Основания аналитической теории дифференциальных уравнений

М. Д. Малых

Материалы к факультативному курсу лекций,
читаемому на кафедре математики физического факультета МГУ.
Москва, 2003-2008 гг.

Оглавление

Глава 1

Решения в виде степенного ряда

1.1. Решение как формальный степенной ряд

Обратимся к начальной задаче

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x|_{t=t_0} = x_0.$$

и будем для простоты считать, что $f(x,t)$ — полином по x и t. Выясним, удовлетворяет ли ей выражение

$$x = \sum_{n=1}^{N} a_n (t-t_0)^n$$

с комплексными коэффициентами a_n. Во-первых, $a_0 = x_0$, далее, при $t = t_0$ дифференциальное уравнение дает

$$a_1 = f(a_0, t_0)$$

Дифференцируя уравнение один раз, получим

$$d^2x = \mathfrak{D} f dt^2,$$

где

$$\mathfrak{D} f(\dot{x}, x, t) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

Отсюда при $t = t_0$ имеем

$$2a_2 = \mathfrak{D} f|_{x=x_0,\, t=t_0}$$

Действуя так далее, получим

$$a_n = \frac{1}{n!}\mathfrak{D}^{n-1} f|_{x=x_0,\, t=t_0} \quad (n = 1, 2 \dots)$$

Таким образом, для существования решения в виде полинома по t необходимо и достаточно, чтобы эти рекуррентные выражения на $N+1$-ом шаге оборвались, то есть чтобы было

$$\mathfrak{D}^n f|_{x=x_0,\, t=t_0} = 0 \quad (n = N, N+1, \dots).$$

Отсюда напрашивается предположение, что в общем случае ряд

$$x = \sum \frac{1}{n!}\mathfrak{D}^{n-1} f|_{x=x_0,\, t=t_0}(t-t_0)^n$$

можно принять за решение. Для этого нужно только, чтобы для формального степенного ряда

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$

было определено $f(x,t)$, его производная и значение при $t = t_0$.

Но мы и в самом деле можем рассмотреть множество всевозможных выражений

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (t-t_0)^n$$

которые складываются и умножаются так

$$\sum a_n (t-t_0)^n + \sum b_n (t-t_0)^n = \sum (a_n + b_n)(t-t_0)^n$$

и

$$\sum a_n (t-t_0)^n \sum b_n (t-t_0)^n = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)(t-t_0) + \dots$$

Производную для этого класса тоже можно ввести ни одним словом не обмолвившись о бесконечно малом, просто положив

$$\frac{d}{dt}\sum a_n (t-t_0)^n = \sum n a_n (t-t_0)^{n-1}. \tag{1.1}$$

Наконец коэффициент a_0 можно условиться называть значением $\sum a_n(t-t_0)^n$ при $t = t_0$. Это множество с так введенными операциями теперь называют кольцом формальных степенных рядов переменно $t - t_0$. При этом формальный ряд в некотором смысле „выражение“, но уж точно не функция и уж точно не „выражение для счета “. Доказанное можно сформулировать так:

Теорема 1. [Лагранж и Лакруа, 1798] Любое дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = f(x,t)$$

с начальным условием $x|_{t=t_0} = x_0$ и целой рациональной правой частью $f(x,t)$ имеет и притом единственное решение в кольце формальных степенных рядов, а именно

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathfrak{D}^{n-1} f|_{x=x_0,\, t=t_0}(t-t_0)^n.$$

Эта теорема без труда переносится на системы дифференциальных уравнений и в простых случаях дает хорошо известные результаты. Напр., для уравнения $\dot{x} = x$ она доставляет решение

$$x = x_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = x_0 \exp(x),$$

а из этого можно развить всю теорию линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Доказанную теорему традиционно связывают с именами Лагранжа и Лакруа. Лакруа[1] указал на то, что решение дифференциального уравнения может быть приближено при помощи степенного ряда и затем рассмотрел несколько примеров линейных дифференциальных уравнений. В этих примерах получаются всюду сходящиеся ряды, вопрос же о смысл термина

[1] Lacroix, Sylvestr François. Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. 1 ed. Paris, 1798. Tome 2, § 594

приближение в общем случае остался не выясненным. Помимо этого способа Лакруа указывает и другие, напр., метод бесконечных дробей. В работах первой половины 19 века, вообще, трудно понять трактуются ли ряды как формальные выражения, как где-то сходящиеся или как то еще.

Эта теория была подвергнута строгой и не всегда справедливой критике. Поэтому подчеркнем, что она доставляет строгое и чисто алгебраическое (то есть не использующее бесконечно малое) доказательство того, что начальная задача разрешима в формальных степенных рядов. При этом вопрос о том, подпадают ли формальные степенные ряды под понятие функции просто не ставится, поскольку не ясно, что такой ряд ставит в соответствие значению $t \neq t_0$. На самом деле, странно лишь то, что доказательство Лагранжа является схемой доказательства существования решения в функциях, трактуемых общепринятым ныне способом.

1.2. Локальная теория Коши

Коши отказался от использования формальных рядов, и придал предыдущим выкладкам другой смысл[2]. Допустим, что решение начальной задачи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x|_{t=t_0} = x_0$$

существует, тогда коэффициенты его ряда Тейлора определены однозначно:

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathfrak{D}^{n-1} f|_{x=x_0,\, t=t_0} (t-t_0)^n.$$

С этой точки зрения, доказанное не есть ни теорема существования, ни теорема единственности. Если рассматривать только вещественные t, то гладкая функция e^{-1/t^2} имеет нулевой ряд Тейлора, то есть тот же, что и функция $f(t) = 0$.

[2]См., напр., Cauchy A.L. Œuvres. II ser. T. 11, Paris 1913, p. 399.

Первоначально Коши хотел найти правильное доказательство существования и единственности решения начальной задачи. Спустя семь лет, в 1842 г. Коши перестал трактовать ряд из теоремы 1 как ряд Тейлора. Именно, выражение

$$f = \sum a_n(t - t_0)^n$$

можно рассматривать как правило, полагая

$$f(t) = \lim_{N=\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(t - t_0)^n$$

если этот предел существует. На самом деле, это не единственный способ, к примеру можно было бы принять за определение нижний предел и т.д. Как раз в начале 19 века удалось доказать, что область сходимости всегда круг и что обычное определение производной совпадает с формальной, то есть

$$\lim_{h=0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{N=\infty} \sum_{n=1}^{N} na_n(t - t_0)^{n-1}$$

Утверждение о сходимости ряда из теоремы 1 в некоторой области $|t-t_0| \leq h$ называют теоремой Коши.

Теорема 1 (Коши, 1842 г.[3]). Рассмотрим начальную задачу (задачу Коши): найти функций $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x,t), \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x,t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x,t), \end{cases} \tag{1.2}$$

где t — независимая переменная, $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ — функции этой переменной, а f_m — функции x и t, и принимающих при $t = t_0$ заданные значения

[3] В открытой печати первый мемуар Коши, содержащий это утверждение, появился в 1842 г. (см. Cauchy A.L. Œuvres. I ser. T. 7, Paris 19, p. 1.), одновременно с этим указанную теорему доказал Вейерштрасс (см. Weierstrass K. Math. Werke. T. 1, Abh. 4).

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0, \dots, x_n = x_n^0. \tag{1.3}$$

Для краткости условимся писать просто x вместо $(x_1, \dots, x_M)$ и, стало быть, саму задачу записывать так

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x|_{t=t_0} = x_0, \tag{1.4}$$

опуская индекс.

Пусть функции $f_m(x,t)$ по абсолютному значению не превышают фиксированного числа $\mathfrak{M}$ в окрестности начальных данных $t_0,\ x_0$ вида

$$|t - t_0| \le a, |x_1 - x_1^0| \le b, \dots, |x_n - x_n^0| \le b,$$

и в этой области представимы рядами по натуральным степеням $t - t_0, x_1 - x_1^0, \dots, x_M - x_M^0$, тогда существует ряд вида

$$x_m = x_m^0 + a_m(t - t_0) + b_m(t - t_0)^2 + \dots, \quad (m = 1, \dots, n) \tag{1.5}$$

сходящейся в области $|t - t_0| < h$, где

$$h = a(1 - e^{-\frac{b}{\mathfrak{M}a(n+1)}}),$$

удовлетворяющей начальной задаче. Более того, не существует другого ряда вида (1.5), удовлетворяющего начальной задаче.

Сама формулировка теоремы Коши требует некоторых пояснений относительно степенных рядов нескольких переменных.

1.2.1. Степенные ряды нескольких комплексных переменных

Теоремы теории степенных рядов нескольких переменных можно сформулировать и доказать в полной аналогией с общеизвестными теоремами теории рядов одной переменной, если из N независимых переменных, скажем

$z_1, \ldots, z_N$, образовать „векторную переменную“$z = (z_1, \ldots, z_n)$, а выражение вида

$$\sum c_{n_1,\ldots,n_N}(z_1)^{n_1} \ldots (z_N)^{n_N}$$

записать как

$$\sum c_n z^n.$$

Здесь мультииндекс $(n_1, \ldots, n_N)$ обозначен как n, коэффициент $c_{n_1,\ldots,n_N}$ — как c_n, а степень $(z_1)^{n_1} \ldots (z_N)^{n_N}$ — как z^n. Примем еще так введенное сравнение мультииндексов: $n > m$, если и только если $n_1 > m_1, \ldots, n_N > m_N$.

Если в сумме числа $n_1, \ldots n_N$ принимают целые неотрицательные значения, то ее называют рядом по натуральным степеням z или короче степенным рядом и обозначают по предложению Вейерштрасса как $\mathfrak{P}(z_1, \ldots, z_N)$ или $\mathfrak{P}(z)$. При этом, для того, чтобы различать степенные ряды, будем ставить у символа $\mathfrak{P}$ нижние индексы, напр, писать $\mathfrak{P}_1(z)$ и $\mathfrak{P}_2(z)$.

Теперь обычное определение из теории рядов одной переменной — *говорят, что ряд $\mathfrak{P}(z)$ сходится в точке $z = a$, если существует такое число b, что разность*

$$\left|\sum_{n=0}^{M} c_n z^n - b\right|$$

становится меньше любого заданного числа ε, лишь только M больше некоторого $M_0(\varepsilon)$ — сохраняет смысл, если понимать под M и M_0 — мультииндексы. Именно так и понимается сходимость рядов для правый частей в теореме Коши.

Следует подчеркнуть, что требуя в условии этой теоремы, чтобы функции $f_m(x,t)$ в области вида

$$|t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b$$

были представимы степенными рядами, мы можем считать переменные t, x вещественными или комплексными, однако на самом деле из сходимости при вещественных t и x следует сходимость при комплексных и мы воспользуемся этим при доказательстве теоремы Коши.

Дело в том, что, *если ряд вида* $\mathfrak{P}(z_1, \dots, z_N)$ *сходящийся при* $z = a$, *то он сходится и при всех* z *из области*

$$|z_1| < |a_1|, \dots, |z_N| < |a_N|.$$

Поэтому, если функции $f_m(t, x)$ представимы рядами вида $\mathfrak{P}_m(t - t_0, \dots)$ на сегментах $|t - t_0| \le a, \dots$, то тоже верно и в кругах $|t - t_0| \le a, \dots$ на комплексных плоскостях.

Доказательство этого утверждения повторяет случай $N = 1$.

Из сходимости $\mathfrak{P}(a) = \sum c_n a^n$ следует существование $\mathfrak{M} = \sup\limits_n |c_n a^n|$, но тогда при $|z_1| \le q_1 |a_1|, \dots$ ряд $\mathfrak{P}(z)$ мажорирутся рядом

$$\sum |c_n a^n| |z/a|^n \le \mathfrak{M} \sum q^n$$

Появившейся здесь ряд

$$\sum_{n_1, \dots, n_N \ge 0} q_1^{n_1} \dots q_N^{n_N}$$

при $0 < q_i < 1$ сходится к $(1 - q_1)^{-1} \dots (1 - q_N)^{-1}$, поскольку отношение

$$\frac{\sum\limits_{n_1=0}^{k_1} \cdots \sum\limits_{n_N=0}^{k_N} q_1^{n_1} \dots q_N^{n_N}}{(1 - q_1) \dots (1 - q_N)} = \frac{\sum\limits_{n_1=0}^{k_1} q_1^{n_1}}{(1 - q_1)} \cdots \frac{\sum\limits_{n_N=0}^{k_N} q_N^{n_N}}{(1 - q_N)}$$

стремиться к единицы при $K \to \infty$ в силу известных свойств геометрической прогрессии.

Для проверки выполнения условия теоремы Коши при заданных $f_m(x, t)$ полезно иметь в виду, что последнее может быть заменено на следующие: функции $f_m(x, t)$ непрерывны и дифференцируемы в области

$$|t - t_0| \le a, |x_1 - x_1^0| \le b, \dots, |x_n| \le b.$$

Это опять связано с общим фактом из теории рядов: *если функция* $F(z_1, \dots, z_n)$ *непрерывна и дифференцируема по* z_i *в области* G_i *комплексной плоскости* z_i, $(i = 1, \dots, n)$, *то она может быть разложена в ряд* *вида* $\mathfrak{P}(z_1, \dots, z_N)$*, сходящийся в кругах, касающихся* $G_1, \dots$. Такую функцию F называют голоморфной и стало быть, теорема утверждает, что голоморфную функцию можно разложить в ряд.

Для доказательства возьмем произвольную точку a из этой области и окружим точку $z_1 = a_1$ плоскости z_1 контуром $\mathfrak{C}_1$, тогда интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_1} \frac{F(z_1, \dots, z_N)dz_1}{(z_1 - a_1)}$$

не зависит от пути и равен $F(a_1, z_2, \dots, z_n)$. Окружив $z_2 = a_2$ плоскости z_2 контуром $\mathfrak{C}_2$, опять видим, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{C}_2} \frac{F(a_1, z_2, \dots, z_N)dz_2}{(z_2 - a_2)}$$

не зависит от пути и равен $F(a_1, a_2, z_3, \dots, z_N)$. Действуя так далее, мы придем к соотношению

$$F(a) = \frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\mathfrak{C}_N} \dots \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \frac{F(z)dz_1 \dots dz_N}{(z_1 - a_1) \dots (z_N - a_N)},$$

где контура $\mathfrak{C}_i$ могут быть выбраны как угодно, лишь бы точка $z_i = a_i$ лежала внутри $\mathfrak{C}_i$. Это соотношение является обобщением интегральной формулы Коши.

Окружим теперь $z_1 = 0, \dots, z_N = 0$ кругами $|z_1| \le r_1, \dots$ которые лежат целиком в $G_1, \dots$ и проведем контура $\mathfrak{C}_1, \dots$ вне этих кругов. Тогда для точки $z = (z_1, \dots)$, координаты которой лежат в этих кругах, верно

$$F(z) = \frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\mathfrak{C}_N} \dots \int\limits_{\mathfrak{C}_1} \frac{F(\xi)d\xi_1 \dots d\xi_N}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_N - z_N)}$$

Остается заметить, что дробь

$$\frac{1}{(\xi_1 - z_1) \dots (\xi_N - z_N)} = \frac{1}{\xi_1 \dots \xi_N}\frac{1}{(1 - z_1/\xi_1) \dots (1 - z_N/\xi_N)}$$

можно разложить в ряд

$$\frac{1}{(\xi_1 - z_1)\dots(\xi_N - z_N)} = \frac{1}{\xi_1\dots\xi_N}\sum_{n_1,\dots,n_N\ge 0}\left(\frac{z_1}{\xi_1}\right)^{n_1}\dots\left(\frac{z_N}{\xi_N}\right)^{n_N}$$

который мажорируется рядом

$$\sum_{n_1,\dots,n_N\ge 0} q_1^{n_1}\dots q_N^{n_N}$$

где $0 < q_i = r_i/R_i < 1$, а R_1 — минимальное значение $|z_1|$ на контуре $\mathfrak{C}_1$ и т.д. Этот последний, как мы знаем, сходится, а значит, исходный ряд сходится равномерно по ξ_i, лежащих на $\mathfrak{C}_i$, поэтому интегрирование по $\xi_1,\dots$ и суммирование можно поменять местами. Это позволяет представить $F(z)$ в виде ряда по натуральным степям z в кругах $|z_1| \le r_1,\dots$, которые могут сколь угодно близко подходить к границам $G_1,\dots$, что и тр. д.

