возможном выборе y.

Обозначая вновь как n степень $f(x, y)$ по y, видим, что значению $x = a_\nu$ отвечает n в общем различных значений $y = b_\nu^{(k)}$, то центр вида (a_ν, b) имеют n неэквивалентных элементов вида

$$x_t = a_\nu + t, \quad y_t = P_k(t), \quad k = 1, \ldots n.$$

Тогда сумма

$$\sum[F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

по этим n элементам может быть перепимана так

$$[\sum_k F(a_\nu + t, P_k(t))]_{t^{-1}}$$

Но это ни что иное, как вычет фукнции

$$F(x) = \sum_k F(x, y^{(k)})$$

в точке $x = a_\nu$, причем эта функция является рациональной функцией одного x, поскольку она зависит от корней $f(x, y) = 0$ симметричным образом.

Если же значению $x = a_\nu$ отвечают кратные корни $f(a_\nu, y) = 0$, то все сказанное остается в силе. В самом деле, рассмотрим вычет функции

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} F(x, y^{(k)})$$

Тепрь число k элементов вида (a_ν, b) меньше n и они имеют вид

$$x_t^1 = a_\nu + t^{\sigma_1}, \quad y_t^1 = P_1(t), \ldots$$

При $\tau \neq 0$ одному значению $x = a_\nu + \tau$ отвечают n различных значений y. С другой стороны заданному $x_t^1 = a_\nu + \tau$ отвечает σ_1 различных значений t, а значит, σ_1 значений y_t^1, причем все эти значения получаются, если в выражении

$$P_1(\sqrt[\sigma_1]{\tau})$$

подставить σ_1 значений корня $\sqrt[\sigma_1]{\tau}$. Эти значения различны, поскольку соответствие между точками алгебраической кривой и t взаимно однозначное. Проделывая то же с остальными $k - 1$ парами функций, получим $\sigma_1 + \cdots + \sigma_k$ различных значений y. Если $\sigma_1 + \cdots + \sigma_k < n$, то имеются еще точки кривой $(x, y(x))$ при любом x, сколь угодно близком к a_ν. Выделяя последовательность x_n, сходящуюся к a_ν, так, чтобы $y(x_n)$ имело конечный или бесконечный передел, получим еще одну неучтенную точку кривой вида (a_ν, y), что невозможно. Поэтому $\sigma_1 + \cdots + \sigma_k = n$ и вычет $F(x)$ равен

$$\sum_{r=1}^{k} \sum [F(a_\nu + \tau, P_r(\sqrt[\sigma_r]{\tau}))]_{\tau^{-1}}$$

где внутренняя сумма берется по всем возможным значениям корня $\sqrt[\sigma_r]{\tau}$. Но выражение

$$\sum[F(a_\nu+\tau, P_r(\sqrt[\sigma_r]{\tau}))]_{\tau^{-1}} = \sigma_r[F(a_\nu+t^{\sigma_r}, P_r(t)]_{t^{-\sigma_r}},$$

которое в свою очередь равно

$$[F(a_\nu+t^{\sigma_r}, P_r(t)\frac{dt^{\sigma_r}}{dt}]_{t^{-\sigma_r}}.$$

Поэтому вычет $F(x)$ в точке $x = a_\nu$ равен вновь

$$\sum[F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

по элементам с центрами вида (a_ν, b).

Применяя преобразование $z = 1/x$ совершенно аналогично обнаружим, что сказанное верно и для $a = \infty$. Поэтому доказываемое соотношение сразу следует из (3.1). □

3.2. Главная функция

Используя соотношение (3.2) нетрудно разложить любую рациональную функцию на элементарные дроби

$$H(x, x') = \frac{1}{x'-x} - \frac{1}{x'-x_0},$$

где x_0 — некоторое фиксированное число (обычно берут $x_0 = \infty$). Тогда

$$\sum[F(x_t)H(x, x_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0$$

или

$$F(x) - F(x_0) = -\sum{}'[F(x_t)H(x, x_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

где суммирование ведется по всем полюсам $F(x)$. Если все полюса F простые, то

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{m} A_k H(x, a_k) \tag{3.4}$$

что и выражает разложение F на элементарные дроби, а если у $F(x)$ имеются кратные полюса, то в это выражение войдут также производные $H(x)$.

С точки зрения теории функций элементарная дробь — рациональная функция, обращающаяся в бесконечность первого порядка (∞^1) лишь в одной точке x'. Прямым аналогом такой функции в случае рациональной функции пары (xy) будет рациональная функция $F(xy, x'y')$, которая обращается в бесконечность в одной заданной точке $(x'y')$, причем с порядком, равным единице. Попытка построения такой функции приведет нас к центральному объекту теории абелевых интегралов — главной функции.

Пусть f — полином степени n по y и m — по x. Мы можем построить функцию, обращающуюся в бесконечность в заданной точке (x', y') и в еще $(m-1)n$ точках. При этом мы будем пока предполагать, что точка (x', y') — регулярная точка кривой и $f(x'y')_2 \neq 0$.

Функция

$$f(xy, y') = \frac{f(x, y')}{y - y'}$$

равна

$$\begin{aligned}\frac{f(x, y') - f(x, y)}{y - y'} &= f_0(x)\frac{y'^n - y^n}{y' - y} + f_1(x)\frac{y'^{n-1} - y^{n-1}}{y' - y} + \cdots + f_{n-1}(x) = \\ &= f_0(x)y'^{n-1} + f_1(x, y)y'^{n-2} + \cdots + f(x, y),\end{aligned}$$

где f_k — некоторые полиномы от своих аргументов, то есть не обращается в бесконечность ни при каком конечном x. Раз точка (x', y') неособенная, то, во-первых, уравнение $f(x', z) = 0$ имеет ровно n различных корней z_k, один из которых мы обозначили как y', а во-вторых, окрестность точки (x', y') дается как

$$x_t = x' + t, \quad y_t = y' + t\mathfrak{P}(t)$$

Поскольку функция $f(xy, y')$ не имеет особенностей в конечных точках, то

$$f(x_t y_t, y') = \left.\frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y}\right|_{x=x', y=y'} + t\mathfrak{P}(t) = f(x'y')_2 + t\mathfrak{P}(t),$$

откуда
$$\frac{f(x_t y_t, y')}{x' - x_t} = -f(x'y')_2 t^{-1} + \mathfrak{P}(t).$$
Это означает, что функция
$$\frac{f(xy, y')}{x' - x}$$
имеет в точке (x', y') полюс первого порядка. Она не обращается в бесконечность ни при $x = x'$, а y, равном другому корню $f(x', z) = 0$, ни при каком либо другом конечном x. Чтобы избежать полюсов в бесконечно удаленных точках рассмотрим
$$F(xy, x'y') = \frac{f(xy, y')}{(x' - x)} \frac{(x' - a_1) \dots (x' - a_{m-1})}{(x - a_1) \dots (x - a_{m-1})} \tag{3.5}$$
Эта функция обращается в бесконечность кратности 1 в точке $(x'y')$ и еще в $l = (m-1)n$ точках $x = a_k$. Поделив ее на $f(x', y')_2 \neq 0$, получим функцию с вычетом, равным 1 в точке (x', y').

Обозначим точки $x = a_k$ как $(a_1, b_1), \dots (a_l, b_l)$. Предположим, что существует функция $G_1(x, y)$, обращающаяся в бесконечность первого порядка разве только в этих точках, тогда можно подобрать константу C_1 так, чтобы $F(xy, x'y') - C_1 G_1(x, y)$ обращалась в бесконечность только при $(x'y')$ и еще при $l - 1$ точке. При этом C_1 зависит от $(x'y')$ и, именно, является целой рациональной функцией от этой точки, например, если мы уничтожаем полюс (a_1, b_1),
$$C_1 = f(a_1 b_1, y') \frac{(x' - a_1) \dots (x' - a_{m-1})}{(a_1 - a_1) \dots (a_1 - a_{m-1})}. \tag{3.6}$$
Применяя к $F(xy, x'y') - C_1 G_1(x, y)$ те же размышления, мы в итоге понизим число l до некоторого числа ρ точек (a_k, b_k), для которых не существует рациональной функции, обращающейся в бесконечность первого порядка разве только в этих точках.

Уклонившись пока от вопроса, может ли $\rho \neq 0$, условимся о следующем.

Определение 3.2. Рациональную функцию $H(xy, x'y')$ называют главной, если она обращается в ∞^1 в произвольной заданной точке $(x'y')$ с вычетом -1, и еще в некоторых точках $(a_1, b_1), \ldots, (a_\rho, b_\rho)$, причем не существует функции степени ρ конечной при всех точках, отличных от этих $(a_1 b_1), \ldots (a_\rho b_\rho)$.

Поэтому предыдущей результат можно сформулировать так:

Теорема 3.2. Для любой заданной неособенной точки (x', y') можно построить главную функцию. По построению эта функция имеет вид

$$H(xy, x'y') = \left[\frac{f(xy, y')}{(x' - x)} \frac{(x' - a_1) \ldots (x' - a_{m-1})}{(x - a_1) \ldots (x - a_{m-1})} + \sum C_k(x'y') G_k(x, y)\right] \frac{1}{f(x', y')_2}, \tag{3.7}$$

где $C_1, \ldots$ даются выражениями (3.6).

3.3. Разложение в ряд для главной функции

Вспоминая происхождение функций, фигурирующих в (3.7), видим, что главная функция зависит и от $(x'y')$ рационально. Более того, поскольку C_k — целые, то главная функция как функция $(x'y')$ она имеет вид

$$H(xy, x'y') = \frac{E(x'y')}{(x - x')f(x', y')_2}$$

где $E(x'y')$ — целая рациональная функция $(x'y')$, коэффициенты которой зависят от (xy) рационально. Это позволяет рассматривать главную функцию как рациональную функцию двух аргументов (xy) и $(x'y')$. При этом для разложения по главным функциям произвольной рациональной функции на основании теоремы о вычетах важно знать не поведение $H(xy, x_\tau y_\tau)$, а "дифференциала" $H(xy, x_\tau y_\tau)dx_\tau$. Поэтому наша ближайшая задача состоит в том, чтобы разложить выражение

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$$

в степенной ряд по t и τ.

Пусть пары функций $(x_t y_t)$ описывает окрестность некоторой точки (ab), а пара $(x_\tau y_\tau)$ — некоторой точки $(a'b')$. При этом мы допускаем, что эти точки могут быть особыми, или бесконечно удаленными, или даже совпадать с друг другом. Выражение (3.7) состоит из слагаемого вида

$$\frac{f(xy,y')}{(x'-x)}\frac{(x'-a_1)\dots(x'-a_{m-1})}{(x-a_1)\dots(x-a_{m-1})}\frac{1}{f(x',y')_2}, \tag{3.8}$$

и слагаемых вида

$$C_k(x'y')G_k(x,y)\frac{1}{f(x',y')_2}, \tag{3.9}$$

Подстановка во второе слагаемое $(xy)=(x_t y_t)$ и $(x'y')=(x_\tau y_\tau)$ и умножение на $\frac{dx_\tau}{d\tau}$, приведет к выражению вида

$$P(t,\tau),$$

то есть ряду по целым степеням t и τ, содержащим быть может конечное число отрицательных степеней.