1.2.2. Доказательство теоремы Коши

Доказательство теоремы 1 было дано самим Коши путем построения мажоранты. Мы изложим его с некоторыми упрощениями, принадлежащими, по-видимому, авторам первых учебников по теории функций Брио и Буке (Briot et Bouquet).[4]

Сделав замену переменных $x'_m = x_m - x_m^0$ и $t' = t - t_0$, мы сведем все к частному случаю задачи

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \tag{1.6}$$

с начальными условиями при $t = 0$ заданные значения

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\dots,x_n = 0. \tag{1.7}$$

(i) По условию в рассматриваемой области

$$|t| \le a, |x_1| \le b,\dots,|x_M| \le b,$$

[4]См. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.

функции $f_m(x,t)$ даются сходящимися рядами

$$f_m(x,t) = \sum_{m_0,\dots,m_n \geq 0} A^{(m)}_{m_0,\dots,m_n} t^{m_0} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

Если существует сходящийся степенно́й ряд

$$x_m = c_1^{(m)} t + c_2^{(m)} t^2 + \dots = t\mathfrak{P}(t),$$

доставляющий решение (1.6), то его коэффициенты можно выразить через коэффициенты A функций $f(x,t)$ однозначно. В самом деле, подставляя этот ряд в

$$\dots x_m = f_m(x,t)$$

имеем

$$c_1^{(m)} + 2c_2^{(m)} t + \dots = f_m(c_1 t + c_2 t^2 + \dots, t)$$

Откуда при $t = 0$ получается

$$c_1^{(m)} = A^{(m)}_{0\dots 0}$$

Дифференцируя последнее тождество по t один раз, получим

$$2c_2^{(m)} + 3c_3^{(m)} t + \dots = \sum_{k=1}^{n} \left(f_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial t} \right) f_m \Big|_{x = c_1 t + c_2 t^2 + \dots}$$

и при $t = 0$

$$2c_2^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} A^{(k)}_{0\dots 0} A^{(m)}_{0\dots 1 \dots 0} + A^{(m)}_{10\dots 0}.$$

Действуя так далее, выразим

$$c_k^{(m)} = \varphi_k^{(m)}(A), \tag{1.8}$$

где правая часть представляет собой целую рациональную функцию коэффициентов A_k с $k_0 + \dots k_n < k$. Поэтому решение в виде ряда определено однозначно. Впрочем, это размышление повторяет проделанное выше при доказательстве теоремы 1.

(ii) Определим по формуле (1.8) числа $c_k^{(m)}$ и подставим выражения

$$x_k = c_1^{(k)} t + c_2^{(k)} t^2 + \dots \quad (k = 1, \dots n) \tag{1.9}$$

в

$$\dot{x}_m - f_m(x, t).$$

В результате получим функцию переменной t, все производные которой в нуле в силу выбора коэффициентов c равны нулю, поэтому эта функция равна нулю тождественно и, значит, если ряд с так выбранными коэффициентами c сходится, то он доставляет решение исходной задаче Коши.

Все дело, стало быть, сводится к построению мажоранты для рядов

$$c_1^{(m)} t + c_2^{(m)} t^2 + \dots .$$

С этой целью рассмотрим мажоранту для $f_m(x, t)$, то есть сходящийся в рассматриваемой области ряд

$$\psi_m(x, t) = \sum B_k^{(m)} t^{k_0} \dots x_n^{k_n},$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенству

$$|A_k^{(m)}| \le B_k^{(m)}.$$

Поскольку в выражении для c_k нет деления, верно

$$|c_1^{(m)}| = |A_{0\dots0}^{(m)}| \le B_{0\dots0}^{(m)} = \varphi_1^{(m)}(B),$$

$$|c_2^{(m)}| \le \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |A_{0\dots0}^{(k)}| \, |A_{0\dots1\dots0}^{(m)}| + |A_{10\dots0}^{(m)}| \le$$
$$\le \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} B_{0\dots0}^{(k)} B_{0\dots1\dots0}^{(m)} + B_{10\dots0}^{(m)} = \varphi_2^{(m)}(B)$$

и вообще,

$$|c_k^{(m)}| \le \varphi_k^{(m)}(|A|) \le \varphi_k^{(m)}(B).$$

Поэтому зная мажранту $\varphi_m(x,t)$ для $f_m(x,t)$ можно построить мажоранту

$$x_k = \gamma_1^{(k)} t + \gamma_2^{(k)} t^2 + \ldots \tag{1.10}$$

для ряда (1.9), рассчитав γ по томе же формулам (1.8), что и коэффициенты c, взяв вместо коэффициентов A ряда $f(x,t)$, коэффициенты B ряда $\psi(x,t)$.

Если подобрать мажоранту ψ так, чтобы задачу Коши

$$\dot{x} = \psi(x,t), \quad x|_{t=0} = 0 \tag{1.11}$$

имела голоморфное в окрестности нуля решение $x = \varphi(t)$, которое можно было бы выразить в элементарных функциях, то в силу (i) это решение должно совпадать с рядом (1.10). Таким образом, ряд (1.9) сходится и доставляет решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x|_{t=0} = 0$$

в том круге, в котором сходится голоморфное в окрестности нуля решение задачи Коши, в которой $f(x,t)$ заменена своей мажорантой.

С тем, чтобы уравнения (1.11) интеграровались в элементарных функциях, построим для $f_m(x,t)$ мажоранту $\psi(x,t)$, не зависящую от m. Тогда система сведется к одному уравнению первого порядка. Сделать это не трудно, если заметить, что интегральная формула Коши в применении к ряду

$$\mathfrak{P}(z) = \sum c_n z^n,$$

сходящемуся в области $|z_1| \leq r_1, \ldots$, дает выражение для коэффициентов

$$c_n = \frac{1}{(2\pi i)^N} \int\limits_{|z_N|=r_n} \cdots \int\limits_{|z_1|=r_1} \frac{\mathfrak{P}(\xi) d\xi_1 \ldots d\xi_N}{\xi_1^{n_1+1} \ldots \xi_N^{n_N+1}}$$

и, в частности, оценку

$$|c_{n_1,\ldots,n_N}| \leq \frac{\mathfrak{M}}{r_1^{n_1} \ldots r_N^{n_N}}$$

где $\mathfrak{M}$ — максимум ряда $\mathfrak{P}(z)$ в рассматриваемой области. Отсюда следует, что функции

$$f_m(x,t) = \sum_{m_0,\dots,m_n\geq 0} A^m_{m_0,\dots,m_n} t^{m_0} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

мажорируются рядом, в который разлагается функция

$$\frac{M}{(1-\frac{t}{a})(1-\frac{x_1}{b})\dots(1-\frac{x_n}{b})} = \psi(x,t)$$

Для выяснения круга сходимости мажоранты (1.10) заметим, что этот ряд является в силу (i) рядом Тейлора для решения начальной задачи

$$\left\{ \frac{dx_1}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = \psi(x,t), \right. \tag{1.12}$$

с начальными условиями при $t = 0$

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0, \dots, x_n = 0. \tag{1.13}$$

Найдем решение этой задачи явно. Из уравнений (1.12) сразу следует

$$\frac{dx_k}{dx_1} = 1,$$

поэтому в силу начальных условий (1.13) неизбежно

$$x_k = x_1$$

Подставляя это в уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\mathfrak{M}}{(1-\frac{t}{a})(1-\frac{x_1}{b})\dots(1-\frac{x_M}{b})}$$

получим

$$(1-\frac{x_1}{b})^M dx_1 = \frac{\mathfrak{M} dt}{(1-\frac{t}{a})}$$

Откуда сразу

$$\int\limits_0^{x_1} d\vartheta (1-\frac{\vartheta}{b})^n = \frac{\mathfrak{M}}{a} \ln{(1-\frac{t}{a})}$$

Интегрируя, находим

$$\frac{b}{(n+1)}((1-\frac{x_1}{b})^{n+1}-1)=\mathfrak{M}a\ln(1-\frac{t}{a})$$

или

$$x_1(t)=b\left(1-\sqrt[n+1]{1+\frac{\mathfrak{M}a(n+1)}{b}\ln(1-\frac{t}{a})}\right)$$

Подкоренное выражение является однозначной аналитической функцией в круге $|t|<a$, а корень (нас устраивает только его главное значение, при котором $x(0)=1-1$) из аналитической функции является однозначной аналитической функцией в круге, радиус которого есть модуль наиближайшего к нулю корня $t=\tau$ уравнения

$$1+\frac{\mathfrak{M}a(n+1)}{b}\ln(1-\frac{\tau}{a})=0$$

У этого уравнения один корень, именно

$$\tau=a(1-e^{-\frac{b}{\mathfrak{M}a(n+1)}})<a$$

Значит, разложения в ряд функций $x_m(t)=x_1(t)$ сходятся в круге $|t|<h$ и удовлетворяют задаче (1.12)-(1.13). В силу единственности ряда, удовлетворяющего задаче (1.12)-(1.13), этот ряд совпадает с рядом для мажоранты. Стало быть, исходные ряды $x_m=\sum c_k^{(m)}t^k$ сходятся в круге $|t|<h$, что и требовалось доказать.

1.3. Единственность решения

К сожалению, теорема Коши 1 не является теоремой единственности: мы все еще не доказали, что сходящийся ряд, доставляемый теоремой Коши, и бесконечно дифференцируемое вещественное решение не могут не совпадать.

Первое строгое доказательство этого утверждения было, видимо, указано Пикаром в 1860-х годах и состояло в доказательстве методом последовательных приближений единственности решения вдоль вещественной прямой в классе один раз непрерывно дифференцируемых функций. Однако, в 1880-х Поль Пенлеве обнаружил, что доказательство даже более общей теоремы единственности может быть усмотрено из теоремы Коши, а именно из простого *уточнения теоремы Коши*:

Теорема 2 (P. Painleve, ок. 1880[5]). Пусть функции $f(x,t)$ голоморфны в некоторой окрестности точки $(t,x) = (a,b)$, тогда существует ряд $x = \mathfrak{P}(t-a, \tau-a, \xi-b)$, сходящийся в некотором круге

$$|t-a| \le h, \quad |\tau-a| \le h, \quad |\xi-b| \le h,$$

который доставляет решение задачи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(\tau) = \xi.$$

Доказательство. Введем новые переменные

$$z = t-\tau, \quad w = x-\xi$$

тогда начальная задача примет вид

$$\frac{dw}{dz} = f(w+\xi, z+\tau), \quad w|_{z=0} = 0.$$

Пусть $f(x,t)$ голоморфна в круге

$$|t-a| \le r_1, \quad |x-b| \le r_2$$

и равномерно ограничена в этом круге константой $\mathfrak{M}$. Тогда если ограничить изменение (τ, ξ) кругом

$$|\tau-a| \le r_1/2, \quad |\xi-b| \le r_2/2$$

то в области

$$|z| \le r_1/2, \quad |w| \le r_2/2$$

[5] Painlevé P. Leçons sur la theorie analytique des equations differentielles. Paris, 1897. P. 335 // Œvres. T. 1. Paris, 1971; см. также Schlesinger L. Einfürung ... Berlin-Leipzig, 1922, S. 44-45

правая часть $f(w+\xi, z+\tau)$ голоморфна и равномерно ограничена константой $\mathfrak{M}$. Поскольку в мажоранту Коши входят как раз только $\mathfrak{M}$ и $r_1,\ r_2$, то задача

$$\frac{dw}{dz} = f(w+\xi, z+\tau), \quad w|_{z=0} = 0$$

имеет решение вида

$$w = c_1(\tau, \xi)z + \ldots,$$

сходящиеся в некотором круге $|z| \leq h \leq r_1$ равномерно и по z, и по (τ, ξ) из области

$$|\tau - a| \leq r_1/2, \quad |\xi - b| \leq r_2/2.$$

В силу теоремы о суммировании ряда w является аналитической функцией переменных $z, \tau\xi$, голоморфной в окрестности $z = 0, \tau = a, \xi = b$. Отсюда далее будет следовать, что ряд

$$x = \xi + c_1(\tau, \xi)(t - \tau) + \ldots$$

из теоремы Коши доставляет функцию переменных $t, \tau\xi$, голоморфную в окрестности $t = a, \tau = a, \xi = b$, что и требовалось доказать. □

Замечание 1.3.1. Теорема о суммировании ряда принадлежит Вейерштрассу состоит в следующем: Если на окружности

$$|z_1| = r_1, \ldots, |z_N| = r_N$$

ряды $\mathfrak{P}_i(z)$ сходятся и ряд

$$\mathfrak{P}_1(z) + \mathfrak{P}_2(z) + \ldots$$

сходится равномерно, то в каждой внутренней точке круга

$$|z_1| < r_1, \ldots, |z_N| < r_N$$

этот ряд можно записать как ряд по натуральным степеням z, то есть в виде $\mathfrak{P}(z)$.

Доказательство дословно повторяет случай $N = 1$, рассмотренный, напр., у А. Гурвица в «Теории функций».

Пусть

$$\mathfrak{P}_i(z) = \sum_{k \geq 0} c_k^{(i)} z^k$$

где k — мультииндекс. Если ряд сходится равномерно, то для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое Q, что

$$|\mathfrak{P}_{q+1}(z) + \dots \mathfrak{P}_{q+p}(z)| \leq \varepsilon \quad (q \geq Q)$$

на границе круга

$$|z_1| = r_1, \dots, |z_N| = r_N,$$

а значит, и внутри него. Поэтому

$$|c_k^{(q+1)} + \dots + c_k^{(q+p)}| \leq \frac{\varepsilon}{r^k}$$

и для любого $k = 0, 1, 2, \dots$ ряды

$$c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + \dots$$

сходятся к некоторым комплексным числам c_k. Полагая

$$\gamma_k^{(q)} = c_k - \left(c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + \dots + c_k^{(q)} \right)$$

имеем

$$|\gamma_k^{(q)}| \leq \frac{\varepsilon}{r^k}.$$

Поэтому ряд

$$\mathfrak{R}_q(z) = \sum \gamma_k^{(q)} z^k$$

мажорируется рядом

$$\sum \varepsilon \left(\frac{|z|}{r} \right)^k = \frac{\varepsilon}{(1 - |z_1|/r_1) \dots (1 - |z_1|/r_1)}$$

сходящимся в области

$$|z_1| < r_1, \dots, |z_N| < r_N$$

Отсюда следует, во-первых, что ряд

$$\sum c_k z^k = \mathfrak{P}_1(z) + \ldots \mathfrak{P}_q(z) + \mathfrak{R}_q(z)$$

тоже сходится в рассматриваемой области и является там рядом по натуральным степеням z, скажем $\mathfrak{P}(z)$, а, во-вторых, остаток $\mathfrak{R}_q$ можно сделать сколь угодно малым, увеличивая q при фиксированном z, и поэтому ряд $\mathfrak{P}(z)$ равен рассматриваемой сумме.

Теперь мы можем рассмотреть решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x|_{t=t_0} = x_0$$

как функцию $x = \varphi(t, t_0, x_0)$, голоморфную в некоторой окрестности точки $t = a,\ t_0 = a,\ x_0 = b$.