Если величины $a\neq a'$ и конечны, то

$$\frac{1}{x_\tau-x_t}=\frac{1}{a'-a+c_1t+c_2\tau+\dots}=\mathfrak{P}(t,\tau)$$

и значит, первое слагаемое тоже имеет вид $P(t,\tau)$. Если величина $a=\infty$, а a' — конечна, тогда

$$\frac{1}{x_\tau-x_t}=\frac{1}{x_t}+\frac{x_\tau}{x_t^2}=P(t,\tau)$$

и аналогично при $a'=\infty$, а a — конечна. Наконец, если значения a и a' совпадают и конечны, то

$$x_t=a+t^\mu,\quad x_\tau=a+t^\nu$$

и поэтому

$$\frac{1}{x_\tau-x_t}=\frac{1}{\tau^\mu-t^\nu}$$

и все первое слагаемое имеет вид

$$\frac{P(t,\tau)}{\tau^\mu - t^\nu}$$

а если величины a и a' обе бесконечно велики, то

$$\frac{1}{x_\tau - x_t} = -\frac{1}{\frac{1}{x_\tau} - \frac{1}{x_t}} \frac{1}{x_t x_\tau}$$

что возвращает нас к рассмотренным выше случаям, поскольку ряды имеют вид

$$x_t^{-1} = P(t).$$

Итак, в любом случае верно

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \frac{1}{\tau^\mu - t^\nu} P_1(t,\tau) + P(t,\tau) \tag{3.10}$$

где $\varepsilon = 1$, если a и a' совпадают, и равно нулю в противном случае.

С другой стороны, даже если (ab) особая или бесконечно удаленная точка, всегда можно считать, что $(x_t y_t)$ и $(x_\tau y_\tau)$ при $t \neq 0$ и $\tau \neq 0$ — неособые, конечные и отличные от $(a_1 b_1), \dots (a_\rho b_\rho)$. Поэтому при некотором малом фиксированном τ функция $H(xy, x_\tau y_\tau)$ является главной, а, значит, эта функция имеет полюса только в точке $(x_\tau y_\tau)$ и точках $(a_1 b_1), \dots (a_\rho b_\rho)$. Поэтому

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$$

неограниченна лишь тогда, когда $(x_t y_t) = (x_\tau y_\tau)$ или $(x_t y_t) = (a_\alpha b_\alpha)$.

Если пары $(x_t y_t)$ и $(x_\tau y_\tau)$ различны, то существует такая константа C, независящая от τ, что при всех $|t| < C$ равенство $(x_t y_t) = (x_\tau y_\tau)$ невозможно. Если центр $(x_t y_t)$ отличен от $(a_1 b_1), \dots$, то при всех малых t невозможно и $(x_t y_t) = (a_\alpha b_\alpha)$. Поэтому выражение

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}$$

не может обратиться в бесконечность при всех $|t| < C$ и фиксированном τ.

Это означает, что в соотношении (3.10) при $\varepsilon = 0$ ряд $P(t, \tau)$ не может содержать отрицательных степеней t. Если же $\varepsilon = 1$, то ряд $P_1(t, \tau)$ должен делиться на $t^\mu - \tau^\nu$. В противном случае, в выражении (3.10) первый член обращается в бесконечность при $t = \sqrt[\mu]{\tau^\nu}$, а второй — $P(t, \tau)$ — разве только при $t = 0$. При достаточно малых τ эти полюса попадают в область $|t| < C$, что невозможно. Значит, и в случае $\varepsilon = 1$ ряд (3.10) на самом деле имеет вид $P(t, \tau)$. При этом опять он не может содержать отрицательные степени t.

Если же $(x_t y_t)$ и $(x_\tau y_\tau)$ описывают окрестность одной и той же точки $(ab) = (a'b')$, то равенство $(x_t y_t) = (x_\tau y_\tau)$ возможно, но лишь тогда, когда $t = \tau$. Значит, выражение

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

как функция малых t имеет простой полюс при $t = \tau$ и более ни где. С другой стороны в выражении (3.10) в данном случае $\varepsilon = 1$ и $\mu = \nu$. Поскольку ряд $P(t, \tau)$ полюса $t = \tau$ дать не может, $P_1(t, \tau)$ не делится на множитель $t - \tau$ полинома $t^\nu - \tau^\nu$, но делится на все прочие его множители:

$$\frac{P_1(t, \tau)}{t^\nu - \tau^\nu} = \frac{P_2(t, \tau)}{\tau - t}$$

Далее, окрестность точки $(x_\tau y_\tau)$ можно представить в виде переразложения $(x_t y_t)$ по степеням $t' = t - \tau$. При этом

$$\left.\frac{dx_t}{dt}\right|_{t=\tau} = \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

и поэтому вычет

$$[H(x_{t'} y_{t'}, x_\tau y_\tau) \frac{dx_{t'}}{dt'}]_{t'^{-1}}$$

равен $-P_2(\tau, \tau)$, а по определению главной функции он равен -1, то есть $P_2(\tau, \tau) \equiv 1$. Поэтому

$$\frac{P_1(t, \tau)}{t^\nu - \tau^\nu} = \frac{1 + \mathfrak{P}_1(\tau)(t - \tau) + \ldots}{t - \tau}$$

и

$$H(x_ty_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + \mathfrak{P}(t,\tau)$$

где ряд $P(t,\tau)$ не может иметь отрицательных степеней t.

Если (x_ty_t) описывает окрестность одной из точек (a_1b_1), то все сказанное остается в силе, только ряд $P(t,\tau)$ в этом случае содержит отрицательную степень t^{-1}, поскольку выражение (3.10) должно иметь простой полюс при $t=0$. Тем самым доказано, что

$$H(x_ty_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon\frac{1}{\tau-t} + P(t,\tau)$$

где $P(t,\tau)$ имеет полюса только в точках $(a_1b_1),\ldots(a_\rho b_\rho)$ и при том первого порядка.

Для исследования зависимости ряда $P(t,\tau)$ от τ, заметим, что выражение

$$F_k(xy) = \left[H(xy, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^{-k}}$$

как функция пары (xy) является рациональной, если выпустить значение $(xy)=(a'b')$. В самом деле, из выражение (3.7) видно $F_k(xy)$ есть сумма функций $G_p(x,y)$ с некоторыми числовыми коэффициентами и $-k$-ый коэффициент в разложении

$$\frac{1}{(x-a_1)\ldots(x-a_{m-1})}\frac{f_0(xy)y_\tau^{n-1}+\ldots f_{n-1}(xy))(x_\tau-a_1)\ldots(x_\tau-a_{m-1})}{(x_\tau-x)}\frac{dx_\tau/d\tau}{f(x_\tau,y_\tau)_2}$$

по степеням τ. Если $(a'b')$ — конечная точка, то

$$\frac{1}{x-x_\tau} = \frac{1}{x-a'}\left(1+\frac{\tau}{x-a'}+\ldots\right)$$

и коэффициенты этого ряда даются одним и тем же выражением при всех $x \neq a'$. То же верно и для любой бесконечно удаленной точки. Значит, $F_k(xy)$ — рациональная функция. При $x=a'$ доопределим ее соответствующим предельным значением.

Поскольку для любого $t \neq 0$ верно

$$\frac{1}{\tau - t} = \frac{1}{t}(1 - \frac{\tau}{t} + \dots)$$

можно утверждать, что

$$[\frac{1}{\tau - t}]_{\tau^{-k}} = 0.$$

Значит, по только что доказанному

$$F_k(x_t y_t) = 0 + P(t)$$

где $P(t)$ содержит отрицательные степени t только тогда, когда центр $(x_t y_t)$ совпадет с одной из точек $(a_1, b_1), \dots$. Значит, $F_k(xy)$ — рациональная функция, обращающаяся в ∞^1 разве только в точках $(a_1, b_1), \dots$, что возможно лишь тогда, когда $F_k(xy)$ не зависят от (xy). Это означает, что в разложении

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon\frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau)$$

коэффициенты при отрицательных степенях τ суть числа, которые не зависят ни от t, ни даже от выбора центра (a, b). Но тогда, взяв произвольный элемент $x_\gamma y_\gamma$, будем иметь

$$(H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) - H(x_\gamma y_\gamma, x_\tau y_\tau))\,\frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon\frac{1}{\tau - t} - \varepsilon''\frac{1}{\tau - \gamma} + \mathfrak{P}(t, \tau, \gamma).$$

Полагая $\gamma = 0$ и замечая, что разность

$$\overline{H}(xy, x'y') = H(xy, x'y') - H(x''y'', x'y')$$

сама является главной функцией, получаем:

Теорема 3.3. Существует главная функция $H(xy, x'y')$, которая обращается в нуль в заданной точке $(xy) = (x''y'')$ и при этом для справедливо разложение

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon\frac{1}{\tau - t} + P(t, \tau)$$

где ε равно единице, если пары $(x_t y_t)$ и $(x_\tau y_\tau)$ совпадают, ряд $P(t,\tau)$ содержит отрицательные степени t только тогда, когда центр $(x_t y_t)$ совпадет с одной из точек $(a_1 b_1), \ldots$ и содержит отрицательные степени τ только тогда, когда центр $(x_\tau y_\tau)$ совпадет с $(x'' y'')$. При этом в него входит лишь -1-ая степени и точку $(x'' y'')$ можно выбрать произвольным образом.

3.4. Жанр алгебраической кривой

Построенная выше главная функция $H(xy, x'y')$ имеет $\rho+1$ простой полюс. Допустим, что $H'(xy, x'y')$ другая главная функция, которая обращается в ∞^1 в $(x'y')$ и еще в ρ' точках $(a_1' b_1'), \ldots, (a_{\rho'}' b_{\rho'}')$. Выясним, может ли ρ' отличаться от ρ. Допустим, что $\rho' > \rho$. Среди точек $(a_1 b_1), \ldots, (a_\rho b_\rho)$ и $(a_1' b_1'), \ldots, (a_{\rho'}' b_{\rho'}')$ могут быть равные. Будем считать, что совпадают только первые r точек. Тогда функция

$$F(xy) = \sum_{i=r+1}^{\rho'} C_i H(xy, a_i' b_i')$$

при любых постоянных C_i обращается в бесконечность только в точках $(a_1' b_1'), \ldots, (a_{\rho'}' b_{r'}')$ и еще разве в точках $(a_{r+1} b_{r+1}), \ldots, (a_\rho b_\rho)$. При этом все особенности являются полюсами первого порядка. Только константы C_i можно подобрать так, чтобы $F(xy)$ не имела полюсов в точках $(a_{r+1} b_{r+1}), \ldots, (a_\rho b_\rho)$. В самом деле, обозначая

$$[H(x_t y_t, ab)]_{t^{-1}} = H(ab)_i$$

в случае, когда $(x_t y_t)$ описывает окрестности точки $(a_i b_i)$, условие обращения вычета $F(xy)$ в точке $(a_i b_i)$ в нуль можно записать как

$$\sum_{j=r+1}^{\rho'} C_j H(a_j' b_j')_i = 0$$

Значит, определяя $\rho' - r$ констант C_i из $\rho - r$ однородных линейных уравнений

$$\sum_{j=r+1}^{\rho'} C_j H(a'_j b'_j)_i = 0 \quad (i = r+1, \ldots, \rho),$$

что всегда возможно, поскольку число неизвестных меньше числа уравнений, мы получим функцию $F(xy)$ обращающуюся в ∞^1 только в ρ' точках $(a'_1 b'_1), \ldots, (a'_{\rho'} b'_{\rho'})$, что невозможно. Значит, $\rho' \leq \rho$. Меняя главные функции ролями, покажем невозможность и $\rho > \rho'$. Поэтому число ρ не зависит от выбора точек $a^{(1)}, \ldots$ при построении главной функции.