Эта функция как функция x_0 обладает замечательным свойством, которое выражает тождество

$$\varphi(t_1, t_2, \varphi(t_2, t_1, \xi)) = \xi. \tag{1.14}$$

Геометрически это означает, что *преобразование* $\eta = \varphi(t_2, t_1, \xi)$ *имеет обратное* $\varphi(t_1, t_2, \eta) = \xi$

В самом деле, пусть ξ — произвольное заданное число, лежащее в рассматриваемой окрестности $x_0 = b$, тогда $x = \varphi(t, t_1, \xi)$ — решение задачи

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_1) = \xi$$

Это решение сходится при $|t - t_1| \le h$ и, стало быть, при $t = t_2$ доставляет некоторое конечное значение $\varphi(t_2, t_1, \xi) = \eta$. Более того, $x = \varphi(t, t_1, \xi)$ может быть разложено в сходящийся ряд по степеням $t - t_2$

$$\varphi(t, t_1, \xi) = \eta + c_1(t - t_2) + \ldots,$$

который является решением задачи

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_2) = \eta$$

то есть совпадает с $x = \varphi(t, t_2, \eta)$. Но этот ряд сходится при $|t - t_2| \leq h$ и значит, в этой области

$$\varphi(t, t_2, \eta) = \varphi(t, t_1, \xi)$$

В частности при $t = t_1$ имеем

$$\varphi(t_1, t_2, \eta) = \varphi(t_1, t_1, \xi) = \xi,$$

что и требовалось доказать.

Применительно к $\psi(t, x) = \varphi(a, t, x)$ тождество (1.14) можно записать так

$$\psi(a, t, \varphi(t, a, \xi)) = \xi$$

Дифференцируя по t, имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} f_m(x, t) = 0$$

или

$$\mathfrak{D}\varphi = 0$$

во всех точках вида $(t, x) = (t, \varphi(t, a, \xi))$. Но

$$\varphi(t, a, \varphi(a, t, \eta)) = \eta$$

и поэтому любая точка (t, η), близкая к (a, b), может быть записана в виде $(t, x) = (t, \varphi(t, a, \xi))$ при $\xi = \varphi(a, t, \eta)$. В силу аналитичности, это означает, что $\mathfrak{D}\varphi = 0$ выполняется тождественно и при всех (t, x).

Пусть теперь $x = x(t)$ — произвольное решение системы уравнений (1.2), заданное вдоль некоторой непрерывной кривой $\mathfrak{C}$, выходящей из точки $t = a$. Будем считать, что это решение дифференцируемо во внутренних точках $\mathfrak{C}$ и что существует предел $x(a) = x_0$ вдоль $\mathfrak{C}$. Этому решению отвечает функция $\varphi(a, t, x(t)) \equiv y(t)$, причем

$$\dot{y} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x(t)) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(x(t), t) = 0$$

Но тогда $y(t) = \mathrm{const}$ или

$$\varphi(a,t,x(t)) = \varphi(a,a,x(t_0)) = x_0$$

откуда в силу (1.14) имеем

$$\varphi(t,a,x_0) = \varphi(t,a,\varphi(a,t,x(t))) = x(t),$$

то есть является решением, доставляемым теоремой Коши.

Теорема 3. (Пенлеве о единственности решения начальной задачи) Пусть $x(t)$ — решение системы уравнений (1.2), заданное вдоль некоторой непрерывной кривой $\mathfrak{C}$, выходящей из точки $t = t_0$, и пусть это решение дифференцируемо во внутренних точках $\mathfrak{C}$ и имеет предел $x = x_0$ при $t = t_0$ вдоль $\mathfrak{C}$. Если в окрестности точки $(t,x) = (t_0,x_0)$ правая часть уравнений (1.2) голоморфна, то решение $x(t)$ совпадает с рядом $x = \mathfrak{P}(t-t_0)$, который доставляет теорема Коши для решения задачи

$$\dot{x} = f(x,t), \quad x(t_0) = x_0,$$

вдоль дуги кривой $\mathfrak{C}$, который вырезает его круг сходимости.

Отметим еще, что любую функцию $\psi(x,y)$, удовлетворяющую подобно $\varphi(a,t,x)$ уравнению $\mathfrak{D}\psi = 0$, называют интегралом уравнения $\dot{x} = f(x,t)$, следуя понятной механической аналогии. Мы, стало быть, доказали существования n голоморфных интегралов.

1.4. Целые решения целого уравнения первого порядка

Вероятно, не стоит подробно объяснять, что теорема Коши 1 является лишь локальной теоремой существования, и не дает того, что хотелось. Удивительно то, что, вообще, нельзя сначала ограничится «гладким» случаем, когда правые части

$$\dot{x} = f(x,t)$$

и само решение $x(t)$ при любых начальных данных даются всюду сходящимися рядами (целыми функциями).

Теорема 4 (Реллих Ф., 1940 г.[6]). Пусть в дифференциальном уравнении $\dot{x} = f(x,t)$ правая часть является всюду сходящимся степенным рядом по x, t (целой функцией). Если имеется два решения $x = u(t)$ и $x = v(t)$, которые являются целыми функциями t, то любое другое целое решение $x = w(t)$ имеет вид

$$w(t) = u(t) + (v(t) - u(t))c$$

при надлежащим образом выбранной константе c. Если $f(x,t)$ не является линейной функцией x, то имеется не более чем счетное число констант c_n, при которых выражение

$$u(t) + (v(t) - u(t))c_n$$

является решением и множество c_n не может иметь конечной предельной точки.

Доказательство. Допустим, что существует три целых решения $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$. Тогда в силу теоремы Коши разность $u(t) - v(t)$ сюду отлична от нуля и тоже верно для $w(t) - v(t)$. Поэтому выражение

$$\frac{w(t) - v(t)}{u(t) - v(t)}$$

является целой функцией, которая нигде не обращается в нуль. Она не может и принять значение 1, поскольку тогда было бы $w(t) = u(t)$ при некотором t. В силу теоремы Пикара эта функция неизбежна постоянна, то есть

$$\frac{w(t) - v(t)}{u(t) - v(t)} = c$$

[6] Rellich, Fr. Über die ganzen Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung // Math. Ann. Bd. 117 (1940), p. 587 - 589; см. также Виттих Г. Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М: ГИФМЛ, 1950, с. 114.

или

$$w(t) = u(t) + (v(t) - u(t))c.$$

Если существует бесконечно много констант c_n, при которых выражение

$$u(t) + (v(t) - u(t))c_n$$

является решением, то (при любом фиксированном t) равенство

$$f(x,t) = \dot{u}(t) + \frac{\dot{v}(t) - \dot{u}(t)}{v(t) - u(t)}(x - u(t))$$

верно при всех $x = x_n = u(t) + (v(t) - u(t))c_n$. Поскольку $v(t) - u(t) \neq 0$, последовательность x_n обязательно имеет конечные точки сгущения, если их имеет c_n. В этом случае равенство

$$f(x,t) = \dot{u}(t) + \frac{\dot{v}(t) - \dot{u}(t)}{v(t) - u(t)}(x - u(t))$$

верно при всех x, t, то есть $f(x,t)$ является линейной функцией x. □

Сделаем еще несколько замечаний. Во-первых, линейное дифференциальное уравнение с целыми коэффициентами действительно всегда имеет только целые решение (это легко получить методом разделения переменных). Во-вторых, всегда существует дифференциальное уравнение с целой правой частью, имеющее бесконечную серию целых решений

$$u(t) + (v(t) - u(t))c_n$$

при любых заданных $u(t), v(t)$ и c_n. Для этого можно взять

$$f(x,t) = \dot{u}(t) + \frac{\dot{v}(t) - \dot{u}(t)}{v(t) - u(t)}(x - u(t)) + (v(t) - u(t))g\left(\frac{x - u(t)}{v(t) - u(t)}\right),$$

где $g(z)$ — произвольная целая функция с нулями $0, 1, c_1, c_2, \ldots$.

Теорема Реллиха позволяет сразу понять существенное отличие теорий линейных и нелинейных уравнений: общее решение $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ нелинейного уравнения обязано иметь особенности, положение которых зависит от начальных данных. Простейший пример доставляет уравнение

$$\dot{x} + x^2 = 0,$$

общее решение которого есть

$$x = \frac{1}{t - c}$$

а единственное целое решение есть $x = 0$ (соответствующее $c = \infty$).

Глава 2

Решения как аналитические функции

2.1. Рациональные дифференциальные уравнения

Пуанкаре как то ехидно заметил, что про решение произвольного дифференциального уравнения можно с уверенностью сказать, что оно произвольное. Поэтому для построения теории дифференциальных уравнений нужно наложить некоторые условия на сами дифференциальные уравнения и, коль скоро, мы хотим построить глобальную теорию, то эти условия не должны быть локальными как в теореме Коши, поскольку, как указывает теорема 4 Реллиха, нельзя начать с рассмотрения случая, когда условия теоремы Коши выполнены всюду.

Практически все уравнения, встречающиеся в приложениях, можно свести к системе вида

$$\{\dot{x}_1 = f_1(x;t), \ldots \dot{x}_n = f_n(x,t), \tag{2.1}$$

или кратко, опуская индексы,

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{2.2}$$

где t — независимая переменная, $x_1,\ x_2, \ldots, x_n$ — функции этой переменной, а f_i — рациональные функции $x_1, \ldots, x_n$ с коэффициентами, зависящими от t. Обычно, эти коэффициенты — элементарные функции, но для дальнейшего достаточно принять, что эти коэффициенты — какие угодно аналитические функции t, голоморфные и однозначные в некоторой односвязной области G. Описанную систему дифференциальных уравнений будем называть *системой дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной,* или короче *системой рациональных дифференциальных уравнений.*

2.2. Аналитические функции как решения задачи Коши

В курсе теории функций комплексной переменной уделяют большое внимание разложению аналитической функции, заданной во всей комплексной плоскости за исключением дискретного набора точек, в ряд Тейлора вида $\mathfrak{P}(t-t_0)$. Теорема Коши, наоборот, дает сразу разложение решения в виде ряда $x = \mathfrak{P}(t-t_0)$, сходящегося в некотором круге $|t-t_0| < r$. Решение — функции $x_m(t)$, удовлетворяющие начальной задаче, а функция — это правило, по которому точке из некоторой *фиксированной* области ставится в соответствие некоторое число (значение функции). Если бы хотели найти решение с какой угодно областью определения, то ряды, найденные в теореме Коши, можно было бы считать решением, и в этом смысле задача Коши разрешима локально. Но аналитические выражения и в первую очередь рациональные функции обладают как раз тем свойством, что их область определения задается самим выражением, а не предписывается нами. Применительно к начальной задаче Вейерштрасс (1840 г.)[1] предложил такой путь, приведший его понятию аналитической функции.

В силу теоремы Коши система (2.2) с начальными условиями $x(t_0) = x_0$ имеет единственное голоморфное решение вида $x = \mathfrak{P}(t-t_0)$, которое

[1] Weierstrass K. Math. Werke. T. 1, Abh. 4. Эта работа не была во время опубликована, и в 1894 для многих стало сюрпризом, что понятие аналитической функции сам Вейерштрасс вывел из нужд теории дифференциальных уравнений.

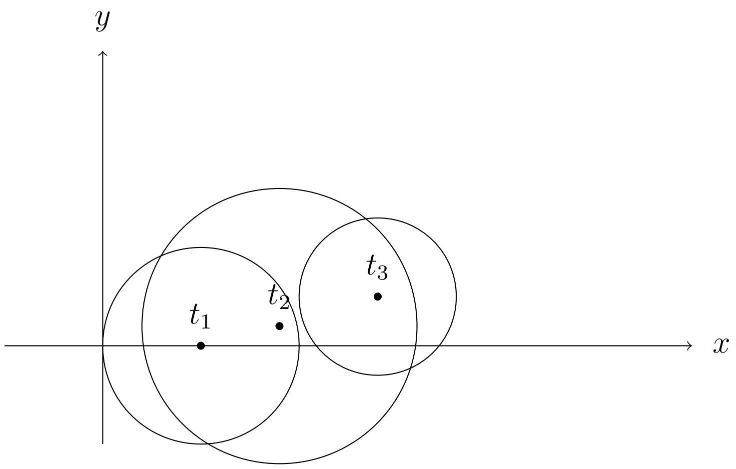

Рис. 2.1: К определению аналитической функции

сходится в круге K_0. Возьмем в K_0 произвольную точку t_1, тогда в ней можно вычислить значения $x(t_1) = x_1$ как

$$x(t_1) = \mathfrak{P}(t_1 - t_0).$$

Рассмотрим теперь задачу Коши для той же системы (2.2) с новыми начальными условиями при $x|_{t=t_1} = x_1$. Тем же способом, которым мы построили решение в K_0, можно построить решение этой задачи в некоторой окрестности K_1 точки $t = t_1$, причем вид этой окрестности зависит от новых начальных данных. Именно, в силу теоремы 1 Коши, можно найти решение в виде рядов $x = \mathfrak{P}(t - t_1)$ в области вида $|t - t_1| < h_1$. Если K_1 выходит за K_0, то нам удалось продолжить решение в большую область $G_1 = K_0 + K_1$ (см. рис. 2.1). Применяя описанный процесс продолжения, взяв G_1 вместо K_0 и некоторую t_2 — вместо t_1 , мы построим решение в еще большей области. Действуя так далее, можно или применять описанный процесс сколько угодно раз, или же, начиная с некоторого шага n, при любом выборе t_n получится область G_n, которая будет совпадать с G_{n-1}. В любом случае мы построим решение исходной задачи в области G, вся граница которой состоит из особых точек.

До сего момента можно было исходить из любого численного метода локального решения задачи Коши, напр., вместо рядов можно было использовать выражения вида $x = \lim\limits_{\Delta x = 0} x(t, \Delta x)$, доставляемые методом ломаных Эйлера. Однако существенное преимущество рядов состоит в том, что описанный процесс продолжения может быть отделен от рассматриваемой задачи следующим образом.

Рассмотрим $x(t) = \mathfrak{P}(t - t_0)$ как функцию, голоморфную в K_0. В силу теоремы Тейлора она может быть разложена в ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathfrak{P}^{(n)}(t_1)(t - t_1)^n, \tag{2.3}$$

который мы далее будем обозначать как $\mathfrak{P}(t - t_1|t_0)$. Так как функции $x = \mathfrak{P}(t - t_0)$ удовлетворяют системе (2.2), то ей удовлетворяет и их разложение в ряд Тейлора $\mathfrak{P}(t - t_1|t_0)$. В силу единственности ряда, удовлетворяющего задаче Коши, построенное выше продолжение

$$\mathfrak{P}(t - t_1) \equiv \mathfrak{P}(t - t_1|t_0).$$

Значит, для того, чтобы построить продолжение решения из K_0, нужно взять любую точку t_1 в K_0 и разложить $\mathfrak{P}(t - t_0)$ в ряд Тейлора $\mathfrak{P}(t - t_1|t_0)$ (или, как еще говорят, переразложить ряд $\mathfrak{P}(t - t_0)$ по степеням $t - t_1$). Поэтому процедуру продолжения можно отделить от задачи Коши и, вообще, от теории дифференциальных уравнений и утверждать, что верна

Теорема 5 (Вейерштрасс). В предположениях теоремы 1 Коши начальная задача разрешима в аналитических функциях.

При этом аналитические функции трактуются следующим образом.

Определение 1 (Вейерштрасс). Пусть задан ряд $\mathfrak{P}(t - t_0)$, сходящийся в круге K_0, а точка t_1 лежит в этом круге. Тогда переразложение ряда $\mathfrak{P}(t - t_0)$ по степеням $t - t_1$, то есть $\mathfrak{P}(t - t_1|t_0)$, называется непосредственным продолжением этого ряда $\mathfrak{P}(t - t_0)$. Пусть ряд $\mathfrak{P}(t - t_n|t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$

является непосредственным продолжением ряда $\mathfrak{P}(t - t_{n-1}|t_0, t_1, \dots, t_{n-2})$, этот последний — ряда $\mathfrak{P}(t - t_{n-2}|t_0, t_1, \dots, t_{n-3})$ и так далее вплоть до $\mathfrak{P}(t - t_0)$, тогда ряд $\mathfrak{P}(t - t_n|t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ называется (аналитическим) продолжением ряда $\mathfrak{P}(t - t_0)$. Ряд $\mathfrak{P}(t - t_0)$ и все его аналитические продолжения называют элементами аналитической функции, ее значением в точке a называют числа, которые получаются, если подставить $t = a$ во все сходящиеся в этой точке элементы.