Теорема (3.3) позволяет охарактеризовать число ρ и по другому. Пусть $F(xy)$ — рациональная функция и все ее полюса — точки $(x_1 y_1), \ldots, (x_r y_r)$ — ее простые полюса. Возьмем главную функцию, для которой точки $(a_1 b_1), \ldots$ и $(x'' y'')$, возникших при построении этой функции, отличны от полюсов $F(xy)$. Тогда в силу теоремы о вычете

$$\sum [F(x_t y_t) H(xy, x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0$$

Слагаемые этой суммы отличны от нуля только тогда, когда $(x_t y_t)$ описывает окрестность точек $(x_1 y_1), \ldots, (x_r y_r)$ или точек (xy) и $(x'' y'')$. При этом член суммы, отвечающий паре $(x_t y_t)$, описывающей окрестность $(x_i y_i)$, равен

$$H(xy, x_i y_i) C_i,$$

где C_i — вычет $F(xy)$ в точке $(x_i y_i)$, член отвечающий паре $(x_t y_t)$, описывающей окрестность (xy), равен

$$F(xy)$$

наконец, член, отвечающий паре $(x_t y_t)$, описывающей окрестность $(x'' y'')$, равен

$$-F(x'' y'').$$

Поэтому, если существует рациональная функция, все полюса которой — точки $(x_1y_1), \dots, (x_ry_r)$ — простые, то она представима в виде

$$F(xy) = C_0 + \sum_{i=1}^{r} C_i H(xy, x_iy_i),$$

где C_i — некоторые константы.

Наоборот, пусть заданы точки $(x_1y_1), \dots, (x_ry_r)$ и требуется построить функцию $F(xy)$, имеющую простые полюса только в этих точках, а кроме них всюду конечную. По предыдущему, мы вынуждены искать ее в виде

$$F(xy) = C_0 + \sum_{i=1}^{r} C_i H(xy, x_iy_i),$$

где константы C_i нужно подчинить ρ условиям необращения в бесконечность при $(xy) = (a_ib_i)$. Эти условия запишем так

$$\sum H(x_1y_1)_i C_i = 0, \cdots \sum H(x_ry_r)_i C_i = 0$$

Таким образом, искомая функция существует тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} H(x_1y_1)_1 & \dots & H(x_ry_r)_\rho \\ \dots & \dots & \dots \\ H(x_1y_1)_1 & \dots & H(x_ry_r)_\rho \end{pmatrix} \leq \rho \tag{3.11}$$

Если $r > \rho$, то такая функция всегда существует, если же $r \leq \rho$, то такая функция существует лишь тогда, когда $(x_1y_1), \dots$ удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям, а именно условию обращению в нуль миноров выписанной матрицы. Эти соотношения не есть тривиальные тождества, поскольку если взять за $(x_1y_1), \dots$ полюса какой либо главной функции, то нельзя найти подходящую функцию $F(xy)$.

Сказанное позволяет охарактеризовать число ρ так: если задано r произвольных точек $(x_1y_1), \dots, (x_ry_r)$ и $r > \rho$ то всегда существует функция, имеющая простые полюса разве что в этих точках и кроме них всюду конечная, если же число $r \leq \rho$, то такая функция существует лишь тогда, когда заданные точки удовлетворяют некоторым алгебраическим соотношениям. Теперь совсем понятно, что число ρ характеризует свойства самой алгебраической кривой $f(x, y) = 0$. Его называют *жанром* кривой.[1]

3.5. Построение рациональной функции с заданными полюсами

Построение функции с полюсами предписанных порядков не многим сложнее. Построим сначала функцию, обращающуюся в точке (a, b) в бесконечность заданного порядка. Пусть пара (x_τ, y_τ) — описывает окрестность точки (a, b). Зная главную функцию $H(xy, x'y')$, можно найти коэффициенты разложения

$$H(xy, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = -\sum_{n=0}^{\infty} H(xy, ab)_n \tau^\mu, \tag{3.12}$$

полагая (x, y) — произвольной точкой кривой. Коэффициенты $H(xy, ab)_m$ являются рациональными функциями своих аргументов. Подставляя в (3.12) вместо (x, y) пару (x_t, y_t) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} H(x_t y_t, ab)_n \tau^\mu = -H(xy, x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{t-\tau} + P(t, \tau)$$

[1]Вейерштрасс называет это число рангом (Rang). В начале 20 века большинство немецких авторов называли его родом (Geschlecht), французские и итальянские авторы — жанром (ganre и genere соответственно), затем утвердилось англоязычное genus. К несчастью, в русской литературе этот термин традиционно переводится как род, то есть также как род (Art) абелева интеграла, что приводит к путанице.

Теорема Римана-Роха является двойственным к сделанному утверждению и сразу следует из теоремы о базисном миноре: совокупность всех функций обращающихся в бесконечность разве лишь в заданных r точках $(x_1, y_1), \dots$ зависит от $r + 1 - i$ параметров, где i — число параметров, от которых зависит множество кривых вида

$$\sum_{j=1}^{\rho} C'_j H(x, y)_j = 0,$$

проходящих через точки $(x_1, y_1), \dots$.

в обозначениях теоремы 3.3. Отсюда, разлагая по τ при фиксированном t, имеем

$$H(x_t y_t, ab)_n = \varepsilon t^{-(n+1)} + P(t),$$

Иными словами, $H(xy, ab)_n$ как функция (x, y) имеет полюс $n+1$ порядка в точке (a, b) и еще ρ простых полюсов (a_i, b_i), а в прочих точках конечна.

Пусть даны точки $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ и натуральные числа $r_1, \ldots r_m$ и требуется построить все рациональные функции, которые обращаются в бесконечность только в точках $(x_1, y_1), \ldots, (x_m, y_m)$ с порядками $r_1, \ldots r_m$, а в прочих точках принимают конечные значения.

Допустим, что одна такая функция существует и обозначим ее как $F(xy)$. Будем считать, что (x_i, y_i) отличны от особенностей (a_j, b_j) используемой главной функции, что не ограничивает общности рассмотрения. Тогда можно подобрать константы $C_{i,j}$ так, что выражение

$$F(xy) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} H(xy, x_i y_i)_j$$

имеет простые полюса разве лишь в точках (a_k, b_k), а следовательно равно константе. Значит, все искомые функции неизбежно имеют вид

$$F(xy) = C_0 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} H(xy, x_i y_i)_j.$$

Обратно: любое такое выражение является искомой функцией тогда и только тогда, когда это выражение не имеет простых полюсов в (a_k, b_k), то есть

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{r_i} C_{i,j} \left[H(x_t^{(k)} y_t^{(k)}, x_i y_i)_j \right]_{t^{-1}} = 0, \quad (k = 1, \ldots, \rho)$$

где $(x_t^{(k)}, y_t^{(k)})$ описывает окрестность точки (a_k, b_k).

3.6. Главная функция для эллиптической кривой

Найдем теперь явное выражение для главной функции эллиптической кривой

$$y^2 = x^3 + g_1 x + g_2,$$

которая, как мы знаем, неприводима, и локальная параметризация для который уже была построена явно.

Рассмотрим вновь выражение, которое было использовано выше для построения главной функции:

$$H(xy, x'y') = \frac{1}{2y'}\frac{y'+y}{x'-x}$$

Эта выражение как функция (xy) конечна во всех точках кривой, кроме $(x'y')$ и (∞, ∞). Если точка $(x'y')$ — неособая и конечная, то ее окрестность описывается парой $(x'_t y'_t)$ и верно

$$y' + y'_t = 2y' + t\mathfrak{P}(t), \quad x' - x'_t = -t$$

Поэтому

$$H(x_t y_t, x'y') = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t).$$

Если $(x'y')$ совпадает с $(e_i, 0)$, то

$$y' + y'_t = t\mathfrak{P}(t), \quad x' - x'_t = -t^2$$

Поэтому опять

$$H(x_t y_t, x'y') = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t),$$

то есть H имеет в точке $(x'y')$ простой полюс с вычетом -1. Но эта функция имеет еще один полюс — бесконечно удаленную точку. В самом деле, подставив

$$x_t = t^{-2}, \quad y_t = t^{-3}(1 + t\mathfrak{P}(t)),$$

имеем

$$H(x_t y_t, x'y') = \frac{1}{2y'}\frac{y' + t^{-3} + \dots}{x' - t^2 + \dots} = \frac{1}{2y'}t^{-1} - \frac{2x' + (e_1 + e_2 + e_3)}{y'}t + \dots \quad (3.13)$$

Таким образом, при функция $H(xy, x'y')$ имеет два простых полюса.

Изучим теперь разложения

$$H(xy, x'_t y'_t)\frac{dx'_t}{dt} = \frac{dx'_t}{2y'_t dt}\frac{y'_t + y}{x'_t - x}$$

в полной аналогии с тем, как мы делали это для главной функции. Это выражение обращается в бесконечность разве лишь в тех точках, где $y' = 0$, то есть при $x' = e_i$, при $x' = x$ и при $x' = \infty$. Но на самом деле

$$\frac{dx_t}{y_t} = -\frac{dy_t}{P(x_t)}$$

поэтому элементы с центром в $(e_i, 0)$ отрицательных степеней не доставляют. Элемент с центром в $(x, -y)$ тоже не доставляет таких степеней, поскольку

$$\frac{y'_t + y}{x'_t - x} = \frac{c't + \dots}{t} = \mathfrak{P}(t)$$

С другой стороны элемент с центром (x, y), то есть $x_t = x + t,\ y_t = y + t\mathfrak{P}(t)$, доставляет отрицательные степени:

$$H(xy, x_t y_t)\frac{dx_t}{dt} = \frac{1}{2y + \dots}\frac{2y + \dots}{t} = t^{-1} + \dots$$

Если (xy) совпадет с одной из особых точек $(e_i 0)$, то указанное соотношение остается в силе. Элемент с центром в (∞, ∞) тоже доставляет отрицательные степени:

$$H(xy, x'_t y'_t)\frac{dx'_t}{dt} = -t^{-1} + \dots$$

Таким образом, дифференциал $H(xy, x'y')dx'$ разлагается в точности такие же ряды, как и дифференциал главной функцией.

Мы могли бы назвать $H(xy, x'y')$ главной, если бы удалось доказать, что число точек, в которых она еще имеет полюса минимально. В данном случае это означает, что так построенная функция будет главной, если не существует рациональной функции, имеющей полюс ровно в одной предписанной точке.

Но несуществование такой функции следует из теоремы о вычетах. Пусть теперь $F(xy)$ — рациональная функция, имеющая простой полюс в точке (a, b), тогда

$$\sum [H(xy, x_t y_t) F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0,$$

или

$$F(xy) - F(\infty, \infty) + f H(xy, ab) = 0$$

где

$$f = [F(x_t y_t) \frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}}$$

при $(x_t y_t)$ описывающем окрестность (ab). Но тогда $F(xy)$ имеет те же полюса, что и $H(xy, ab)$, то есть два полюса, что невозможно. Поэтому функции с одним полюсом не существует, жанр эллиптической кривой равен 1, а $H(xy, x'y')$ — главная функция.

В общем случае построение главной функции опирается на следующее соображение. Мы знаем, что

$$H(xy, x'y') = \frac{E(x'y')}{(x - x') f(x', y')_2}$$

где $E(x'y')$ — целая рациональная функция $(x'y')$, коэффициенты которой зависят от (xy) рационально. Поэтому мы модем подобрать коэффициенты $E(x'y')$ так, чтобы

$$H(xy, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \varepsilon \tau^{-1} + \ gP(\tau)$$

где ε равно $1, -1$ или нулю в зависимости от того, совпадает центра $(x_\tau y_\tau)$ с (xy), $(x_0 y_0)$ (в которой $H(x_0 y_0, x'y') = 0$) или нет. Теорема о главной функции гарантирует существование решения, а теорема о вычете сразу укажет, как выше в случае эллиптической кривой, что любая главная функция линейно выражается через построенную.

3.7. Соотношение между $\frac{d}{dx}H(xy,x'y')$ и $\frac{d}{dx'}H(x'y',xy)$

В простейшем случае кривой $y = x$ главная функция равна

$$H(x,x') = \frac{1}{x'-x} - \frac{1}{x'-x_0}$$

и поэтому

$$\frac{d}{dx}H(x,x') = \frac{d}{dx'}H(x',x)$$

Это соотношение можно обобщить на случай произвольной кривой и при этом вся теория абелевых интегралов получается прямым следствием этого соотношение[2].

Пусть $H(xy,x'y')$ — главная функция, обращающаяся в ∞^1 в точке $(x'y')$ и в неособых точках $(a_1b_1),\ldots,(a_\rho b_\rho)$. До сего момента мы избегали рассмотрения окрестностей тоек (a_ib_i). Поскольку в этих точках $H(xy,x'y')$ имеет полюс первого порядка как функция первого аргумента (хотя бы при некоторых значениях $(x'y')$, а значит, и при почти всех), то справедливо разложение

$$H(x_t^iy_t^i,x'y') = H(x'y')_it^{-1} + C(x'y') - H'(x'y')_it + \ldots \tag{3.14}$$

где $x_t^iy_t^i$ описывает окрестность точки (a_ib_i), а $H(x'y')_i,\ldots$ — рациональные функции своих аргументов.

Теорема 3.4. Справедливо соотношение

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx_1}H(x_1y_1,x_2y_2) - \frac{d}{dx_2}H(x_2y_2,x_1y_1) = \\ &= \sum_{i=1}^{\rho} H(x_2y_2)_iH'(x_1y_1)_i - H(x_1y_1)_iH'(x_2y_2)_i\end{aligned} \tag{3.15}$$

при всех возможных значениях аргументов. Здесь под дифференцирование по x понимается дифференцирование функции, в которую вместо y поставлена функция $y(x)$

[2]Тихомандрицкий в его нахождении видел главное достижение Вейерштрасса

Доказательство. Поскольку для доказательства соотношения (3.15) достаточно установить его на непрерывном множестве точек, а далее воспользоваться принципом продолжения равенств, то можно считать, что (x_1y_1) и (x_2y_2) — неособые. Применим теорему 3.1 к функции

$$F(xy) = H(xy, x_2y_2)\frac{d}{dx}H(xy, x_1y_1)$$

Тогда

$$\sum [H(x_ty_t, x_2y_2)\frac{d}{dt}H(x_ty_t, x_1y_1)]_{t^{-1}} = 0 \tag{3.16}$$

где суммирование распространяется на все элементы (x_ty_t), при которых член с t^{-1} может встретиться, то есть на элементы с центрами в точках $(x_1y_1), (x_2y_2), (a_1b_1), \ldots, (a\rho b_\rho)$. Но если

$$x_t = x_1 + t, \quad y_t = y_1 + t\mathfrak{P}(t),$$

то

$$H(x_ty_t, x_1y_1) = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t),$$
$$\frac{d}{dt}H(x_ty_t, x_1y_1) = t^{-2} + \mathfrak{P}(t),$$
$$H(x_ty_t, x_2y_2) = H(x_1y_1, x_2y_2) + t\frac{d}{dx_1}H(x_1y_1, x_2y_2) + \ldots.$$

Поэтому коэффициент при t^{-1}, фигурирующей в сумме, есть

$$\frac{d}{dx_1}H(x_1y_1, x_2y_2).$$

Аналогично при

$$x_t = x_2 + t, \quad y_t = y_2 + t\mathfrak{P}(t)$$

имеем

$$H(x_ty_t, x_1y_1) = H(x_2y_2, x_1y_1) + t\frac{d}{dx_2}H(x_2y_2, x_1y_1) + \ldots,$$
$$\frac{d}{dt}H(x_ty_t, x_1y_1) = \frac{d}{dx_2}H(x_2y_2, x_1y_1) + \ldots,$$
$$H(x_ty_t, x_2y_2) = -t^{-1} + \mathfrak{P}(t).$$

Поэтому коэффициент при t^{-1}, фигурирующей в сумме, есть

$$-\frac{d}{dx_2}H(x_1y_1, x_2y_2).$$

Наконец, при

$$x_t = x_t^i = a_i + t, \quad y_t = y_t^i = b_i + t\mathfrak{P}(t)$$

из (3.14) имеем

$$\begin{aligned}
&H(x_ty_t, x_1y_1) = H(x_1y_1)_i t^{-1} + C(x_1y_1) - H'(x_1y_1)_i t + \dots, \\
&\frac{d}{dt}H(x_ty_t, x_1y_1) = -t^{-2}H(x_1y_1)_i - H'(x_1y_1)_i + \dots, \\
&H(x_ty_t, x_2y_2) = H(x_2y_2)_i t^{-1} + C(x_2y_2) - H'(x_2y_2)_i t + \dots.
\end{aligned}$$

Поэтому член с t^{-1} имеет коэффициент

$$H(x_1y_1)_i H'(x_2y_2)_i - H(x_2y_2)_i H'(x_1y_1)_i$$

Подставляя в сумму (3.16) найденный коэффициенты и приравнивая ее нулю получи (3.15). $\square$

Глава 4

Абелевы интегралы

4.1. Абелевы интегралы как функции верхнего предела

Изучив свойства алгебраической функции $R(xy) = R(x, y(x))$, обратимся к интегралам от нее

$$\int\limits_{x_0}^{x} R(x, y(x))dx.$$

Такие интегралы называют абелевыми. Знак интеграла будем понимать в следующем смысле. Пусть $\mathfrak{C}$ кривая, соединяющая точки x_0 и x и y_0 один из корней $f(x_0, y) = 0$. Возьмем в качестве $y(x)$ элемент $y = y_0 + c(x - x_0) + \ldots$ и его продолжения вдоль $\mathfrak{C}$. Тогда $R(x, y(x)) = f(x)$ будет однозначной функцией вдоль $\mathfrak{C}$, имеющей, быть может, алгебраические особенности. Теперь интеграл вводится обычным способом. Бросается в глаза, однако, что абелев интеграл зависит не только от пути, но и от значения y_0. Поэтому удобно писать

$$\int\limits_{(x_0 y_0}^{(xy)} R(xy)dx.$$

То, что выбор пути $\mathfrak{C}$ определяет значение y в точке x не страшно, поскольку путь мы не указываем. Следует лишь заметить, что точки x_0 и x всегда можно соединить так, чтобы от заданного корня y_0 придти к заданному корню y, поскольку кривая $f(x, y) = 0$ неприводима.

При избранном способе записи, абелев интеграл является функцией пары (xy), но функцией, вообще говоря, неоднозначной: даже если продолжение $y = y_0 + c(x - x_0) + \dots$ вдоль двух различных путей приводит к одному и тому же значению $y(x)$, абелевы интегралы, вычисленные по этим путям не обязаны совпадать. Ясно, что абелев интеграл будет однозначной функцией от (xy) лишь тогда, когда интеграл по любому замкнутому контуру $\mathfrak{C}$, продолжение вдоль которого $y(x)$ возвращается к исходом элементу, равен нулю.

Мы будем придерживаться такой терминологии. Контур $\mathfrak{C}$, замкнутый как контур на x-плоскости, и проходящий через точку $(x_0 y_0)$, будем называть замкнутым, если продолжение вдоль него элемента аналитической функции $y(x) = y_0 + (x - x_0)\mathfrak{P}(x - x_0)$ возвращается к исходному элементу. Абелев интеграл, вычисленный по такому контуру будем называть периодом интеграла.

Такое название происходит от того, что абелев интеграл

$$\int\limits_{(0,1)}^{(x,\sqrt{1-x^2})} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}(x)$$

не однозначен как функция x, но является обратной функций к однозначной — именно, к $\sin(J)$. Поэтому его значения при фиксированных $(x, \sqrt{1-x^2})$ могут отличаться на период синуса, то есть на 2π. Это можно видеть и непосредственно:

$$\int\limits_{|x|=1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\pi$$

Поэтому то интеграл по замкнутому контуру называют периодом.

Важность изучения периодов вполне проясняет следующая

Теорема 4.1. Если у абелева интеграла нет отличных от нуля периодов, то он является рациональной функцией на кривой $f(x,y)=0$, и наоборот.

Доказательство опирается на возможность классифицировать особые точки абелева интеграла так же, как полюса $F(xy)$. Возьмем произвольный элемент $(x_t y_t)$ с центром $(a'b')$ и рассмотрим интеграл

$$J = \int\limits_{(ab)}^{(x_t y_t)} F(xy)dx,$$

взятый вдоль произвольного, но фиксированного пути $(ab)\ldots(a'b')$ и затем по отрезку от a' до x_t. Разумеется, при малых t этот отрезок можно как угодно деформировать. Замена переменной с x на t, дает

$$J = \int\limits_{(ab)}^{(a'b')} F(xy)dx + \int\limits_{0}^{t} F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}dt$$

Поскольку

$$F(x_t, y_t)\frac{dx_t}{dt} = P(t)$$

и отрицательные степени фигурируют в это выражении только если $(a'b')$ — полюс $F(xy)$, то

$$J(x_t y_t) = c_{-1}\ln(t) + P(t)$$

Это мы выразим так: абелев интеграл в окрестности любой точки, отличной от полюса подынтегральной функции, является регулярной функцией локального параметра t, а в окрестности полюса имеет особенность типа полюса и $\ln(t)$. Значит, как и интеграл от рациональной функции. Абелев интеграл имеет рационально-логарифмические особенности и только конечном числе точек.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 4.1. Если в разложении $F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}$ в окрестности одной из точек имеется член $c_{-1}t^{-1}$, то абелев интеграл имеет период $2\pi i c_{-1}$. Значит, для того, чтобы абелев интеграл не был бесконечнозначным, необходимо, чтобы

$$[F(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0$$

Поэтому абелев интеграл, не имеющий периодов, является не только однозначной функций точки (xy), но и может быть разложен в ряд по целым степеням локального параметра. Теперь утверждение теоремы 4.1 сразу следует из следующей

Теорема 4.2. Если z — однозначная функция точки (xy) кривой $f(x, y) = 0$, которая может быть разложена в ряд по целым степеням локального параметра в окрестности любой точки, причем лишь конечное число элементов содержит отрицательные степени и лишь в конечном числе. Тогда z — рациональная функция на кривой.