2.2.1. Замечания к определению аналитической функции

Определение аналитической функции только кажется похожим на обычное определение функции, на самом же деле их свойства весьма неожиданны. Поэтому уместно сразу сделать несколько замечаний относительно последнего определения.

1. Процесс аналитического продолжения не всегда выводит за предела круга сходимости, при этом контрпримеры были найдены после тщетных попыток доказать обратное. Приведем наиболее простой пример, принадлежащей Адамару (1892 г.)[2] Возьмем элемент

$$\mathfrak{P}(z) = a_0 + a_1 z^{p_1} + a_2 z^{p_2} + a_3 z^{p_3} + \dots,$$

в котором p_n обладают следующем свойством: натуральные числа $p_N, p_{N+1}, \dots$ имеют общий делитель d_N, который неограниченно возрастает при возрастании N; при этом условии окружность круга сходимости ряда $\mathfrak{P}(z)$ является особой линией.

Действительно, на окружности круга сходимости есть по крайней мере одна особая точка $z = z_0$ (в том смысле, что не существует ряда $\mathfrak{P}(z - z_0)$,

[2] См. Голубев В.В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М.: ГИФМЛ, 1961, с. 85 и сл.

совпадающего с исходным в общей области сходимости). Можно написать

$$\mathfrak{P}(z) = (a_0 + a_1 z^{p_1} + a_2 z^{p_2} + \dots + a_{N-1} z^{p_{N-1}}) + \\ + (a_N z^{p_N} + a_{N+1} z^{p_{N+1}} + \dots).$$

Так как первое слагаемое — многочлен, не имеющий в конечной части плоскости особых точек, то второе слагаемое имеет z_0 особой точкой; но этот ряд не меняется при замене

$$z' = z e^{2\pi i \frac{k}{d_N}},$$

где k — любое целое число. Следовательно, ряд имеет особыми все точками вида

$$z_0 e^{2\pi i \frac{k}{d_N}};$$

так как d_N можно по условию взять сколь угодно большим, то на любой дуге окружности круга сходимости ряда $\mathfrak{P}(z)$ имеются особые точки. Следовательно, эта окружность есть особая линия.

В частном случае можно положить, напр., $p_n = m^n$, $a_n = a^n$, где m — целое число, большее 1. Тогда получим ряд Вейерштрасса

$$\mathfrak{P}(z) = a + a z^m + (a z^m)^2 + \dots.$$

Этот ряд сходится внутри круга радиуса

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n=\infty} |a|^{\frac{n}{m^n}}} = 1;$$

окружность его есть особая линия. Полагая $p_n = n!$, получим ряд Дарбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n!}.$$

2. Аналитическая функция может быть неоднозначной. В самом деле, исходя из одного и того же элемента $\mathfrak{P}(z - z_0)$, но выбирая разными способами центры непосредственных переразложений, мы придем к двум рядам

$$\mathfrak{P}(z - a | z_0, z_1, \dots z_n) \text{ и } \mathfrak{P}(z - a | z_0', z_1', \dots z_n'),$$

которые вовсе не обязаны совпадать. По нашей договоренности значением $w(a)$ мы будем называть

$$\text{и } \mathfrak{P}(0|z_0, z_1, \dots z_n), \text{ и } \mathfrak{P}(0|z'_0, z'_1, \dots z'_n).$$

Классический пример такого рода — функция $\ln(z)$. Однако, если о значении $\ln(a)$ говорить еще можно — это значение определено с точность до $2\pi i$, то в общем случае аналитических функций множество $w(a)$ может оказаться всюду плотным, а, значит, вопрос о значении $w(a)$ без указания последовательности точек непосредственного переразложения $z_0, z_1, \dots, z_{n+1} = a$ бесполезен. Поэтому при определении аналитической функции мы ушли весьма далеко от изначальной трактовки функции.

Если бы мы могли доказать разрешимость задачи Коши при помощи выражений для счета, то достигли бы нашей цели — построения решения в естественной области. Однако те причины, по которым в анализе оказались от старой трактовки понятия функции, указывают на те затруднения, что ожидают при такой трактовке решения задачи Коши. Вот как поясняет их Вейерштрасс: данные определения позволяют сказать, что нечто есть функция, однако из них нельзя сделать никаких выводов о свойствах функции[3]. При этом все время возникает видимость такой возможности: уместно вспомнить о многочисленных попытках доказать дифференцируемость функции.

2.2.2. Ветви аналитической функции

Если мы решаем систему дифференциальных уравнений при вещественных t, то указанный способ продолжения позволит найти решение на некотором отрезке вещественной оси, который заканчивается особой точкой. Казалось

[3]См. лекции Вейерштрасса, озаглавленные как «Einleitung in die Theorie der Analytischen Functionen. Vorlesungen der Prof. K. Weierstrass in Sommer-Semester 1874. Bearbeitet von Szyman'sky.», хранящиеся в научной библиотеке МГУ.

бы, выбирая по разному точки переразложения, мы получим различные решения. На самом деле это не так, для доказательства чего мы рассмотрим более общую ситуацию.

Пусть $\mathfrak{P}(t-a)$ — ряд, сходящийся в некотором круге $K(a)$, и $\mathfrak{C}$ — произвольная жорданова кривая на комплексной t-плоскости, выходящая из точки $t = a$. Круг $K(a)$ отрезает от $\mathfrak{C}$ некоторую непрерывную дугу $\mathfrak{C}_1$. Возьмем на этой дуге точку $t = t_1$ и, переразложив исходный ряд, получим $\mathfrak{P}(t-t_1|a)$. Если круг сходимости $K(t_1)$ этого ряда, как бы мы ни брали t_1, лежит внутри $K(a)$, то конец дуги $\mathfrak{C}_1$, будем называть *особой точкой ветви.* Если же конец $\mathfrak{C}_1$ не является особой точкой, то, взяв подходящее значение $t = t_1$ на этой дуге, получим ряд $\mathfrak{P}(t-t_1|a)$, сходящийся в круге $K(t_1)$. Этот ряд будем называть *непосредственным продолжением исходного вдоль* $\mathfrak{C}$. Выбирая центры переразложений на $\mathfrak{C}$ тем же способом, получим то, что далее будем называть *аналитическим продолжением исходного ряда вдоль* $\mathfrak{C}$

Переразложения задают некоторую голоморфную функцию вдоль $\mathfrak{C}$, которую будем называть ветвью аналитической функции вдоль $\mathfrak{C}$. Именно, вдоль дуги $\mathfrak{C}_1$ ряд $\mathfrak{P}(t-a)$ является голоморфной функцией $f(t) = \mathfrak{P}(t-a)$. Если доопределить ее вдоль дуги $\mathfrak{C}_2$ кривой $\mathfrak{C}$, следующей за $\mathfrak{C}_1$, на которой сходится $\mathfrak{P}(t-t_1|a)$, положив $f(t) = \mathfrak{P}(t-t_1|a)$, получим голоморфную функцию вдоль всей дуги $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2$, поскольку в окрестности стыка $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ оба ряда сходятся и совпадают. Действуя так дальше, мы определим ветвь $f(t)$ как голоморфную функцию или вдоль всей кривой $\mathfrak{C}$, или вдоль ее дуги, оканчивающейся особой точкой ветви.

Очевидно, что любое переразложение $\mathfrak{P}(t-t_1'|a)$ является рядом Тейлора для $f(t)$, поэтому $f(t) \equiv \mathfrak{P}(t-t_1'|a)$ вдоль той непрерывной дуги $\mathfrak{C}$, где сходится ряд $\mathfrak{P}(t-t_1'|a)$. Переразложение $\mathfrak{P}(t-t_2'|a,t_1')$ ряда $\mathfrak{P}(t-t_1'|a)$ является по определению рядом Тейлора для $\mathfrak{P}(t-t_1'|a)$, а, значит, и рядом Тейлорра для $f(t)$. Поэтому опять $f(t) \equiv \mathfrak{P}(t-t_2'|a,t_1')$ вдоль той непрерывной дуги $\mathfrak{C}$, где сходится указанный ряд. Отсюда ясно, что, вообще, *всякое продолжение* $\mathfrak{P}(t - t'_M|a, \dots)$ *исходного ряда совпадает с рядом Тейлора для ветви* $f(t)$ *вдоль той же кривой.*

Положение особой точки $t = b$ *на кривой* $\mathfrak{C}$ *тоже не зависит от выбора центров переразложений на* $\mathfrak{C}$. Допустим противное, тогда при некотором выборе центров переразложений $t = t'_1, \dots, t'_M$ мы получим ветвь $f'(t)$ на дуге $a \dots b'$, меньшей или большей чем $a \dots b$. Не ограничивая общности, можно считать, что эта дуга меньше $a \dots b$, ведь иначе функции $f(t)$ и $f'(t)$ можно поменять ролями. Пусть $\mathfrak{P}(t - t'_M|a, t'_1 \dots)$ — последнее переразложение, то есть на дуге $c \dots b'$ нельзя найти такую точку $t = t'_{M+1}$, что переразложение $\mathfrak{P}(t - t'_{M+1}|a, t'_1 \dots, c')$ сходится в окрестности $t = b'$. Но с другой стороны функции $f(t)$ и $f'(t)$ совпадают вдоль $a \dots b'$ и при $t = b'$ функция $f(t)$ голоморфна. Поэтому можно взять $t = t'_{M+1}$ столь близко к $t = b'$, чтобы ряд Тейлора для $f(t) = \mathfrak{P}(t - c)$ сходился в окрестности $t = b'$. Этот ряд совпадет с последним переразложением $\mathfrak{P}(t - t'_M|\ a, t'_1, \dots)$ в общей части их кругов сходимости, поэтому является непосредственным продолжением ряда $\mathfrak{P}(t - t'_M|\ a, t'_1, \dots)$, которое сходится в окрестности точки $t = b'$, что невозможно.

2.3. Поведение решения в окрестности особой точки

Рассмотрим ветвь решения рациональной системы дифференциальных уравнений (2.2). Для этого зададимся некоторыми начальными условиями (x_0, t_0), при которых уравнения разрешимы в силу теоремы Коши и проведем произвольную кривую, выходящую из точки $t = t_0$. Для механики важен, прежде всего, случай, когда кривая — отрезок вещественной оси. Продолжая вдоль нее ряд, доставляемый теоремой Коши, мы или дойдем до конца кривой или упремся в особую точку $t = a$. Мы определим вдоль дуги $t_0 \ldots a$ кривой однозначную функцию $x = F(t)$, голоморфную во всех точках, кроме $t = a$ и являющуюся решением уравнения (2.2). При этом предполагается, что при всех $(x, t) = (F(t), t)$ правая часть (2.2) имеет смысл.

Рассмотрим множество предельных точек $F(t)$ при $t = a$. Покажем, что в этом множестве не может быть конечных точек, в которых ни один из знаменателей функций $f_m(x; t)$ не равен нулю.

Допустим противное: пусть существует такая последовательность точек $t = t_n$ кривой $\mathfrak{C}$, сходящаяся к $t = a$, что значения $F(t_n)$ сходится к некоторой конечной точке $x = b$ и $f_m(b; a) \neq \infty$. В силу уточнения теоремы Коши, существует такая окрестность

$$|\tau - a| \leq R_1, \quad |\xi - b| \leq R_2$$

точки (a, b), что голоморфное в окрестности начальных данных решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x; t), \quad x(\tau) = \xi$$

дается рядом $x = \mathfrak{P}(t - \tau)$, радиус сходимости которого ограничен снизу некоторой константой $h > 0$, зависящей только от (a, b) и выбора окрестности (т.е. R_1, R_2), но не от самой точки (τ, ξ).

По условию, исходный ряд может быть переразложен в ряд вида $x = \mathfrak{P}(t - a_n)$ с центром в любой из этих точек, причем начиная с некоторого n

ряды не продолжаемы вдоль кривой, то есть точка $t = a$ лежит на границе их круга сходимости. С другой стороны, коль скоро $(t_{n_k}, x(t_{n_k}))$ стремится к (a, b), то можно взять столь большой номер n_k так, чтобы

$$|t_{n_k} - a| \leq \min(h/2, R_1), \quad |x_{n_k} - b| \leq R_2.$$

Поэтому ряды

$$x = \mathfrak{P}(t - t_{n_k}),$$

которые являются решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(x; t), \quad x|_{a_{n_k}} = x(a_{n_k}),$$

сходятся в круге радиуса h, а значит и в окрестности точки $t = a$. Значит, точка $t = a$ — неособая, что невозможно.

Теорема 6. (Пенлеве[4]) Ветвь $x = F(t)$ решения задачи Коши (2.2) существует вдоль дуги любой жордановой кривой, выходящей из точки $t = t_0$ и заканчивающейся или концом $\mathfrak{C}$ или особой точкой $t = a$. При этом множество предельных точек $x = F(t)$ при $t = a$ не может содержать конечных точек, в которых ни один из знаменателей функций $f_m(x; t)$ системы (2.2) не равен нулю.

Доказанная теорема является глобальной теоремой существования, поскольку гарантирует существование решение вплоть до $t = a$, при котором решение покидает область определения правой части рассматриваемых дифференциальных уравнений (2.2).

[4] В стокгольмских лекциях эта теорема приведена подробно для уравнения первого порядка, а случай системы двух уравнений лишь намечен. Приведенное выше доказательстве основано на идеи выделения подпоследовательности, позаимствованной из статьи Gérard R., Sec A. Fuuiletages de Painlevé //Bull. soc. math. France. V. 100. Fasc. 1. P.47.

Глава 3

Аналитическая теория задачи многих тел

Классическим примером системы алгебраических дифференциальных уравнений, на котором оттачивалась аналитическая теория дифференциальных уравнений, доставляет система из N тел, взаимодействующих по закону всемирного тяготения. В силу принципа суперпозиции сил движение такой системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \tag{3.1}$$

где m_i — массы тел, $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ — радиус-векторы тел, а $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$.

Правые части уравнений (3.1) зависит рационально от $x_1, \dots$ и $N(N-1)/2$ переменных r_{ij}, связанных с ними алгебраическими уравнениями:

$$r_{ij}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2.$$

В дальнейшем переменные $x_1, \dots, z_n$ будем обозначать как $q_1, \dots, q_{3N}$, импульсы записывать как $p_1, \dots, p_{3N}$

Еще в начале 18 века численное решение этой системы позволило объяснить эволюцию элементов орбит комет и планет и с тех пор делаются попытки аналитически решить задачу N тел хотя бы при $N = 3$. Достигнутый прогресс в ее решении резко контрастирует с затраченными усилиями: начиная с 1750 г. по 1900 г., вышло свыше 800 работ по этому вопросу, часть из которых принадлежит величайшим математикам мира.[1]

3.1. Задача двух тел

Хорошо известно, что задача двух тел, то есть

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{r^3}\vec{r}, \quad \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{m_1}{r^3}\vec{r}, \tag{3.2}$$

где $\vec{r} = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, решается в элементарных функциях.

В системе отсчета, связанной с центром масс

$$\vec{r}_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\vec{r}, \quad \vec{r}_1 = -\frac{m_1 + m_2}{m_2}\vec{r}$$

и $\vec{r}$ удовлетворяет системе

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r} \tag{3.3}$$

Ее решение будем искать в параметрической форме

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad t = t(s)$$

где s — новая независимая переменная, такая что

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r}$$

При этом вещественным значениям t соответствуют вещественные значения s и наоборот.