Доказательство. Пусть $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ — корни $f(x, y) = 0$, а $z^{(1)}, \dots, z^{(n)}$ — значения z, отвечающие точкам $(xy^{(1)}), \dots, (xy^{(n)})$. Используя интерполяционную формулу Лагранжа, имеем

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{z^{(i)} G(y)}{(y - y^{(i)}) G'(y^{(i)})},$$

где

$$G(y) = \prod_{k=1}^{n} (y - y^{(k)}).$$

Правая часть может быть представлена в виде

$$z = R_0 + R_1 y + \dots R_{n-1} y^{n-1}$$

Коэффициенты $R_0, R_1, \dots$ являются симметричными функциями $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$, так как не меняются при перестановке $y^{(\alpha)}$ на $y^{(\beta)}$ и $z^{(\alpha)}$ на $z^{(\beta)}$. Поэтому эти коэффициенты являются однозначными функциями одного x.

То, что может быть разложена в ряд по целым степеням локального параметра в окрестности любой точки, означает, что эти коэффициенты могут иметь только алгебраические особые точки. В силу только что доказанной однозначности, они имеют только полюса и только в конечном числе, то есть являются рациональными функциями. Таким образом, мы представили z в виде

$$z = R_0 + R_1 y + \dots R_{n-1} y^{n-1},$$

где $R_k(x)$ — рациональные функции. $\square$

4.2. Разложение произвольного интеграла на интегралы трех родов

В предыдущей главе мы видели, что произвольную функцию $F(xy)$, имеющую только простые полюса, можно разложить по главным функциям. Обобщение сказанного на случай функций с кратными полюсами приводит к необходимости изучения производных главной функции. Однако для нужд теории абелевых интегралов нужно не совсем это — нужно разложить не саму функцию, а интеграл

$$\int F(xy)dx$$

Случай рациональной функции указывает, что отсутствии в $F(x)$ кратных полюсов она является суммой главных функций вида $H(ab, xy)$, а их появление приводит к появлению в выражении для

$$\int F(x)dx$$

рациональной функции. Поэтому мы попытаемся представить $F(x)$ как линейную комбинацию главных функций и производной некоторой рациональной функции. При этом соотношение (3.15) будет играть роль дифференцирования по частям.

Пусть $F(xy)$ — произвольная функция и пусть $(x_1y_1), \ldots, (x_ry_r)$ — те точки, в окрестности которых

$$F(x_ty_t)\frac{dx_t}{dt}$$

имеет отрицательные степени, то есть

$$F(x_ty_t)\frac{dx_t}{dt} = c_\nu t^{-1} + \sum_\lambda \lambda c_{\nu,\lambda} t^{\lambda-1} \tag{4.1}$$

Допустим пока, что (xy) — неособенная точка. Из теоремы 3.1 следует, что

$$\sum [F(x_ty_t)H(x_ty_t, xy)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = 0 \tag{4.2}$$

Сумма пробегает все элементы с центрами $(xy), (x_1y_1), \ldots, (a_1b_1), \ldots$.

Элемент

$$x_t = x + t, \quad y_t = y + t\mathfrak{P}(t)$$

дает

$$[F(x_ty_t)H(x_ty_t, xy)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = -F(xy).$$

Элемент с центром в $(x_\nu y_\nu)$ имеет вид

$$x_t = P(t), \quad y = P(t)$$

Поскольку его центр отличен от (xy) и $(a_1b_1), \ldots$, в разложении

$$H(x_ty_t, xy)$$

присутствуют только положительные степени t, то есть

$$H(x_ty_t, xy) = \sum_{\lambda \geq 0} H^\lambda(x_\nu y_\nu, xy)t^\lambda$$

Значит,

$$[F(x_ty_t)H(x_ty_t, xy)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{n>0} nc_{\nu,-n}H^{(n)}(x_\nu y_\nu, xy),$$

где
$$nH^n(x_\nu y_\nu, xy) = [\frac{d}{dt}H(x_t y_t, xy)]_{t^{n-1}}.$$
В силу соотношения (3.15),
$$\frac{d}{dt}H(x_t y_t, xy) = \frac{d}{dx}H(x_t y_t, xy)\frac{dx_t}{dt}+$$
$$+\sum_{i=1}^{\rho} H'(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} H(xy)_i - H(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} H'(xy)_i$$
поэтому
$$nH^n(x_\nu y_\nu, xy) = \frac{d}{dx}[H(xy, x_t y_t)]_{t^{n-1}}+$$
$$+\sum_{i=1}^{\rho} H(xy)_i [H'(x_t y_t)_i]_{t^{n-1}} - H'(xy)_i [H'(x_t y_t)_i]_{t^{n-1}}$$
и, следовательно, данный коэффициент можно представить в виде
$$c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{i=1}^{\rho}(g'_{\nu,i} H(xy)_i - g_{\nu,i} H'(xy)_i) + \frac{d}{dx}F_\nu(xy)$$
Наконец, члены в сумме (4.2), связанные с $(a_i b_i)$, равны
$$[F(x_t y_t) H(x_t y_t, xy)\frac{dx_t}{dt}]_{t^{-1}} = F(a_1 b_i) H(xy)_i$$
Подставляя в сумму (4.2) найденный коэффициенты и приравнивая ее нулю, придем к теореме

Теорема 4.3. Любой дифференциал $F(xy)dx$ можно представить в виде
$$F(xy)dx = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{i=1}^{\rho}(g'_i H(xy)_i - g_i H'(xy)_i) + dR(xy), \quad (4.3)$$
Фигурирующие в этом выражении коэффициенты можно вычислить, приняв обозначения (x_t^ν, y_t^ν) — элемент, описывающий окрестность точки

$(x_\nu y_\nu)$, (x_t^i, y_t^i) — элемент, описывающий окрестность точки $(a_i b_i)$, по формулам

$$c_\nu = [F(x_t^\nu y_t^\nu)\frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{-1}}$$

$$-nc_{\nu,-n} = [F(x_t^\nu y_t^\nu)\frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{-n-1}}$$

$$c^{(i)} = F(a_i b_i)$$

$$g_i = \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{n>0} c_{\nu,-n}[H(x_t^\nu y_t^\nu)_i\frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{n-1}}$$

$$g_i' = \sum_{\nu=1}^{r}\sum_{n>0} c_{\nu,-n}[H'(x_t^\nu y_t^\nu)_i\frac{dx_t^\nu}{dt}]_{t^{n-1}} - c^{(i)}$$

а функция

$$R(xy) = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{n>0} c_{\nu,-n}[H(xy, x_t^\nu y_t^\nu)\frac{dx_t\nu}{dt}]_{t^{n-1}}$$

Теорема была доказана в предположении, что (xy) неособая точка, однако в силу принципа аналитического продолжения она верна и при особых (xy).

Теорема 4.3 означает, что любой абелев интеграл может быть представлен в виде суммы интегралов вида

$$\int H(xy)_i dx, \int H'(xy)_i dx, \int H(ab, xy)dx \tag{4.4}$$

и интеграла от полного дифференциала, то есть рациональной функции. Поэтому можно утверждать, что с точностью до некоторой алгебраической функции любой абелев интеграл является линейной комбинацией абелевых интегралов трех родов в соответствии с определением.

Определение 4.1. Интегралы вида (4.4) называют (нормальными) интегралами первого, второго и третьего рода соответственно.

По определению функции $H(xy)_i$ и $H'(xy)_i$ получаются как коэффициенты разложения

$$H(x_t^i y_t^i, x_\tau' y_\tau') = H(x_\tau' y_\tau')_i t^{-1} + C(x_\tau' y_\tau') - H'(x_\tau' y_\tau')_i t + \ldots,$$

где $(x_t^i y_t^i)$ описывает окрестность точки $(a_i b_i)$, то есть

$$H(x_t^i y_t^i, x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = H(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} t^{-1} + C(x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} - H'(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} t + t^2 \mathfrak{P}(t;\tau).$$

С другой стороны в силу теоремы 3.3

$$H(x_t^i y_t^i, x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} = \frac{\varepsilon}{\tau - t} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{P}(\tau) t^{k-1},$$

где $\varepsilon = 1$ только тогда, когда центры $(x_t^i y_t^i)$ и $(x'_\tau y'_\tau)$ совпадают. Приравнивая оба соотношения, видим, что

$$H(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} t^{-1} + C(x'_\tau y'_\tau)\frac{dx'_\tau}{d\tau} - H'(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} t = \frac{\varepsilon}{\tau - t} + \sum_{k=0}^{\infty} \mathfrak{P}(\tau) t^{k-1}$$

при $t \neq 0$, $\tau \neq 0$ и $\tau \neq t$. В круге $|t| < |\tau|$

$$\frac{1}{\tau - t} = \tau^{-1}(1 + \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{\tau^2} + \dots),$$

поэтому в правой части коэффициент при t^{-1} имеет вид

$$\mathfrak{P}(\tau)$$

а при t^1 —

$$\varepsilon \tau^{-2} + \mathfrak{P}(\tau),$$

причем ε не равно нулю, только если $(x'_\tau y'_\tau)$ описывает элемент с центром в $(a_i b_i)$. Сравнивая эти члены со стоящими в левой части, получаем

$$H(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau), \quad H'(x'_\tau y'_\tau)_i \frac{dx'_\tau}{d\tau} = -\varepsilon \tau^{-2} \mathfrak{P}(\tau) \tag{4.5}$$

Переобозначая произвольный элемент (x'_τ, y'_τ) через $(x_t y_t)$, имеем

Теорема 4.4. При произвольном элементе $(x_t y_t)$ справедливы разложения

$$\begin{aligned}
H(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} &= \mathfrak{P}(t), \\
H'(x_t y_t)_i \frac{dx_t}{dt} &= -\frac{\varepsilon_i}{t^2} + \mathfrak{P}(t), \\
H(ab, x_t y_t)\frac{dx_t}{dt} &= \frac{\varepsilon}{t} + \mathfrak{P}(t),
\end{aligned}$$

Здесь ε_i равно единице, если элемент описывает окрестность точки $(a_i b_i)$, и нуль в противном случае; ε равно единице, если элемент имеет центр в (ab), -1, если элемент имеет центр в $(x_0 y_0)$, и нуль во всех остальных случаях.

Иными словами, дифференциал первого рода не имеет полюсов, дифференциал второго рода имеет один полюс кратности два, а дифференциал третьего рода — два полюса кратности один.

4.3. Линейное пространство голоморфных дифференциалов

Голоморфность интегралов первого рода является весьма замечательным свойством, которое часто принимают за определения. Нам для дальнейшего существенно то, что если

$$F(xy)dx$$

не имеет подобно интегралу первого рода полюсов, то соответствующие ему коэффициенты

$$c_\nu = 0, \quad c_{\nu,-n} = 0$$

Поэтому

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{\rho} g_i' H(xy)_i$$

Таким образом, *множество всех дифференциалов без особенностей (голоморфных дифференциалов) образует линейное пространство размерности ρ с базисом $H(xy)_1, \ldots, H(xy)_\rho$.* Условимся для краткости называть каждый элемент этого множества голоморфным дифференциалом.

То, что $H(xy)_1, \ldots, H(xy)_\rho$ линейно независимы можно доказать так. Допустим, что

$$C_1 H(xy)_1 + \cdots + C_\rho H(xy)_\rho = 0$$

при всех (xy). Если среди C_j есть отличные от нуля, то, в частности, верно

$$\det(H(a_j b_j)_i) = 0$$

и, значит, существует функция с простыми полюсами в точках $(a_1 b_1), \ldots, (a_\rho b_\rho)$ и без других особенностей, отличная от константы. Но это невозможно.