Обозначая производную по s штрихом, имеем

$$\vec{r}\,' = \dot{\vec{r}}r, \quad r\,' = \frac{2x\dot{x} + \dots}{2r}r = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

[1]Уиттикер Э. Аналитическая динамика, **154.**

и

$$
\begin{aligned}
\vec{r}\,'' &= r\frac{d}{dr}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = r^2\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= -(m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= -(m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} - \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \vec{r}(\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}) \\
&= 2\left(\frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}\right)\vec{r} - \left(\dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}\right)
\end{aligned}
$$

Замечательно, что выражения, стоящие в скобках:

$$
k = \frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}
$$

и

$$
\vec{e} = \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}
$$

являются интегралами движения. В самом деле, k — полная механическая энергия, а

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e}} &= \ddot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\dot{\vec{r}}}{r} + (m_1+m_2)\frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r} \\
&= (m_1+m_2)\left\{-\frac{\vec{r}}{r^3}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r}\right\} = 0
\end{aligned}
$$

Этот специфический интеграл задачи двух тел, называют вектором Лапласа или векторным эксцентриситетом. Таким образом, в новых переменных система (3.3) записывается так

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^2\vec{r}}{ds} = 2k\vec{r} - \vec{e}, \quad \dfrac{dk}{ds} = 0, \quad \dfrac{d\vec{e}}{ds} = 0, \\
\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{m_1+m_2}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\vec{r}}{ds},\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right) - (\vec{r},\vec{r})k\right)
\end{cases}
\tag{3.4}
$$

Эта система состоит из трех линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и одной квадратуры. Поэтому общее решение $\vec{r}$ и t должно быть целой функцией s. А именно, уравнение

$$
\vec{r}\,'' = 2k\vec{r} - \vec{e}
$$

имеет решение

$$\vec{r} = \frac{\vec{e}}{2k} + \vec{a}\cos(\sqrt{2k}s) + \vec{b}\sin(\sqrt{2k}s),$$

где $\vec{a}, \vec{b}$ — некоторые постоянные векторы, определенные начальными данными:

$$\vec{a} = \vec{r}|_{t=t_0} - \frac{\vec{e}}{2k}, \quad \vec{b} = \frac{r}{\sqrt{2k}}\dot{\vec{r}}|_{t=t_0}$$

Подставляя это выражение в квадратуру для t, имеем

$$t = Es + A\cos(\sqrt{2k}s) + B\cos(\sqrt{2k}s) + C\cos(2\sqrt{2k}s) + D\cos(2\sqrt{2k}s)$$

где $A, \dots E$ — некоторые константы, которые мы не станем вычислять. Суть в том, что выразить s через t в элементарных функциях невозможно. Доказанное можно сформулировать так:

Теорема 7. При помощи замены переменной t на

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r}$$

и добавления четырех новых переменных k и $\vec{e}$ можно свести задачу двух тел к системе (3.4) дифференциальных уравнений, правая часть которых дается целыми рациональными функциями. При этом ее решение доставляется при помощи целых функций s

$$\vec{r} = \vec{r}(s), \quad t = Es + T(s)$$

где $\vec{r}(s)$ и $T(s)$ имеют период $2\pi/\sqrt{2k}$.

Для полноты приведем классическое решение задачи двух тел. Пусть $q_1, \dots$ — координаты двух тел в некоторой системе отсчета $\mathfrak{K}$. Начальные данные (q_0, p_0) позволяют вычислить десять классических интегралов. Используя интегралы импульсов и центра масс, можно перейти из нее в систему, связанную с центром масс. При этом положения обоих тел в $\mathfrak{K}$ выразится линейно через положение одного из них в системе центра масс и 6 указанных интегралов движения. Движение этого тела происходит в плоскости, перпендикулярной моменту импульса, поэтому обозначив координаты тела в этой плоскости как x, y, можно выразить координаты тел q_n линейно через x, y и восемь интегралов движения:

$$q_n = q_n(x, y; c_1, \dots c_8).$$

Для определения x, y как функций t достаточно воспользоваться оставшимся интегралами — длиной момента импульса системы и энергией. Как известно в полярной системе координат они записываются так

$$r^2\dot{\varphi} = C, \quad \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{2\mu}{r} = 2h$$

Отсюда получается уравнение траектории

$$\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{\frac{\mu^2}{C^4} + \frac{h}{C^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)$$

связывающее r и φ. Вместо констант C и h, выражающихся алгебраически через начальные данные, удобно использовать другие — параметры эллипса a и e, выражающие алгебраически через C и h, а значит и через начальные данные:

$$C^2 = \mu a(1 - e^2), \quad h = -\frac{\mu}{a}$$

Уравнение движение можно записать как

$$\dot{r}^2 = -\frac{\mu a(1 - e^2)}{r^2} + \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

или

$$(r\dot{r})^2 = \frac{\mu}{a}(-(a - r)^2 + a^2e^2)$$

Существенно то, что из последнего уравнения нельзя выразить r как однозначную функцию t. Вместо этого приходится ввести новую переменную

$$\frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a}}\frac{1}{r},$$

тогда

$$\frac{dr}{du}^2 = a^2e^2 - (a - r)^2, \quad \frac{dt}{du} = \sqrt{\frac{a}{\mu}}r$$

откуда

$$u = \int \frac{dr}{ae\sqrt{1 - \frac{(a-r)^2}{a^2e^2}}}, \quad \sqrt{\frac{\mu}{a}}(t - t_0) = \int \frac{r(u)du}{e\sqrt{\mu a}}$$

то есть

$$r = a - ae\cos u, \quad \sqrt{\frac{\mu}{a}}(t - c) = au - ae\sin u$$

где t_0 — некоторая константа. Отсюда ясно, что r и t можно выразить как целые функции u, зависящие от трех констант a, e и c, из которых a, e выражаются алгебраически через начальные данные.

Докажем теперь, что $r\cos\varphi$ и $r\sin\varphi$ являются целыми функциями u. Заметим для начала, что эти функции выражаются линейно через $r\cos(\varphi-\varphi_0)$ и $r\sin(\varphi-\varphi_0)$, а эти в свою очередь являются целыми рациональными функциями $\sqrt{r}\cos(\varphi-\varphi_0)/2$ и $\sqrt{r}\sin(\varphi-\varphi_0)/2$. Используя уравнение эллипса

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

и найденное выражение для r, имеем

$$1-e\cos u = \frac{1-e^2}{1+e\cos(\varphi-\varphi_0)}$$

поэтому

$$\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{1-e^2-(1-e\cos u)}{e(1-e\cos u)} = \frac{\cos u - e}{1-e\cos u}$$

и значит

$$2\sin^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2} = 1-\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u} = \frac{2a(1+e)\sin^2\frac{u}{2}}{r}$$

и

$$2\cos^2\frac{\varphi-\varphi_0}{2} = 1+\cos(\varphi-\varphi_0) = \frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u} = \frac{2a(1-e)\cos^2\frac{u}{2}}{r}$$

Отсюда ясно, что $\sqrt{r}\cos(\varphi-\varphi_0)/2$ и $\sqrt{r}\sin(\varphi-\varphi_0)/2$ будут целыми функциями u, а значит, таковы и $r\sin\varphi$ и $r\cos\varphi$.

Таким образом, общее решение задачи двух тел является линейной функцией декартовых координат $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, а значит, целыми функциями параметра u. Более того, *общее решение задачи двух тел представимо в виде*

$$q = q(u; c_1, \dots c_8, a, e, \cos\varphi_0), \quad t = c + \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e\sin u)$$

где q — целая рациональная функция $\cos u/2$ и $\sin u/2$, коэффициенты которой зависят от констант $c_1, \dots c_8$ линейно, а от $a, e, \cos\varphi_0$ — алгебраически.

Было бы желательно выразить q как функции t, но для этого нужно решить уравнение

$$t - c = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(u - e\sin u)$$

которое называют *уравнением Кеплера.* Если $e < 1$, то производная правой части $f(u)$ уравнения Кеплера по u равна

$$\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}(1 - e\cos u) > 0$$

при всех вещественных u и, стало быть, правая часть монотонно возрастает при вещественных u. При $u = \pm\infty$ правая часть равна $\pm\infty$, поэтому $f(u)$ пробегает все вещественные значения при u, меняющемся от $-\infty$ до $+\infty$, и, стало быть, уравнение Кеплера разрешимо при всех вещественных t. Этим способом можно определить u как непрерывную функцию t, поэтому она может быть равномерно приближена на всей вещественной оси полиномами

$$u = \lim_{n=\infty} P_n(t;e)$$

на любом сегменте вещественной оси. Значит, при всех $e<1$ решение задачи двух тел можно приблизить полиномами по t, к сожалению, явное выражение для них пока не найдено.

3.2. Задача N тел с простыми столкновениями

Уравнения (3.1) можно превратить в рациональные, повысив их порядок. Именно, будем рассматривать

$$Q = (p_1, \dots, q_1, \dots, r_{12}, \dots)$$

как искомые функции, тогда система примет вид

$$\begin{aligned} &m_1\dot q_1 = p_1, \dots, \\ &\dot p_1 = F_1(r_{12}, \dots), \dots \\ &\dot r_{12} = \frac{(x_1-x_2)(m_1^{-1}p_1 - m_2^{-1}p_2) + \dots}{r_{12}}, \dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Теорема 6 Пенлеве позволяет утверждать, что при любых начальных данных задача N тел имеет голоморфное решение или вдоль всей вещественной оси, или вдоль некоторого отрезка $[t_0, t_1)$, где t_1 — конечная точка. Заранее не ясно, какая из этих двух возможностей реализуется даже если даны конкретные начальные данные, поэтому для дальнейшего необходимо рассмотреть поведение решение при $t = t_1$ подробнее.

Множество M предельных точек $Q(t)$ при $t \to t_1 - 0$ может содержать или бесконечно удаленные точки и такие точки, в которых правая часть (3.5) обращается в бесконечность. Второе возможно только тогда, когда в этой предельной точке одно из $r_{ij} = 0$.

В первом же случае $q_i(t_n)$ не может стремится к бесконечности без того, чтобы к бесконечности стремился импульс $p_i(t_n)$, а при вещественных

t и начальных данных закон сохранения энергии показывает, что $r_{ij}(t_n)$ должно стремиться к нулю. Поэтому, в любой предельной точке M $\inf r_{ij}$ обращается в нуль. Тем самым доказана теорема:

Теорема 8. (Пенлеве, 1897) Если решение задачи N тел является аналитической функцией t в интервале $[t_0, t_1)$ и перестает быть таковой при $t = t_1$, то

$$\lim_{t=t_1-0} \inf_{i\neq j} r_{ij} = 0$$

Утверждать, что в условиях теоремы при $t = t_1$ происходит соударение двух тел, можно с существенными оговорками, поскольку в общем случае мы не сможем доказать, что существуют пределы

$$\lim_{t=t_1-0} q_n(t),$$

то есть, что в момент столкновения все тела находятся в определенных точках пространства. Для доказательства существования указанных пределов нужно сделать дополнительное предположение: все расстояния r_{ij}, кроме наименьшего, равномерно ограничены снизу некоторой константой λ:

$$r_{ij} \geq \lambda > 0$$

при всех t, достаточно близких к t_1. Такое столкновение будем называть *простым.* Без особого труда доказывается, что простое столкновение происходит в конечной точке пространства:

Теорема 9. (Вейерштрасс, 1883) Пусть при $t \to t_1 - 0$ существует предел

$$r_{12} \to 0,$$

а прочие расстояния r_{ij} равномерно ограничены снизу некоторой константой λ:

$$r_{ij} \geq \lambda > 0$$

при всех t, достаточно близких к t_1, скажем при $\tau \leq t \leq t_1$. Тогда существуют конечные пределы

$$\lim_{t=t_1-0} q_n(t)$$

при всех n и

$$\lim_{t=t_1-0} \dot{q}_n(t)$$

при $n > 2$, а скорости v_1 и v_2 первого и второго тела удовлетворяют условию

$$\lim_{t=t_1-0} r_{12}v_1^2 = \frac{2m_2^2}{m_1+m_2}, \quad \lim_{t=t_1-0} r_{12}v_2^2 = \frac{2m_1^2}{m_1+m_2}$$

Доказательство. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс. Пусть при $t = t_1$ соударяются первое и второе тело, то есть $r_{12} \to 0$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t_2 < t_1$, что

$$r_{12} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad r_{ij} > \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $t_2 \leq t < t_1$. Из уравнения движения n-ой тела

$$\ddot{x}_n = \frac{m_1}{r_{1n}^3}(x_1 - x_n) + \dots$$

при $n > 2$ следует оценка

$$|\ddot{x}_n| \leq \frac{m_1}{r_{1n}^2} + \dots \leq \frac{4(m_1 + \dots + m_N)}{\varepsilon^2}$$

поэтому ускорение n-го тела $\ddot{x}_n$ равномерно ограничено в $[t_2, t_1)$. Поскольку существует интеграл от ограниченной функции, непрерывной почти во всех точках, существует и интеграл

$$\int\limits_{t_2}^{t_1} \ddot{x}_n(t)dt$$

Значит, функция

$$\dot{x}_n(t) = \dot{x}_n(t_2) + \int\limits_{t_2}^{t} \ddot{x}_n(t)dt$$

имеет при $t \to t_1$ предел

$$\dot{x}_n(t_2) + \int\limits_{t_2}^{t_1} \ddot{x}_n(t)dt$$

и то же верно для $x_n(t)$. Таим образом, все тела, кроме первого и второго, имеют в момент столкновения вполне определенное положение и скорость.

Поскольку $x_1 - x_2 \to 0$ и в системе, связанной с центром масс, верно $m_1x_1 + \dots + m_Nx_N = 0$, то

$$\lim_{t=t_1-0} x_1 = \lim_{t=t_1-0} x_2 = -\frac{m_3x_3(t_1) + \dots m_Nx_N(t_1)}{m_1+m_2}$$

то есть столкновение происходит в конечной точке пространства.

Из закона сохранения энергии

$$\sum m_kv_k^2 = 2h - 2U$$

имеем

$$r_{12}\sum m_kv_k^2 \to 2m_1m_2 \quad (t \to t_1).$$

По доказанному v_n при $n > 2$ имеют конечный предел, поэтому

$$r_{13}(m_1v_1^2 + m_2v_2^2) \to 2m_1m_2 \quad (t \to t_1).$$

Поэтому, в частности, выражения $r_{12}\dot{x}_k^2$ $(k = 1,\ 2)$ остаются при соударении ограниченными и, стало быть, сами скорости неограниченно растут.

Вспомнив, что в системе центра масс

$$m_1\dot{x}_1 + \dots + m_N\dot{x}_N = 0,$$

имеем $\dot{x}_2 = m_2^{-1}(m_1\dot{x}_1 + m_3\dot{x}_3 + \dots)$, поэтому

$$m_2v_2^2 = \frac{m_1^2v_1^2 + 2m_1m_3(v_1, v_3) + m_3^2v_3^2 + \dots}{m_2}$$

и, стало быть,

$$r_{12}\frac{m_1(m_1+m_2)v_1^2 + 2m_1m_3(v_1, v_3) + m_3^2v_3^2}{m_2} \to 2m_1m_2 \quad (t \to t_1).$$

то есть в силу ограниченности $\sqrt{r_{13}}\dot{x}_1$

$$r_{11}v_1^2 \to \frac{2m_2^2}{m_1 + m_2}$$

как и утверждалось в теореме. $\square$

Если при $t = t_1$ происходит простое столкновение двух тел, скажем первого и второго, тогда при малых $|t - t_1|$ мы имеем по сути задачу двух тел, возмущенную присутствием еще $N - 2$ тел. В задаче двух тел решение удается выразить в виде целых функций от параметра

$$s = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r},$$

где $r = r_{12}$ — расстояние между сталкивающимися телами. Поэтому можно ожидать, что к решению как функции s в окрестности

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = s_1$$

можно будет применять уточнение теоремы Коши.