Отсутствие особенностей — свойство довольно неожиданное, его можно сформулировать еще так: *интеграл*

$$\int\limits_{(ab)}^{(xy)} H(x'y')dx'$$

между любыми (в том числе и бесконечно удаленными) двумя точками (ab) *и* (xy) *конечен при некотором выборе пути.*

Сказанное вполне очевидно, если точки a и x — конечные: на плоскости x' можно провести кривую конечной длины, выходящую из $x' = a$ и идущую в $x' = x$ таким образом, что неявная функция $y(x)$ со значением $y(a) = b$ продолжается вдоль нее до значения $y(x) = y$. Понятно, что написанный интеграл будут конечен, если брать его вдоль этой кривой. Если же расстояние между точками бесконечно велико, то следует сделать замену $z = x^{-1}$, при этом

$$H(1/z, y)_i d(1/z)$$

будет дифференциалом первого рода кривой $f(1/z, y) = 0$.

4.4. Периоды интегралов первого и второго рода

При рассмотрении периодов абелевых интегралов удобно рассматривать сразу интегралы первого и второго рода. Именно, назовем совместной системой периодов столбец

$$(\int\limits_{\mathfrak{C}} H(xy)_1 dx,\ \ldots\ , \int\limits_{\mathfrak{C}} H'(xy)_\rho dx)^T$$

где $\mathfrak{C}$ — некоторый замкнутый контур, если хотя бы один его элемент отличен от нуля.

Поскольку интегралы первого рода не являются рациональными функциями, существует такой контур $\mathfrak{C}$, доставляющий неравную нулю совместную систему периодов

$$(2\omega_1, \ldots 2\eta_\rho)^T$$

Тогда функция

$$\int F(xy)dx = \int \sum_{i=1}^{\rho} (2\omega_i H'(xy)_1 - 2\eta_i H(xy)_i) dx$$

имеет особенности только при $(a_1 b_1), \ldots$ и при этом только полюса первого порядка. Если эта функция еще и однозначно зависит от (xy), то она является рациональной функцией, обращающейся в бесконечность только в ρ точках. Поскольку такой функции не существует, выписанный интеграл многозначен. Значит, найдется контур $\mathfrak{C}'$, такой, что

$$\int\limits_{\mathfrak{C}'} F(xy)dx \neq 0 \tag{4.6}$$

Замечательно то, что теорема 3.4 позволит вычислить этот интеграл. Из этой теоремы следует, что

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{\mathfrak{C}} H(xy, x'y')dx' = \sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_i H'(xy)_i - 2\eta_i H(xy)_i = F(xy)$$

то есть $F(xy)$ является полным дифференциалом от функции

$$\Omega(xy) = \int\limits_{\mathfrak{C}} H(xy, x'y')dx'$$

Кривая $\mathfrak{C}$ является множеством особых точек для $\Omega(xy)$, но пределы изнутри области, окруженной $\mathfrak{C}$, и снаружи существуют и не совпадают. Мы, разумеется, придерживаемся обычного соглашения о том, что область, находящая при обходе контура слева, считается лежащей внутри $\mathfrak{C}$.

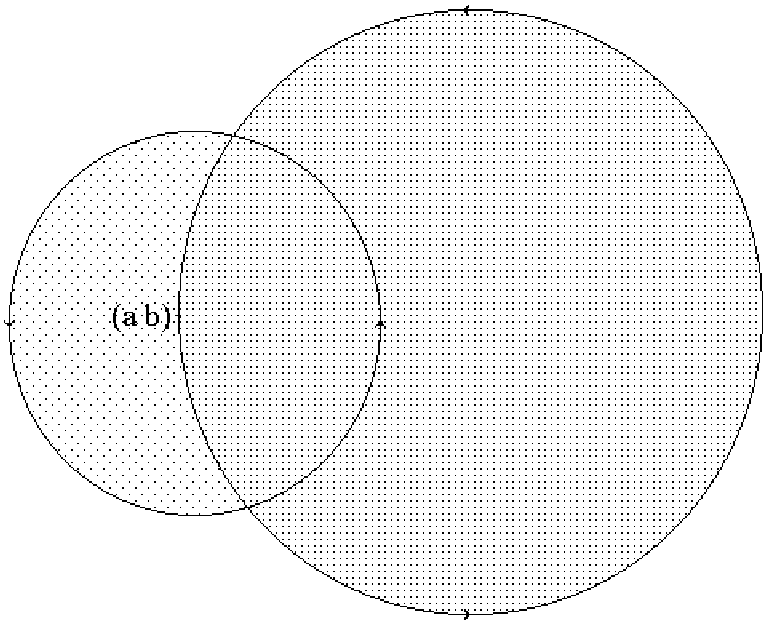

Рис. 4.1: К вычислению пределов $\Omega(xy)$

В самом деле, пусть (a, b) — точка, лежащая на $\mathfrak{C}$, а $\Omega^+(xy)$ и $\Omega^-(xy)$ соответствующие пределы. Зададимся малым ε и окружим $x = a_0$ кругом радиуса ε. Обозначим как $\mathfrak{C}^+$ — контур, состоящей из дуги $\mathfrak{C}$, лежащей вне этого круга и дуги окружности лежащей вне контура $\mathfrak{C}$, аналогично, введем $\mathfrak{C}^-$, только возьмем дугу окружности, лежащую внутри $\mathfrak{C}$. Функция

$$\Omega^+(xy, \varepsilon) = \int\limits_{\mathfrak{C}^+(\varepsilon)} H(xy, x'y')dx'$$

в силу теоремы Коши совпадает $\Omega(xy)$ при всех (xy), лежащих в $\mathfrak{C}$, поскольку

$$\Omega^+(xy, \varepsilon) - \Omega(xy) = \int\limits_{+(\varepsilon)-\mathfrak{C}} H(xy, x'y')dx'$$

и область внутри контура $^+(\varepsilon) - \mathfrak{C}$ лежит вне $\mathfrak{C}$ (на рис 4.1 она обозначена редкими точками), где подынтегральная функция не имеет особенностей в силу $(xy) \neq (x'y')$. Только

$$\Omega^+(xy, \varepsilon)$$

вполне определена в окрестности (ab), и поэтому предел

$$\Omega^+(ab) = \Omega^+(ab, \varepsilon)$$

Аналогично,

$$\Omega^-(ab) = \Omega^-(ab, \varepsilon)$$

Значит, пределы действительно существуют, конечны, но их разность

$$\Omega^+(ab) - \Omega^-(ab) = \int\limits_{|x'-a|=\varepsilon)} H(ab, x'y')dx'$$

Поскрольку в окрестности (ab) верно

$$H(ab, x_t y_t) = \frac{1}{t} + \mathfrak{P}(t)d\tau$$

то

$$[\Omega(ab)] = \Omega^+(ab) - \Omega^-(ab) = 2\pi i \tag{4.7}$$

Зная это, нетрудно вычислить периоды $F(xy)$. Для этого заметим, что особые точки $F(xy)$ — суть $(a_1b_1), \ldots,$ поэтому контур $\mathfrak{C}'$ всегда можно слегка деформировать с тем, чтобы у него не было общих дуг с $\mathfrak{C}$, то есть всегда можно считать, что он пересекает $\mathfrak{C}$ в конечном числе точек $(x_1y_1), \ldots, (x_ry_r)$. Использовать формулу Ньютона-Лейбница можно только на участках между точками пересечения. При этом мы имеем

$$\int\limits_{\mathfrak{C}'} \frac{d}{dx} \int\limits_{\mathfrak{C}} H(xy, x'y')dx'dx = -\sum \varepsilon_i[\Omega(x_iy_i)]$$

где ε_i принимает значение ± 1 в зависимости от того, идет ли контур $\mathfrak{C}'$ внутрь $\mathfrak{C}$ или во вне. В силу (4.7) это означает

$$\int\limits_{\mathfrak{C}'} F(xy)dx = 2 - \pi i \sum \varepsilon_i$$

Вспоминая выражение для $F(xy)$, можем утверждать

Теорема 4.5. Если контур $\mathfrak{C}'$ входит во внутрь $\mathfrak{C}$ m раз, а выходит из нее m' раз, то

$$\sum_{k=1}^{\rho} \eta_k\omega_k' - \omega_k\eta_k' = \frac{\pi i}{2}(m - m')$$

Поскольку существует контру $\mathfrak{C}'$, на котором

$$\int\limits_{\mathfrak{C}'} F(xy) \neq 0,$$

число m не равно m', то есть число точек, в которых $\mathfrak{C}'$ входит в $\mathfrak{C}$, не совпадает с числом точек, в которых $\mathfrak{C}'$ выходит из $\mathfrak{C}$. Поэтому можно построить из $\mathfrak{C}'$ контур, который пересекает $\mathfrak{C}$ ровно 1 раз. На рис. 4.2 показано, как это сделать на примере контура пересекающего $\mathfrak{C}$ в трех точках. Подытоживая, можем утверждать следующее:

Теорема 4.6. Существуют два контура $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}'$, пересекающиеся в одной точке.

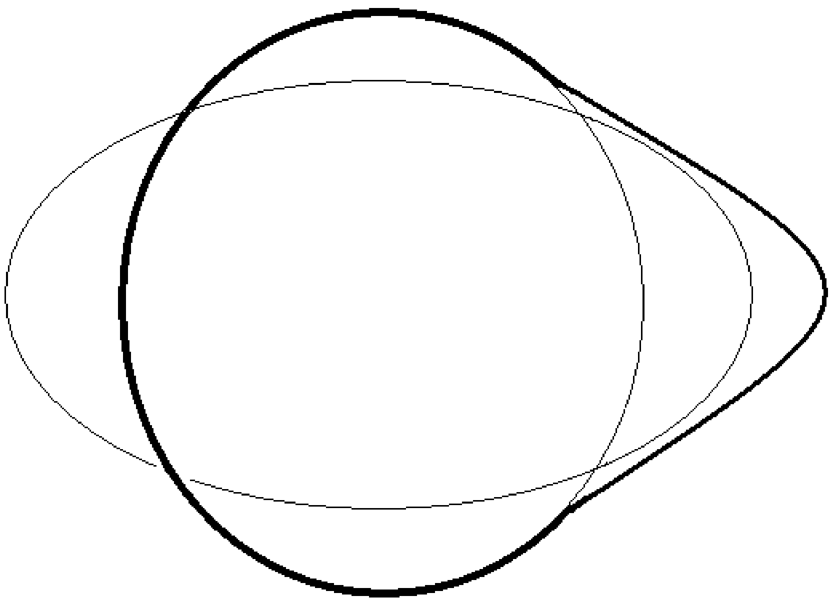

Рис. 4.2: К построению контура, пересекающего $\mathfrak{C}$ в одной точке

Пара двух контуров, пересекающихся в одной точке, примечательно тем, что любой путь интегрирования Γ может быть заменен на другой Γ', который не пересекает контура $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}'$ и при этом значение интегралов

$$\int\limits_{\Gamma} H(xy)_1 dx, \ldots, \int\limits_{\Gamma} H'(xy)_\rho dx$$

меняется на

$$2m'\omega_1 - 2m\omega_1', \ldots, 2m'\eta_\rho + 2m\eta_\rho'$$

соответственно, где m и m' — целые числа.

Напр., пусть путь Γ входит во внутрь $\mathfrak{C}$. Возьмем точку вне $\mathfrak{C}$ вблизи от очки пересечения и обойдем круг $\mathfrak{C}'$ в обратном направлении так, как показано на рис. 4.3. Поскольку этот контур можно взять сколь угодно близким к $\mathfrak{C}'$, он уже не пересекает $\mathfrak{C}$ и подходит к точке пересечения Γ и $\mathfrak{C}$ с внутренней стороны. Интегралы поэтому новому пути отличаются от исходного на

$$-\int\limits_{\mathfrak{C}'} H(xy)_1 dx = \omega_1', \ldots$$

то есть $m = 1,\ m' = 0$.

Переобозначим первую пару контуров как $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_1'$. Поскольку в выражении

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{\rho} c_i H'(xy)_i - c_i' H(xy)_i$$

всегда можно подобрать коэффициенты c_i, c_i' так, чтобы

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_1} F(xy)dx = \int\limits_{\mathfrak{C}_1'} F(xy)dx = 0,$$

ведь эти условия эквивалентны системе двух линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta_{k,1} - c_k' \omega_{k,1} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta_{k,1}' - c_k' \omega_{k,1}' = 0$$

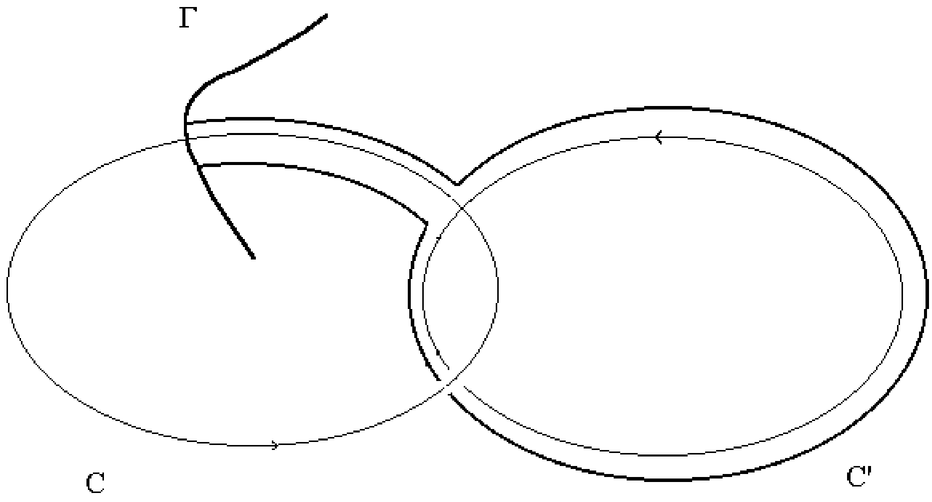

Рис. 4.3: К деформации пути интегрирования

на 2ρ неизвестные $c_1, \ldots, c'_\rho$, которая всегда разрешима. Поскольку

$$\int F(xy)dx$$

все равно не может быть рациональной функцией, существует контур Γ, такой что

$$\int\limits_{\Gamma} F(xy)dx \neq 0.$$

Его можно заметить на контур $\mathfrak{C}_2$, не пересекающий ни $\mathfrak{C}_1$, ни $\mathfrak{C}'_1$, при этом по только что доказанному

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_2} F(xy)dx = \int\limits_{\Gamma} F(xy)dx \neq 0$$

Тем же способом, которым мы доказали существование $\mathfrak{C}'_1$, мы докажем существование контура $\mathfrak{C}'_2$, пересекающего $\mathfrak{C}_2$ лишь в одной точке с $\varepsilon = 1$. При этом всегда можно заменить его на такой, который не пересекает ни $\mathfrak{C}_1$, ни $\mathfrak{C}'_1$.

Двигаясь так дальше, построим ρ пар контуров $\mathfrak{C}_j$ и $\mathfrak{C}'_j$, таких, что C_j и C'_j пересекающиеся в одной точке, причем $\mathfrak{C}'_j$ входит во внутрь $\mathfrak{C}_j$. Только теперь попытка подобрать коэффициенты в выражении

$$F(xy) = \sum_{i=1}^{\rho} c_i H'(xy)_i - c'_i H(xy)_i$$

так, чтобы

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_j} F(xy)dx = \int\limits_{\mathfrak{C}'_j} F(xy)dx = 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, \rho),$$

приведет к 2ρ линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta_{k,j} - c'_k \omega_{k,j} = 0 \\ \sum_{k=1}^{\rho} c_k \eta'_{k,j} - c'_k \omega'_{k,j} = 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

на 2ρ неизвестные $c_1, \ldots, c'_\rho$.

Запишем эту систему в матричном виде, полагая

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \ldots & \omega_{1\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \omega_{\rho 1} & \ldots & \omega_{\rho\rho} \end{pmatrix}, \ldots \eta' = \begin{pmatrix} \eta'_{11} & \ldots & \eta'_{1\rho} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta'_{\rho 1} & \ldots & \eta'_{\rho\rho} \end{pmatrix},$$

так

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ -c \end{pmatrix} = 0$$

Возникшая здесь матрица

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}$$

имеет отличный от нуля определитель и поэтому система имеет только тривиальное решение.

В самом деле, в силу теоремы 4.5 выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\rho} \omega_{ki}\eta'_{kj} - \eta_{ki}\omega'_{kj} = -\frac{\pi i}{2}\delta_{ij} \\ &\sum_{k=1}^{\rho} \omega_{ki}\eta_{kj} - \eta_{ki}\omega_{kj} = 0 \\ &\sum_{k=1}^{\rho} \omega'_{ki}\eta'_{kj} - \eta'_{ki}\omega'_{kj} = 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

которые в матричных обозначениях можно записать как

$$\begin{aligned} &\omega^T\eta' - \eta^T\omega' = -\frac{\pi i}{2} \\ &\omega^T\eta - \eta^T\omega = 0 \\ &\omega'^T\eta' - \eta'^T\omega = 0. \end{aligned}$$

Напр.,

$$(\omega^T\eta' - \eta^T\omega')_{ij} = \sum_{k=1}^{\rho} \omega_{ki}\eta'_{kj} - \eta_{ki}\omega'_{kj} = -\frac{\pi i}{2}\delta_{ij}.$$

Но тогда

$$\begin{pmatrix} -\eta'^T & \omega'^T \\ \eta^T & -\omega^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix} = \frac{\pi i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поэтому матрица системы Ω имеет обратную

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}^{-1} = \frac{2}{\pi i} \begin{pmatrix} -\eta'^T & \omega'^T \\ \eta^T & -\omega^T \end{pmatrix}$$

Отсюда сразу видно, что ее определитель не равен нулю.

Попутно мы получили еще 4ρ соотношений между периодами:

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta'^T & \omega'^T \\ \eta^T & -\omega^T \end{pmatrix} = \frac{\pi i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

поскольку левая обратная матрица и правая совпадают. Особенно важно соотношение между периодами интегралов первого рода

$$\omega\omega'^T - \omega'\omega^T = 0$$

Пусть теперь Γ — произвольный контур, соединяющий (ab) и (xy), а Γ' другой контур, не пересекающий систему из 2ρ контуров. Тогда разность

$$\int_{\Gamma} H(xy)_1 dx - \int_{\Gamma'} H(xy)_1 dx$$

представляет собой интеграл по замкнутому контуру. Его значение изменится на

$$m_1'\omega_{1,1} + \cdots - m_\rho \omega_\rho'$$

если заменить этот путь на контур, не пересекающий систему из 2ρ контуров. Обозначим этот контур как $\mathfrak{C}$, а соответствующую ему систему совместных периодов как

$$(\omega_1, \ldots, \eta_\rho)^T$$

В силу теоремы 4.5 эти числа удовлетворяют системе (4.8), и поэтому они равны нулю. Значит, интеграл

$$\int\limits_{(ab)}^{(xy)} H(xy)dx,$$

взятый по произвольному пути, отличается от интеграла, взятого по пути, не пересекающем $C_1, \ldots C'_\rho$, на комбинацию

$$m'_1\omega_{1,1} + \cdots - m_\rho\omega'_\rho$$

а интегралы взятые по путям, не пересекающим ρ пар контуров, вообще совпадают. Доказанное можно сформулировать так: *интегралы первого и второго рода имеют ровно 2ρ систем совместных периодов.*

4.5. Периоды интеграла третьего рода

Периоды интеграла третьего рода сразу видны из уже использованного выше соотношения

$$\frac{d}{da'}\int\limits_{\mathfrak{C}} H(a'b', xy)dx = \sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_i H'(a'b')_i - 2\eta_i H(a'b')_i$$

Поскольку

$$H(x_0y_0, xy) = 0,$$

можно написать

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} H(a'b', xy)dx = \sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_i \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx - 2\eta_i \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx$$

Учитывая результаты предыдущего раздела

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} H(a'b', xy)dx = \sum_{i,j} 2(m'_j\omega_{ij} - m_j\omega'_{ij}) \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx$$
$$- 2(m'_j\eta_{ij} - m_j\eta'_{ij}) \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx,$$

где m_j, m'_j — целые числа, указывающие сколько раз контур $\mathfrak{C}$ пересекает систему контуров $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1, \ldots$. Поэтому правая часть есть линейная комбинация 2ρ периодов

$$\sum_{i=1}^{\rho} 2\omega_{ij} \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx - 2\eta_{ij} \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx$$

и

$$\sum_{i=1}^{\rho} 2\omega'_{ij} \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H'(xy)_i dx - 2\eta'_{ij} \int\limits_{(x_0y_0)}^{(a'b')} H(xy)_i dx$$

с целыми коэффициентами. Только в отличие от предыдущего изменение пути в интегралах от (x_0y_0) до $(a'b')$ может привести к изменению выражения еще на $2\pi m_0$. Таким образом, всего интеграл третьего рода имеет $2\rho + 1$ период.

Теорема 4.3 позволяет утверждать, что периоды произвольного абелева интеграла представляют собой комбинацию из 2ρ периодов, взятых вдоль $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1, \ldots,$ и еще некоторого числа периодов, взятых вдоль малых кругов, обходящих простые полюса $F(xy)dx$. В частности, если запретить путям интегрирования пересекать 2ρ контуров $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}'_1, \ldots,$ то многозначность абелева интеграла связана только с простыми полюсами как и у обычной рациональной функции. Поэтому на так разрезанной x плоскости абелевы интегралы можно рассматривать как рациональные. Это дает повод к такой аналогии. На сфере с ρ ручками проведем ρ разрезов $C_1, \ldots, C_\rho$

поперек ручек и ρ разрезов $C_1', \ldots$ вдоль ручек. Тогда мы получим систему из 2ρ попарно пересекающихся разрезов, благодаря которым сфера с ручками превращается в односвязное множество. Эту модель и называют римановой поверхностью для абелевых интегралов.

Глава 5

Интегрирование в элементарных функциях

Интегралы
$$\int H_i(xy)dx$$
первого рода не берутся в элементарных функциях, хотя бы поскольку среди таковых нет функции всюду голоморфной. Поэтому, вообще говоря, интегралы от алгебраических функций, рациональных на кривой жанра ρ, не берутся в элементарных функциях. Развитая выше теория позволяет без труда вычислять интегралы тогда, когда это вообще возможно. При этом будем считать, что главная функция $H(xy, x'y')$ с дополнительными полюсами (a_ib_i) уже найдена способом, указанным в разделе 3.6.

5.1. Интегрирование в алгебраических функциях

Начнем с того, что теорема 4.3 дает решение старой задачи, о нахождении случаев, когда абелев интеграл может быть взять при помощи алгебраических функций.