Докажем, во-первых, что существует предел

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = s_1$$

Для этого рассмотрим полезную во многих отношениях функцию

$$I(t) = \sum m_n q_n(t)^2$$

при $t < t_1$. Имеем

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum m_n q_n \dot{q}_n,$$

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = \sum m_n(\dot{q}_n^2 + q_n \ddot{q}_n) = 2T - \sum q_n \frac{\partial U}{\partial q_n}$$

Так как U является однородной функцией координат минус первой степени, то по известной теореме

$$\sum q_n \frac{\partial U}{\partial q_n} = -U,$$

вследствие чего получается

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T + U = 2h - U$$

Отсюда следует, что

$$\int\limits_{t_0}^{t} U dt = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{1}{2}\ddot{I} + 2hdt = 2h(t - t_0) - \frac{1}{2}(\dot{I}(t) - \dot{I}(t_0))$$

Но

$$\dot{I}(t) = m_1 x_1 \dot{x}_1 + m_2 x_2 \dot{x}_2 + \dots = (m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2)x_{12} + x_{12}m_1\dot{x}_1 + \dots$$

В теоремы 9 функции $x_1, \dots, \dot{x}_3, \dots$ стремятся к конечным пределам, в силу закона сохранения импульса суммы $m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2, \dots$ тоже имеют конечный предел. Наконец,

$$|x_{12}m_1\dot{x}_1| \leq m_1 r_{12} v_1 = m_1\sqrt{r_{12}}\sqrt{r_{12}}v_1 \to 0$$

Поэтому функция $\dot{I}$ имеет предел при $t = t_1 - 0$. Остается заметить, что существует и предел

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} (U + \frac{m_1 m_2}{r}) dt$$

а значит, и исходный предел

$$\lim_{t=t_1-0} \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dt}{r} = s_1.$$

Во-вторых, поскольку на отрезке $t_0 \dots t_1$ производная $\dot{s} \neq 0$ или ∞ , этот отрезок отображается однозначно на отрезок $0 \dots s_1$ и однозначность соответствия сохраняется в (комплексной) окрестности этого отрезка, но нарушается в окрестности конца $t = t_1$. Поэтому ветвь решения $q_i(t)$, заданную вдоль отрезка $t_0 \ldots t_1$, можно представить параметрически как

$$q_i = q_i(s), \quad t = t(s)$$

где s меняется вдоль $0 \ldots s_1$, а функции x_i и t — аналитические функции без особенностей на отрезке, исключая, вообще говоря, конец $s = s_1$. На этом конце в силу теоремы 9 существуют конечные пределы:

$$\lim_{s=s_1-0} q_i(s) = q_i(t_1), \quad \lim_{s=s_1-0} q_i'(s) = r_{12} q_i|_{t=t_1} = 0, \quad \lim_{s=s_1-0} t(s) = t_1. \tag{3.6}$$

Наша задача состоит в том, чтобы показать, что эти функции не имеют особенности и при $s = s_1$.

Эта задача была поставлена Вейерштрассом и Пуанкаре (1883), но ее решение упирается в неожиданную сложность: простая замена переменной t на s переводит систему (3.1) в систему, правая часть которой не является голоморфной функцией начальных данных при $s = s_1$, а это не дает возможность применить теорему 3 о единственности решения задачи Коши. Для задачи трех тел это затруднение преодолел К. Зундман (Sundman, 1912), которому удалось придумать цепочку канонических преобразований, приведших к гамильтоновой системе того же порядка с голоморфным гамильтонианом. Затем его в высшей степени сложные выкладки были затем несколько упрощены Леви-Чевита и К. Зигелем (Siegel, 1955)[2]. Общая задача оставалась не решенной до 1967 года, когда Бурде (Burdet)[3] пожертвовал гамильтоновостью и порядком системы и так же как выше в задаче двух тел ввел еще четыре новые функции. Изложим это решение.

Перейдем сначала в более удобную систему координат, предложенную Якоби. Примем за

$$\vec{r} = (x, y, z)^T$$

[2] Зигель К. Лекции по небесной механике

[3] Маршал К. Задача трех тел. М.-Ижевск, 2004

— вектор, проведенный из первого тела во второе, а за $\vec{v}$ — его скорость $\dot{\vec{r}}$, обозначим как O — центр масс первых двух тел и как

$$\vec{R}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \quad (i = 3, \ldots, N)$$

вектор, проведенный из O в i-ое тело, иными словами, положим

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad \vec{R}_i = \alpha \vec{r}_{1i} + \beta \vec{r}_{2i} = \vec{r}_i - (\alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2)$$

где

$$\alpha = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \ \beta = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Из уравнений движения (3.1) имеем

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 &= \frac{m_1}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} - \frac{m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} + \sum_{j \neq 1,2} \frac{m_j}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j} - \frac{m_j}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j} \\ &= -\frac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r} + \sum_{j \neq 1,2} \frac{m_j}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j} - \frac{m_j}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{R}}_i = \ddot{\vec{r}}_i - (\alpha\ddot{\vec{r}}_1 + \beta\ddot{\vec{r}}_2) &= \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij} - \sum_{j \neq 1,2} \frac{\alpha m_j}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j} + \frac{\beta m_j}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j} \\ &= -(m_1 + m_2 + m_j)(\frac{\alpha}{r_{1i}^3}\vec{r}_{13} + \frac{\beta}{r_{2i}^3}\vec{r}_{23}) + \sum_{j \neq 1,2,i} m_j \left(\frac{1}{r_{ij}^3}\vec{r}_{ij} - \frac{\alpha}{r_{1j}^3}\vec{r}_{1j} - \frac{\beta}{r_{2j}^3}\vec{r}_{2j} \right)\end{aligned}$$

Таким образом, систему (3.1) можно записать как систему Якоби:

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}} = -\dfrac{m_1 + m_2}{r^3}\vec{r} + \vec{\varphi}(r, R) \\ \ddot{\vec{R}}_i = \vec{\psi}_i(r, R), \quad (i = 3, \ldots, N) \end{cases} \tag{3.7}$$

где φ и ψ_i — голоморфные функции в окрестности точки $\vec{r} = \vec{a}$ и $\vec{R}_1 = \vec{A}_1 \neq 0, \ldots$.

Перейдем теперь к новой независимой переменной s, обозначая производную по s штрихом. Имеем

$$\vec{r}\,' = \dot{\vec{r}}r, \quad r\,' = \frac{2x\dot{x} + \ldots}{2r}r = (\vec{r}, \dot{\vec{r}})$$

и

$$
\begin{aligned}
\vec{r}\,'' &= r\frac{d}{dr}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) = r^2\ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= r^2\vec{\varphi} - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} + \dot{\vec{r}}(\vec{r},\dot{\vec{r}}) \\
&= r^2\vec{\varphi} - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r} - \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \vec{r}(\dot{\vec{r}},\dot{\vec{r}}) \\
&= r^2\vec{\varphi} + 2\left(\frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}\right)\vec{r} - \left(\dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}\right)
\end{aligned}
$$

Правая часть не является голоморфной при $r = 0$, но эту особенность можно обойти. Для этого заметить, что выражения, стоящие в скобках, то есть

$$
k = \frac{v^2}{2} - \frac{m_1+m_2}{r}
$$

и

$$
\vec{e} = \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\vec{r}}{r}
$$

являются постоянными при отсутствии других тел. Поэтому можно ожидать, что k' и $\vec{e}\ \,'$ можно выразить как голоморфные функции $\vec{r},\vec{r}\,',\vec{R}_3,\dots\vec{R}_N\,'$. Так оно и есть:

$$
\begin{aligned}
k' &= \dot{x}r\ddot{x} + \dots + \frac{m_1+m_2}{r^2}(x\dot{x}+\dots) = r\dot{x}\left(\ddot{x} + \frac{m_1+m_2}{r^2}x\right) + \dots \\
&= (\vec{\varphi},\vec{r}\,')
\end{aligned}
$$

и

$$
\vec{e}\,' = \vec{\varphi}\times[\vec{r}\times\vec{r}\,'] + \vec{r}\,'\times[\vec{r}\times\vec{\varphi}]
$$

поскольку

$$
\begin{aligned}
\dot{\vec{e}} &= \ddot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\ddot{\vec{r}}] - (m_1+m_2)\frac{\dot{\vec{r}}}{r} + (m_1+m_2)\frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r} \\
&= \vec{\varphi}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\vec{\varphi}] + (m_1+m_2)\left\{-\frac{\vec{r}}{r^3}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] - \frac{\dot{\vec{r}}}{r} + \frac{(\vec{r},\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r}\right\} = \\
&= \vec{\varphi}\times[\vec{r}\times\dot{\vec{r}}] + \dot{\vec{r}}\times[\vec{r}\times\vec{\varphi}]
\end{aligned}
$$

Добавив их к числу переменных $\vec{r}, \vec{R}_i$, повысив порядок системы на четыре, получим систему Бурде

$$\begin{cases} \vec{r}\,'' = 2k\vec{r} - \vec{e} + r^2\vec{\varphi} \\ k' = (\vec{\varphi}, \vec{r}\,') \\ \vec{e}\,' = \vec{\varphi} \times [\vec{r} \times \vec{r}\,'] + \vec{r}\,' \times [\vec{r} \times \vec{\varphi}] \\ \vec{R}_i' = r\vec{V}_i, \quad (i = 3, \ldots, N) \\ \vec{V}_i' = r\vec{\psi}_i, \quad (i = 3, \ldots, N) \end{cases} \tag{3.8}$$

которая при изъятии тел с номерами 3 и выше переходит в (3.4).

Правая часть (3.8) пока не является голоморфной функцией начальных данных при $s = s_1$, поскольку $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ не является голоморфной функцией x, y, z в окрестности нуля[4]. Но это затруднение легко обойти, если всюду заменить r на выражение

$$r = \frac{1}{m_1 + m_2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d\vec{r}}{ds}\right) - (\vec{r}, \vec{r})k\right)$$

Сделав это, к системе 3.8 с начальными данными (3.6) можно применить теорему 3 о единственности решения задачи Коши, и утверждать следующее: если при $t = t_1$ происходит столкновение первых двух тел, то ветвь решения $q_i(t)$ вдоль отрезка $t_0 \ldots t_1$ в окрестности конца $t = t_1$ можно представить параметрически

$$q_i = \mathfrak{P}_i(s - s_1), \quad t = t_1 + c_1(s - s_1)^k + \ldots \quad (c_1 \neq 0).$$

Число k можно вычислить так:

$$t' = r, \quad t'' = r' = (\vec{r}, \dot{\vec{r}}), \quad t''' = r\dot{\vec{r}}^{\,2} - r\frac{(m_1 + m_2)(\vec{r}, \vec{r})}{r^3} + r(\vec{r}, \vec{\varphi})$$

и при $s = s_1$ имеем

$$t'|_{s=s_1} = 0, \quad t''|_{s=s_1} = 0, \quad t'''|_{s=s_1} = -(m_1 + m_2) \neq 0$$

и поэтому $k = 3$. Отсюда в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса можно утверждать следующее:

[4] У Маршала (с. 49) ошибочно утверждается как раз обратное.

Теорема 10. Если в задаче N тел при $t = t_1$ происходит простое столкновение, то ветвь решения $q_i(t)$ вдоль отрезка $t_0 \dots t_1$ в окрестности конца $t = t_1$ можно представить как

$$q_i = \mathfrak{P}_i(\sqrt[3]{t - t_1}).$$

Такую особую точку называют алгебраической. Коэффициенты рядов вещественные, коль скоро таковы коэффициенты в (3.8) и значит при $t > t_1$ можно указать единственное и вещественное решение, продолжающее исходное.

Отметим в завершении еще одно неожиданное следствие теоремы 10, указанное Вейерштрассом: *при случайном выборе начальных данных простое столкновение невероятно.* В самом деле, коэффициенты элемента $\mathfrak{P}_i(t - a)$, описывающего решение задачи $2N$ тел, зависят ровно от $6N$ произвольных констант, все элементы вида $\mathfrak{P}_i(\sqrt[3]{t - a})$ можно получит как решение (3.8) при начальных данных, удовлетворяющих трем соотношениям

$$\vec{r}|_{t=a} = 0$$

Рассматривая a как произвольную константу, видим, что коэффициенты ряда $P_i(\sqrt[3]{t - t_1})$ зависят самое большее от $6N - 2$ констант. Поскольку различные решения не могут иметь одного и того же элемента, почти при всех начальных данных столкновение невозможно.[5]

[5] В этой связи ср.: «Большие величины относительной массы Солнца к массе планет и массы планет к массам их спутников тоже не могут быть случайным обстоятельством. Если бы массы планет были сравнимы с массой Солнца, солнечная система была бы совершенно иной. В данном случае существенно, что одно тело всегда находится близ центра масс системы, <...>. Ни одна из планет не могла бы оставаться подобно Солнцу близ современного центра масс солнечной системы. Вместо этого все они двигались бы по сложным почти не поддающимся предвычислению кривым. И хотя математика не в состоянии дать точного решения даже в случае трех тел почти одинаковой массы, она позволяет убедиться, что в нашем гипотетическом случае результаты были катастрофическими. *Некоторые планеты были бы уничтожены вследствие столкновения*, а другие по всей вероятности, выталкивались бы из системы до тех пор, пока система не оказалась бы в конце концов состоящей из двух самых

3.3. Задача трех тел

К сожалению, в случае одновременного соударения трех и более тел доказать аналога теоремы 9 пока не удалось. Возникающие при этом трудности весьма неожиданны. Так в 1908 г. фон Цейпель высказал следующее утверждение: если все r_{ij} ограничены, то тела всегда можно разбить на группы тел, сталкивающихся в определенной точке пространства. Условие ограниченности r_{ij} кажется не существенным, однако избавится от него до сих пор не удалось.[6] В случае задачи трех тел можно исключить из рассмотрения случай одновременного соударения трех тел, поскольку оно возможно лишь при весьма специальных начальных данных.

С тем, чтобы не исключать позже промежуточный случай между столкновением трех тел в одной точке пространства и простым столкновением двух тел, сразу докажем теорему:

Теорема 11. (Слудский, 1874) Если существует такая сходящаяся к t_1 последовательность a_k значений переменной t, что все расстояния $r_{ij}|_{t=a_k}$ стремяться к нулю, то момент импульса системы равен нулю.

Доказательство. Перейдем в систему отсчета, связанную с центром масс и воспользуемся вновь функцией

$$I(t) = \sum m_n q_n(t)^2,$$

для которой, напомним, уже получено

$$\frac{1}{2}\dot{I} = \sum m_n q_n \dot{q}_n,$$

больших тел, движущихся вокруг друг друга на умеренном расстоянии и имеющих при себе меньших компаньонов или системы спутников. Прочие тела смогли бы оставаться в системе лишь на очень больших расстояниях от очень крупных тел. Наш опыт в отношении двойных и кратных звезд показывает, что такие звезды встречаются в виде пар, отстоящих от других пар системы на относительно большие расстояния» (Ф. Уиппл. Земля. Луна и планеты, стр. 34)

[6] Алексеев В.М. Лекции по небесной механике. Ижевск, 1999.

и

$$\frac{1}{2}\ddot{I} = 2T + U = 2h - U.$$

Поскольку при притяжении $U < 0$, во всем рассматриваемом интервале $\ddot{I} > 0$. При $t = a_k \to t_1 - 0$ функция U как сумма членов вида $-cr_{ij}^{-1}$ стремится $-\infty$ и поэтому $\ddot{I}$ стремится к $+\infty$, и значит, на некотором интервале $[t_0, t_1)$ положительна. При этом функция $\dot{I}$ монотонно возрастает на интервале $[t_2, t_1)$. Такая функция может обратиться в нуль лишь при одном значении t, и начиная с этого значения $t = t_3$ вплоть до $t = t_1$ она будет знакоопределенной. На этом интервале функция $I(t)$ будет монотонной и поэтому она имеет конечный или бесконечный предел при $t = t_1$. Если этот предел отличен от нуля, то хотя бы одно $q_i|_{t=a_k}$ не стремится к нулю. Допустим для определенности, что таково x_1. Тогда из

$$0 = \sum m_i x_i = M x_1 + \sum m_i (x_i - x_1)$$

и того, что $|x_i - x_1| \leq r_{i1}|_{t=a_k}$ стремится к нулю, получаем противоречие. Поэтому предел $I(t_1) = 0$.

Воспользуемся теперь тождеством

$$\sum_{k=1}^{K} \xi_k^2 \sum_{k=1}^{K} \eta_k^2 = \left(\sum_{k=1}^{K} \xi_k \eta_k\right)^2 + \sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2$$

при $K = 3N$, $\xi_k = q_k \sqrt{m_m}$, $\eta_k = \dot{q}_k \sqrt{m_k}$, и получим

$$2IT = \frac{1}{4}\dot{I}^2 + \sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2.$$

Сохраняя в выражении

$$\sum_{k<l} (\xi_k \eta_l - \xi_l \eta_k)^2$$

только члены, отвечающие одной материальной точке, а не двум разным, можем заменить его лишь усилив неравенство на сумму трех слагаемых

$$\sum_{k=1}^{N} m_k^2 (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k)^2,\ \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (y_k \dot{x}_k - z_k \dot{y}_k)^2,\ \sum_{k=1}^{N} m_k^2 (y_k \dot{z}_k - z_k \dot{x}_k)^2.$$

В силу неравенства Шварца первое можно оценить как

$$N\sum_{k=1}^{N} m_k^2(y_k\dot z_k - z_k\dot y_k)^2 \ge \left(\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k\dot z_k - z_k\dot y_k)\right)^2$$

Поэтому, обозначая как $N\eta$ длину полного момента импульса системы, можем написать

$$2IT \ge \frac{1}{4}\dot I^2 + \eta > \eta.$$

Используя теперь соотношение $\ddot I - 2h = 2T$, имеем

$$\ddot I > \eta I^{-1} - 2h.$$

Ограничив изменение t интервалом $[t_3, t_1)$, можем умножить это неравенство на $-2\dot I > 0$ и проинтегрировать от t_3 до t:

$$\dot I(t_3)^2 - \dot I(t)^2 \ge 2\eta \ln\frac{I(t_3)}{I(t)} + 4h(I(t_3) - I(t)).$$

Поскольку $I(t) \ge 0$ тем более верно, что

$$2\eta \ln\frac{I(t_3)}{I(t)} \le \dot I(t_3)^2 + 4|h|I(t_3)$$

При $\eta > 0$ в пределе при $t = t_1$ правая часть неограниченно возрастает, переходя границу, стоящую справа, что невозможно; поэтому $\eta = 0$. $\square$

Доказанная теорема позволяет рассматривать случай тройного соударения в задаче трех тел как возникающий лишь при весьма специальных начальных данных, реализация которых на практике невероятна. Отсюда следует, что *в задаче трех тел соударение двух или трех тел невероятно.* Вейерштрасс, обнаружив это, предложил такую задачу (1885 г., конкурс на премию шведского короля Оскара II):

«Пусть дана система произвольного числа материальных точек, взаимодействующих по закону Ньютона. Требуется, в предположении, что не произойдет соударения каких либо двух точек, представить координаты каждой точки в виде рядов по каким либо непрерывным функциям времени, равномерно сходящихся для всех действительных значений этой переменной.»

Сколько можно понять, сам Вейерштрасс, опираясь на свою знаменитую теорему об аппроксимации произвольной функции полиномами, желал получить выражение для решения в виде

$$q_i(t) = \lim_{n=\infty} P_{n,i}(t),$$

где $P_{n,i}$ — некоторые полиномы. Существование таких полиномов сразу следует из непрерывности решения, более того, достаточно исключить случай тройного соударения, а ряд из теоремы 10 все равно доставляет непрерывную функцию. К несчастью, найти конструктивный способ отыскания полиномов $P_{n,i}$ до сих пор не удалось.

Победивший на том самом конкурсе Пуанкаре предложил другой подход, реализованный затем Зундманом.

3.4. Решение задачи трех тел с ненулевым моментом импульса

Заметим для начала, что можно указать параметр

$$v = -\int_{t_0}^{t} U dt,$$

годный для соударения любых двух тел. В самом деле, если при $t = t_1$ происходит соударение первого и второго тела, то

$$\frac{dv}{ds}|_{s=s_1} = -U\frac{dt}{ds} = -Ur|_{s=s_1} = m_1 + m_2$$

поэтому между окрестностями точек $s = s_1$ и

$$v = v_1 = -\int_{t_0}^{t_1} U dt,$$

имеется взаимно однозначное соответствие, то есть *решение задачи трех тел как функция параметра*

$$v = -\int\limits_{t=t_0}^{t} U dt$$

является голоморфной функцией в окрестности вещественной оси v*-плоскости.*

Это подтолкнуло Пуанкаре и Зундмана искать решение не в виде функций от t, как предлагал Вейерштрасс, а в виде рядов от некоторого параметра. Именно, координаты трех тел и время являются голоморфными функциями v вдоль всей вещественной оси плоскости v, то есть существует некоторая область G, в которой координаты голоморфны. По теореме Римана эту область можно отобразить на круг единичного радиуса $|\tau| < 1$, то есть решение задачи трех тел представимо в виде функций параметра τ, голоморфных в круге $|\tau| < 1$. Такие функции представимы в виде сходящегося во всем круге рядов по положительным степеням τ. Таким образом, и *решение задачи трех тел представимо в виде*

$$q_j = \mathfrak{P}_j(\tau), \quad t = \mathfrak{P}_0(\tau), \quad |\tau| < 1$$

Путем весьма непростых оценок Зундман (1912 г.) доказал, что в качестве G можно взять полосу $|\mathrm{Im}\, v| < \delta$ и указал выражение для δ. Отображение полосы на круг дается элементарной формулой

$$\tau = \frac{e^{\frac{\pi v}{2\delta}} - 1}{e^{\frac{\pi v}{2\delta}} + 1}$$

и в итоге известна связь t и τ. После этого коэффициенты рядов Зундман нашел явно. Тем самым, для решения задачи трех тел было найдено явное выражение в виде ряда.

К сожалению, когда в 1885 году Пуанкаре пытался искать решение описанным путем, Вейерштрасс отозвался об этом подходе как о «нецелесообразном». По всей видимости, эту нецелесообразность проще всего пояснить

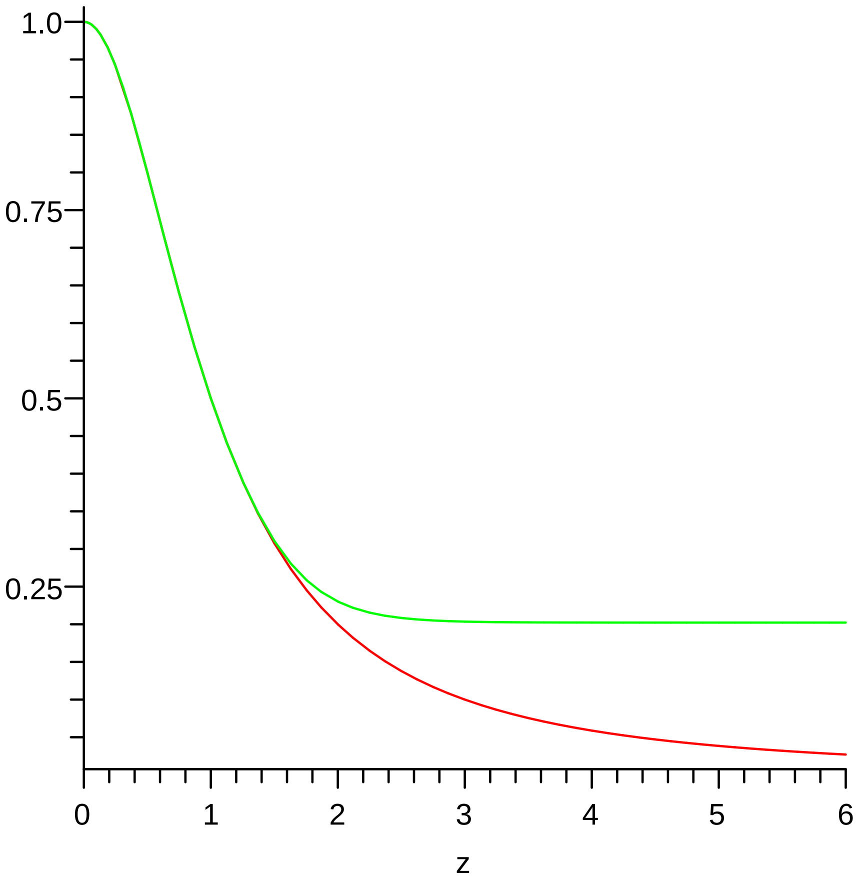

Рис. 3.1: Точное и параметрическое представление $(1 + z^2)^{-1}$

так. Функция
$$w = \frac{1}{1+v^2}$$
голоморфна в цилиндре $|\mathrm{Im}\ v| < 1/2$, поэтому ее, как и решение задачи трех тел, можно попытаться представить в виде

$$v = \mathfrak{P}_1(\tau), \quad w = \mathfrak{P}_2(\tau)$$

Первый ряд получается в результате обращения
$$\tau = \frac{e^{\pi v}-1}{e^{\pi v}+1}$$
а второй — в результате разложения в ряд Тейлора функции

$$(1+v(\tau)^2)^{-1}.$$

Взяв сто членов в этом ряде мы добьемся графического совпадения точного и параметрических представлений лишь при $v < 2$ (см. рис. 3.1).

Это вполне объяснимо: при отображении полосы на круг прямоугольник $|\mathrm{Re}\ v| < 1/2$ занимает почти весь круг $|\tau| < 1$, а для всей оставшейся полосы отводятся небольшие овалы возле $\tau = \pm 1$ (см. рис 3.2) К сожалению, те же проблемы возникают с использованием рядов Зундмана: как показал Белорицкий для нужд вычислительной астрономии в «сходящихся» рядах Зудмана нужно брать как минимум 10^{8*10^6} членов и поэтому они непригодны для вычисления координат.

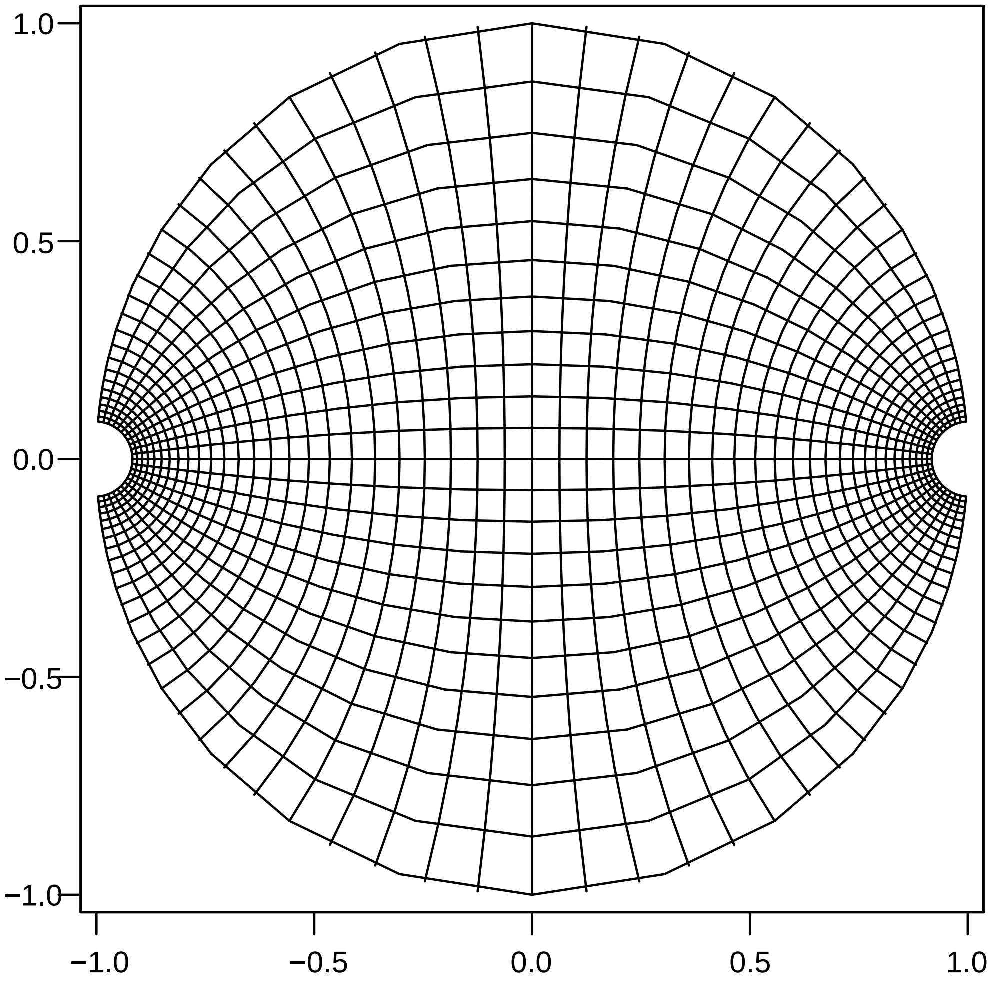

Рис. 3.2: Отображение прямоугольника $|\mathrm{Re}\ v| < 1/2$ в единичный круг, доставляемое отображением полосы на круг

Глава 4

Алгебраические особые точки

4.1. Проективная форма предыдущих результатов

Простейший тип особой точки функции $f(t)$ доставляет полюс, однако за нее решение можно без труда аналитически продолжить, перейдя от f к $\frac{1}{f}$. Эту же идею можно провести и для векторозначной функции

$$x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

причем многими путями.

Рассмотрим теперь решение $x(t)$ рациональной системы дифференциальных уравнений как точку проективного пространства. Изначально, по теореме Коши имеем

$$x = (\mathfrak{P}_1(t - t_0) : \cdots : \mathfrak{P}_n(t - t_0) : 1)$$

Возьмем точку t_1 внутри круга сходимости этих рядов и скажем, что

$$(\mathfrak{P}_1(t - t_1, t_0) : \cdots : \mathfrak{P}_n(t - t_1, t_0) : \mathfrak{P}_{n+1}(t - t_1, t_0))$$

является непосредственным продолжением

$$(\mathfrak{P}_1(t - t_0) : \cdots : \mathfrak{P}_n(t - t_0) : \mathfrak{P}_{n+1}(t - t_0))$$

если

$$\mathfrak{P}_i(t - t_0)\mathfrak{P}_j(t - t_1, t_0) = \mathfrak{P}_j(t - t_0)\mathfrak{P}_i(t - t_1, t_0)$$

для всех i и j. Помимо переразложения для построения продолжения можно использовать еще два конструктивных приема. Во-первых, задавшись каким либо рядом $\mathfrak{P}(t-t_0)$ можно записать

$$(\mathfrak{P}_1(t-t_0) : \dots : \mathfrak{P}_{n+1}(t-t_0)) = (\mathfrak{P}(t-t_0)\mathfrak{P}_1(t-t_0) : \dots : \mathfrak{P}(t-t_0)\mathfrak{P}_{n+1}(t-t_0))$$

и перераскладывать новые ряды. Во-вторых, если $\mathfrak{P}_1(0) \neq 0$ можно записать

$$(\mathfrak{P}_1(t-t_0) : \dots : \mathfrak{P}_{n+1}(t-t_0)) = (1 : \dots : \frac{\mathfrak{P}_{n+1}(t-t_0)}{\mathfrak{P}_1(t-t_0)})$$

и перераскладывать новые ряды.

Напр., ряд

$$x = (\sum_{i=0}^{\infty} t^i : 1)$$

сходящийся в круге $|t| < 1$, и описывающий функцию $x = \frac{1}{1-t}$, теперь можно продолжить за особую точку $t = 1$ так:

$$(\sum_{i=0}^{\infty} t^i : 1) = (1 : 1-t)$$

а продолжать $1-t$ не требуется.