Пусть задана рациональная функция $F(xy)$. В силу теоремы 4.3, ее интеграл является суммой алгебраической функции $R(xy)$, которая вычисляется явно по данной F, и некоторой линейной комбинации интегралов трех родов

$$\sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \int H(x_\nu y_\nu, xy)dx - \sum_{i=1}^{\rho}(g_i' \int H(xy)_i dx - g_i \int H'(xy)_i dx)$$

Следовательно, для алгебраичности $\int F(xy)dx$ достаточно выполнения равенств:

$$c_\nu = g_i = g_i' = 0.$$

Покажем, что это требование и необходимо.

Допустим, что выражение

$$\sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \int H(x_\nu y_\nu, xy)dx - \sum_{i=1}^{\rho}(g_i' \int H(xy)_i dx - g_i \int H'(xy)_i dx)$$

с некоторыми c, g, g' алгебраической функцией. Это выражение в точке $(x, y) = (x_\nu, y_\nu)$ не имеет логарифмической особенности только тогда, когда $c_\nu = 0$. Выражение же

$$\sum_{i=1}^{\rho}(g_i' \int H(xy)_i dx - g_i \int H'(xy)_i dx)$$

является или однозначной функцией (x, y) или бесконечнозначной. В первом случае оно является рациональной функцией (x, y) и имеет полюса разве лишь в точках $(a_i b_i)$ и поэтому является константой.

Таким образом, установлено следующее следствие теоремы 4.3:

Теорема 5.1. Если интеграл от $F(xy)$ берется в алгебраических функциях, то

$$\int F(xy)dx = -\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{n>0} c_{\nu,-n}\left[H(xy, x_t^\nu y_t^\nu)\frac{dx_t^\nu}{dt}\right]_{t^{n-1}},$$

где центр (x^ν, y^ν) пары $(x_t^\nu y_t^\nu)$ пробегает все особые точки $F(xy)$, а коэффициенты вычисляются так

$$c_{\nu,-n} = -\frac{1}{n}\left[F(x_t^\nu y_t^\nu)\frac{dx_t^\nu}{dt}\right]_{t^{-n-1}}.$$

5.2. Интегрирование в элементарных функциях

Если интеграл берется в элементарных функциях, то, как показал Лиувилль[1], верно

$$\int F(xy)dx = R_0(xy) + A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy)$$

где A_i — комплексные числа, а R_i — рациональные функции. Покажем, что в этом случае алгебраическая часть $R_0(xy)$ совпадает с выражением $R(xy)$ из теоремы 4.3. В самом деле, в силу этой теоремы верно

$$\int F(xy)dx - R(xy) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu H(x_\nu y_\nu, xy) - \sum_{i=1}^{\rho}(g_i' H(xy)_i - g_i H'(xy)_i) =$$

$$= R_0(xy) - R(xy) + A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy).$$

Выражения $A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy)$ и интегралы от $H(x_\nu y_\nu, xy)$ не имеет полюсов, поэтому функция

$$R_0(xy) - R(xy)$$

обращается в бесконечность лишь там, где это делает функция

$$\sum_{i=1}^{\rho}(g_i' H(xy)_i - g_i H'(xy)_i)$$

Поэтому $R_0(xy) - R(xy)$ обращается в бесконечность разве лишь в точках (a_i, b_i) и то с первым порядком, то есть равна константе.

Теорема 5.2. Если интеграл берется в элементарных функциях, то

$$\int F(xy)dx = R_0(xy) + A_1 \ln R_1(xy) + \cdots + A_s \ln R_s(xy)$$

где A_i — некоторые комплексные числа, а R_i — рациональные функции, причем алгебраическая часть дается выражением

$$R_0(xy) = -\sum_{\nu=1}^{r} \sum_{n>0} c_{\nu,-n} \left[H(xy, x_t^\nu y_t^\nu) \frac{dx_t^\nu}{dt} \right]_{t^{n-1}},$$

[1] Liouville, Joseph. Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes // Crelles Journal d. M. Bd. 13. S. 93 - 118.

где центр (x^ν, y^ν) пары $(x_t^\nu y_t^\nu)$ пробегает все особые точки $F(xy)$ и

$$c_{\nu,-n} = -\frac{1}{n}\left[F(x_t^\nu y_t^\nu)\frac{dx_t^\nu}{dt}\right]_{t^{-n-1}}.$$

На основании этой теоремы можно предложить алгоритм вычисления интеграла в элементарных функциях. Итак, пусть дана рациональная функция $F(xy)$, интеграл которой берется в элементарных функциях. Вычислим его алгебраическую часть $R(xy)$ и обозначим для краткости

$$G(xy) := F(xy) - \frac{dR(xy)}{dx}.$$

Тогда в силу теоремы Лиувилля

$$G(xy) = A_1\frac{1}{R_1(xy)}\frac{dR_1(xy)}{dx} + \dots + A_s\frac{1}{R_s(xy)}\frac{dR_s(xy)}{dx}, \qquad (5.1)$$

где A_i — неизвестные комплексные числа, а R_i — неизвестные рациональные функции.

Правая часть этого соотношения имеет особенности в тех точках, в которых R_i обращается в нуль или в бесконечность. Если

$$R(x_t y_t) = t^k(r + \dots), \quad r \neq 0,$$

то

$$\frac{dR(x_t y_t)}{R(x_t y_t)} = \frac{kt^{k-1}(r + \dots)}{t^k(r + \dots)}dt = t^{-1}k(1 + t\mathfrak{P}(t))dt.$$

Поэтому в правой части (5.1) могут быть только простые полюса, и значит функция $G(xy)$ имеет полюса только первого порядка в том смысле, что

$$\left[G(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)})\frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right]_{t^{-p}} = 0, \quad p > 1.$$

Для вычетов же соотношение (5.1) дает

$$c_\nu = \left[G(x_t^{(\nu)} y_t^{(\nu)})\frac{dx_t^{(\nu)}}{dt}\right]_{t^{-1}} = k_{1,\nu}A_1 + \dots k_{s,\nu}A_s,$$

$k_{i,\nu}$ — порядок нуля или минус порядок полюса функции R_i в точке (x_ν, y_ν). Для краткости далее нулем отрицательного порядка будем называть полюс того же порядка, взятого с обратным знаком.

Множество всевозможных комплексных чисел вида

$$n_1 A_1 + \cdots + n_s A_s$$

с рациональными n_i образует линейное пространство $\mathfrak{L}$ над полем рациональных чисел размерности $p \leq s$, а всевозможные числа

$$\sum n_\nu c_\nu$$

— его линейное подпространство $\mathfrak{M}$ размерности $q \leq p$. Всегда существует такой базис $B_1, \dots B_p$, что числа A_i и c_ν являются линейными комбинациями B_i с целыми коэффициентами, причем в выражения для c_ν входят только $B_1, \dots, B_q$. Тогда

$$\begin{aligned} \int G(xy)dx = \sum A_i \ln R_1(xy) = B_1(\sum n_{1j} \ln R_j(xy)) + \cdots = \\ = B_1 \ln R'_1(xy) + \cdots + B_p \ln R'_p(xy), \end{aligned} \tag{5.2}$$

где R'_i — некоторые рациональные функции (x, y).

Пусть (x_t, y_t) описывает окрестность нуля или полюса R'_p, тогда при некоторых целых k_i верно

$$\left[G(x_t y_t)\frac{dx_t}{dt}\right]_{t^{-1}} = k_1 B_1 + \dots k_p B_p, \quad k_p \neq 0.$$

Коль скоро вычеты G выражаются через первые q чисел B_i, то в случае $q < p$ между $B_1, \dots, B_p$ имеется нетривиальное линейное соотношение с целыми коэффициентами, что невозможно. Поэтому $q = p$ и линейное пространство $\mathfrak{L}$ совпадает со своим подпространством $\mathfrak{M}$.

Это обстоятельство позволяет по данной функции $G(xy)$ найти числа B_i с точностью до мультипликативной константы. Именно, пусть $C_1, \dots C_p$ —

базис линейного пространства над полем рациональных чисел всех чисел, "натянутого" на вычеты c_ν и пусть c_ν имеют в нем целые координаты $m_{i,\nu}$:

$$c_\nu = m_{1,\nu}C_1 + \cdots + m_{p,\nu}C_p.$$

Тогда базис $B_i = C_i/k$ с достаточно большим натуральным k удовлетворяет условию: некоторые неизвестные элементы A_i имеют в этом базисе целые координаты.

Обратимся теперь к нулям и полюсам R'_i. Если в центре (a, b) пары (x_t, y_t) функция $G(xy)$ не имеет полюса, а некоторые из функций R'_i имеют нули или полюса, то имеются такие целые числа k_i, среди которых есть отличные от нуля, что

$$0 = k_1B_1 + \cdots + k_pB_p.$$

Это не совместимо с линейной независимостью B_i над полем рациональных чисел. Поэтому нули и полюса функций $R'_i(xy)$ суть полюса $G(xy)$. Обозначим их как $(x_1y_1), \ldots$. Вычисляя вычеты правой и левой частей (5.1) в точке (x_ν, y_ν), имеем

$$c_\nu = k_{1,\nu}B_1 + \cdots + k_{p,\nu}B_p;$$

откуда

$$k_{i,\nu} = km_{i,\nu}.$$

Таким образом, функции R'_i имеют нули и полюса только в полюсах $G(xy)$ и их порядки известны с точностью до мультипликативной константы k.

Используя метод, изложенный в разделе 3.5, можно построить функции $R''_i(xy)$, имеющие нули и полюса в точках $(x_1, y_1), \ldots$ соответственно с порядками $lk_{i,1}, \ldots$. Здесь натуральное число l подбирается как наименьшее число, при котором все указанные функции существуют. Такое число существует, поскольку при $l = k$ неизвестные нам функции R'_i обладают указанными свойствами. Заметим теперь, что производная по x выражения

$$k \ln R''_i(xy) - l \ln R'_i$$

не имеет особенностей, поэтому

$$R_i' = \mathrm{const}(R_i'')^{k/l}.$$

В силу (5.2) можно записать

$$\int G(xy)dx = \frac{B_1 k}{l}\ln R_1''(xy) + \cdots = \frac{C_1}{l}\ln R_1''(xy) + \cdots + \frac{C_p}{l}\ln R_p''(xy).$$

В этом выражении функции R_i'' и коэффициенты C_i и l являются известными, вычисляемыми как только дана функция G. Таким образом, всегда можно вычислить и логарифмическую часть интеграла от $F(xy)$, если только этот интеграл берется в элементарных функциях.

На примере проблемы интегрирования в элементарных функциях можно весьма точно указать весьма странное свойство лекций Вейерштрасса. В них решено много важнейших и старейших проблем, однако об этом прямо ничего не сказано. Вероятно, В. Виртингер[2] первым отметил, что теория главной функции дает и при том весьма простое решение проблемы интегрирования в конечном виде, сам же Вейерштрасс не счел нужным обратить чье-либо внимание на это обстоятельство. Это замечание, однако, осталось незамеченным последующими исследователями. В 1916 Харди (Hardy) высказал мнение, что за конечное число шагов невозможно выяснить берется ли эллиптический интеграл в элементарных функциях. Затем спустя пол века, в 1970-х годах, Риш (Risch) предложил такой алгоритм, это — очень сложный алгоритм со множеством исключительных случаев, а перечень лемм, необходимых для его обоснования, занимает несколько страниц.[3]

[2] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Art. 2 B 2 (1901)

[3] Дэвенпорт Дж. Интегрирование алгебраических функций. М.: Мир, 1985. Гл. 4.