В общем случае, удобно принять за определение полюса то свойство, что эта точка, особая для обычного аналитического продолжения, и неособая для проективного. При этом, если при $t = a$ имеется полюс, то

$$x = (\mathfrak{P}_1(t-a) : \dots, : \mathfrak{P}_{n+1}(t-a)) = (P_1(t-a) : \dots : 1),$$

где

$$P_i(t) = \frac{\mathfrak{P}_i(t-a)}{\mathfrak{P}_{n+1}(t-a)} = \frac{c_k}{(t-a)^k} + \dots$$

Запишем теперь дифференциальные уравнения

$$\dot{x}_1 = \frac{g_1(x;t)}{g_{n+1}(x;t)}, \dots, \dot{x}_n = \frac{g_n(x;t)}{g_{n+1}(x;t)},$$

где g_i — полиномы от x степени не выше q, в проективной форме. Для этого подставим в них выражения

$$x = (x_1, \dots, x_n) = (y_1 : \dots : y_{n+1}) = \left(\frac{y_1}{y_{n+1}} : \dots : 1\right)$$

Имеем

$$y_{n+1}\dot{y}_1 - y_1\dot{y}_{n+1} = y_{n+1}^2 \frac{y_{n+1}^q g_1}{y_{n+1}^q g_{n+1}}$$

Здесь выражение

$$y_{n+1}^q g_{n+1}(\frac{y_1}{y_{n+1}}, \dots; t) = G_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1}; t)$$

— однородный полином по y степени q, или как еще говорят форма порядка q, а

$$y_{n+1}^{q+2} g_1(\frac{y_1}{y_n}, \dots; t) = G_1(y_1, \dots, y_{n+1}; t) = y_{n+1}A_1(y; t) - y_1 B_1(y; t)$$

где A_1 и B_1 — однородные формы порядка $q+1$. Вообще, получается система из n уравнений

$$\{G_{n+1}(y; t)(y_{n+1}\dot{y}_i - y_i\dot{y}_{n+1}) = G_i(y; t), \quad (i = 1, \dots n) \tag{4.1}$$

где

$$G_i(y; t) = y_{n+1}A_i(y; t) - y_i B_i(y; t)$$

для $n+1$ неизвестной. Полагая $y_{n+1} \equiv 1$, получим, конечно, исходную. Однако мы можем добавить к этой системе вместо $\dot{y}_{n+1} = 0$ почти любое уравнение и это дает нам новые возможности.

Как в предыдущем разделе, пусть $t = a$ — конец ветви, в котором решение имеет особую точку, пусть t_m — последовательность, сходящаяся к a, тогда последовательность проективных точек $x(t_m)$ имеет предельную точку $b = (b_1 : \dots b_{n+1})$. Всегда можно отыскать такой индекс k, что отношение $x_k(t_n) : x_i(t_m)$ при всех i остается ограниченным, при стремлении

t_m к a, то есть $x_k(t)$ стремится к нулю не медленнее прочих координат. Запишем решение $x(t)$ в виде

$$x = \left(\frac{x_1}{x_k} : \dots : 1 : \dots \frac{1}{x_k}\right) = (y_1 : \dots : 1 : \dots y_{n+1})$$

Это решения удовлетворяет системе

$$\{\dot{y}_k = 0, \quad G_{n+1}(y;t)(y_{n+1}\dot{y}_i - y_i\dot{y}_{n+1}) = y_{n+1}A_i(y;t) - y_iB_i(y;t), \quad (i = 1, \dots n)$$

к которой можно добавить начальные условия

$$y_1(t_m) = \left.\frac{x_1}{x_k}\right|_{t=t_m}, \dots, y_k(t_m) = 1, \dots$$

Правые части начальных данных ограничены, поэтому из t_m можно извлечь подпоследовательность, соответствующие которым значения правых частей сходятся к некоторой точке $y = (b_1 : \dots : 1 : \dots : b_{n+1})$ с конечными b_i. Если

$$G_{n+1}(b_1, \dots, b_{n+1}; a) \neq 0$$

то применяя в окрестности точки $y_1 = b_1, \dots,\ t = a$ уточнение теоремы Коши также, как в предыдущем разделе, видим, что решение $x(t)$ должно совпадать с решением, доставляемым теоремой Коши при начальных данных с подходящим индексом m. Таким образом,

$$x(t) = (\mathfrak{P}_1(t-a) : \dots : 1 : \dots : \mathfrak{P}_{n+1}(t-a)),$$

то есть решение имеет полюс при $t = a$.

Теорема 12. (Проективная форма теоремы 6 Пенлеве). Ветвь $x = F(t)$ решения задачи Коши (2.2) существует вдоль дуги любой жордановой кривой, выходящей из точки $t = t_0$ и заканчивающейся или концом $\mathfrak{C}$, или особой точкой $t = a$. Эта особая точка или полюс, или существует последовательность точек $(x,t) = (F(t_m), t_m)$, которая сходится к точке (b, a) проективного пространства, в которой общий знаменатель $G_{n+1}(x;t)$ правых часть уравнений (2.2) обращается в нуль.

Если рассматривается уравнение первого прядка, то уравнение

$$G_{n+1}(x;a) = 0$$

имеет конечное число отделенных друг от друга корней, и в силу непрерывности $x(t)$ вплоть до $t = a$, исключая точку $t = a$, эта функция должна иметь предел в особой точке. Для системы уравнений произвольного порядка это можно установить лишь при дополнительных гипотезах.

4.2. Алгебраичность особой точки (*)

Вернемся теперь к изучению особой точки $t = a$ ветви решения системы (2.2). В силу теоремы 6 Пенлеве эта точка не будет полюсом только тогда, когда для любой последовательности t_m, стремящейся к a, все предельные точки последовательности точек $x = F(t_m)$ проективного пространства будут лежать на кривой

$$G_{n+1}(x;a) = 0.$$

Допустим теперь, что можно указать такую последовательность t_m, что для предельной точки $x = b$ соответствующей последовательности $x = F(t_m)$ не выполняется хотя бы одно из уравнений

$$G_1(x;a) = 0, \dots G_n(x;a) = 0.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $x = b$ — конечная точка и $G_1(b,a) \neq 0$. Тогда система уравнений

$$\frac{dt}{dx_1} = \frac{G_{n+1}(x;t)}{G_1(x;t)}, \dots \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{G_n(x;t)}{G_1(x;t)}, \tag{4.2}$$

с начальными условиями

$$t(\xi_1) = \tau, \quad x_2(\xi_1) = \xi_2, \dots$$

удовлетворяет уточнению теоремы Коши. Поэтому когда (τ, ξ) лежит в некоторой окрестности (a, b), то система (4.2) имеет решение

$$t = \varphi_1(x_1, \tau, \xi),\ x_2 = \varphi_2(x_1, \tau, \xi), \dots$$

голоморфное в некоторой окрестности точки $(x_1, \tau, \xi) = (b_1, a, b)$. Если $x_1 = \psi_1(t)$ — дифференцируемая функция, заданная вдоль некоторой кривой $\mathfrak{C}'$ на плоскости t, принимающая значения в рассматриваемой окрестности $x_1 = b_1$ и удовлетворяющая тождеству

$$\varphi_1(\psi_1(t)) \equiv t, \tag{4.3}$$

то из этого решения при фиксированных (τ, ξ) можно получить некоторое решение (2.2), положив

$$x_1 = \psi_1(t),\ x_2 = \varphi_2(\psi_1(t)) = \psi_2(t), \dots \tag{4.4}$$

(зависимость от τ, ξ мы здесь опустили).

В самом деле, дифференцируя тождество (4.3), получим

$$\varphi_1'|_{x_1=\psi_1(t)}\psi_1'(t) = 1$$

откуда

$$\begin{aligned}\psi_1'(t) &= \left.\frac{1}{\varphi_1'(x_1)}\right|_{x_1=\psi_1(t)} = \left.\frac{G_1(x_1, \varphi_2(x_1), \dots; \varphi_1(x_1))}{G_{n+1}(x_1, \varphi_2(x_1), \dots; \varphi_1(x_1))}\right|_{x_1=\psi_1(t)} \\ &= \frac{G_1(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots; t)}{G_{n+1}(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots; t)}\end{aligned}$$

Аналогично, имеем

$$\begin{aligned}\psi_2'(t) &= \varphi_2'(x_1)|_{x_1=\psi_1(t)}\psi_1'(t) = \\ &= \left.\frac{G_2(x_1, \varphi_2(x_1), \dots; \varphi_1(x_1))}{G_1(x_1, \varphi_2(x_1), \dots; \varphi_1(x_1))}\right|_{x_1=\psi_1(t)} \frac{G_1(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots; t)}{G_{n+1}(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots; t)} \\ &= \frac{G_2(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots; t)}{G_{n+1}(\psi_1(t), \psi_2(t), \dots; t)}\end{aligned}$$

Это и означает, что $x = \psi(t)$ — решение системы (2.2).

Обратимся теперь к нахождению функции $\psi_1(t)$. Для этого заметим, что уравнение

$$\varphi_1(x_1, \tau, \xi) - t = 0$$

удовлетворяется при $(x_1, \tau, \xi, t) = (b_1, a, b, a)$ и в некоторой окрестности этой точки оно голоморфно, поэтому, в силу подготовительной теоремы Вейерштрасса, оно может быть переписано как

$$(x_1 - b_1)^p + \mathfrak{P}_1(t - a, \tau - a, \xi - b)(x_1 - b_1)^{p-1} + \cdots = 0$$

в некоторой, быть может, меньшей окрестности точки $(x_1, \tau, \xi, t) = (b_1, a, b, a)$:

$$|x_1 - b_1| \leq \rho,\ |\tau - a| \leq \rho, \quad |\xi - b| \leq \rho,\ |t - a| \leq \rho.$$

Зафиксируем значение (τ, ξ), положив $(\tau, \xi) = (t_{n_k}, F(t_{n_k}))$, а число n_k — столь большим, чтобы эта точка попала в окрестность $|\tau - a| \leq \rho, \quad |\xi - b| \leq \rho$.

Применение подготовительной теоремы невозможно лишь тогда, когда все производные φ_1 по x_1 при $x_1 = b_1$ и $(\tau, \xi) = (a, b)$ равны нулю. В этом случае, начальная задача

$$\frac{dt}{dx_1} = \frac{G_{n+1}(x;t)}{G_1(x;t)}, \ldots \frac{dx_n}{dx_1} = \frac{G_n(x;t)}{G_1(x;t)},$$
$$t|_{x_1=b_1} = a, \ldots$$

имеет решение $t \equiv a$. Тогда равенство

$$G_{n+1}(x_1, x_2(x_1), \ldots, x_n(x_1); a) = 0$$

верно при всех x_1. В случае $n = 1$ отсюда сразу следует, что все коэффициенты $G_{n+1}(x;t)$ должны обращаться в нуль при $t = a$.

Это возможно, тогда, когда G_n делится на $t - a$. Таково, напр.,

$$\dot{x} = \frac{1}{t - a}$$

и любое его решение имеет в точке $t = a$ логарифмическую особенность.

В некоторой окрестности точки $(t, x_1) = (\tau, \xi_1)$ уравнение

$$t = \varphi_1(x_1) = \tau + c_q(x_1 - \xi_1)^q + \dots$$

может быть записано так

$$x_1 = \xi_1 + \sqrt[q]{t-\tau}\,\mathfrak{P}(\sqrt[q]{t-\tau})$$

Принимая это выражение за $\psi_1(t)$, видим, что система функций (4.4) задает решение системы уравнений (2.2) в окрестности точки $t = \tau$, принимающее значение $x = \xi$ при $t = \tau$. Исходное решение $x = F(t)$ голоморфно в окрестности точки $t = \tau$, лежащей на кривой $\mathfrak{C}$ и тоже принимает значение $x = \xi$ при $t = \tau$. Поскольку $G_{n+1}(\xi;\tau) \neq 0$, эти решения совпадают в силу теоремы единственности. Это означает, что

$$t = \varphi_1(F(t)),\ F_2(t) = \varphi_2(F_1(t)), \dots$$

и $q = 1$. Поскольку уравнение $\varphi_1(x_1) = t$ в рассматриваемой окрестности точки $(t, x_1) = (\tau, \xi_1)$ равносильно

$$(x_1 - b_1)^p + \mathfrak{P}_1(t-a)(x_1 - b_1)^{p-1} + \dots = 0$$

то

$$(F_1(t) - b_1)^p + \mathfrak{P}_1(t-a)(F_1(t) - b_1)^{p-1} + \dots = 0$$

выполняется в некоторой окрестности точки $t = \tau$, лежащей в общем круге сходимости рядов $\mathfrak{P}_1(t-a), \dots$, а стало быть, и вдоль всей дуги $\tau \dots a$.[1] По теореме о локальной униформизации последнее равенство можно переписать как

$$F_1(t) = \mathfrak{P}(\sqrt[p]{t-a})$$

[1]Отсюда не следует, что вдоль всей дуги $\tau \dots a$ верно $\varphi_1(F_1(t)) = t$, поскольку не доказано, что $F_1(t)$ на дуге $\tau \dots a$ не принимает значения, выходящие за пределы $|F_1(t) - b_1| \leq \rho$.

Таким образом, если b — конечная точка и среди $G_1(b,a),\dots,G_{n+1}(b,a)$ имеются отличные от нуля, то ветвь $x = F(t)$ совпадает в окрестности особой точки $t = a$ с рядом $\mathfrak{P}(\sqrt[q]{t-a})$ по дробным степеням $t-a$.

Если же b — бесконечно удаленная, то сделав ту же замену, что и при доказательстве теоремы (12), представим решение в виде

$$(x_1(t) : \dots : 1) = (\dots : \mathfrak{P}(\sqrt[q]{t-a})) = P(\sqrt[q]{t-a})$$

Такую особую точку называют алгебраической.

Эти размышления не применимы только тогда, когда для любой последовательности t_m, сходящейся к особой точке a, соответствующие значения $x = F(t_m)$ имеют своими предельными точками только корни системы

$$G_1(x;a) = 0,\ G_2(x;a) = 0,\dots,G_{n+1}(x;a) = 0$$

в проективном смысле. Эта система $n+1$ уравнения на n неизвестноых $x = (x_1,\dots,x_n)$ и в общем случае она разрешима лишь при некоторых значениях t. Отметим на t плоскости эти значения и соединим их разрезами с границей G, тогда мы получим односвязную область, в которой уже система несовместна, то есть поправив область G, можно считать этот случай невозможным. Поэтому доказанное удобно сформулировать так

Теорема 13 (Пенлеве). Если при всех значениях t, меняющихся в некоторой односвязной области G, коэффициенты функции $G_i(x;t)$ голоморфны, а система

$$G_0(x_1,x_2,\dots;t) = 0,\ \dots,\ G_M(x_1,x_2,\dots;t) = 0$$

с учетом и бесконечно удаленных решений не совместима, то продолжение любого ряд, доставляемого теоремой Коши для системы рациональных дифференциальных уравнений (2.2), вдоль любой жордановой кривой $\mathfrak{C}$, лежащий целиком в G, встречает на своем пути лишь алгебраические особые точки.

При этом из рассмотрения исключаются некоторые дифференциальные уравнения (2.2), правые части которых таковы, что система

$$G_1(x;a) = 0,\ G_2(x;a) = 0, \ldots, G_{n+1}(x;a) = 0$$

совместна при всех a. Такие дифференциальные уравнения будем называть *особыми.*

Стоит отметить, что уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = \frac{G_1(x;t)}{G_2(x;t)}$$

не может быть особыми. В самом деле, по условию G_0 — наименьший знаменатель, то есть он не имеет общих множителей с числителем, а с другой стороны совместимость уравнений

$$G_1(x;a) = 0,\ G_2(x;a) = 0$$

при всех a означает как раз , что $G_1(x;t) = \lambda(x;t)G_0(x;t)$, где $\lambda(x;t)$ — рациональная функция x. К сожалению, в случае уравнения второго порядка встречаются особые дифференциальные уравнения.

4.3. Решение задачи Коши как функция начальных данных

Предыдущее рассмотрение как будто бы открывает возможность рассмотрения решения задачи Коши

$$\{\dot{x} = f(x;t), \quad x|_{t=t_0} = x_0$$

и как функции начальных данных. Согласно уточнению теоремы Коши, если при $t = a,\ x = b$ правая часть голоморфна, то решение

$$x = \varphi(t, t_0, x_0) = \mathfrak{P}(t - a, t_0 - a, x_0 - b)$$

Придадим t и t_0 фиксированные значения и рассмотрим x как аналитическую функцию x_0. Теорема Коши доставляет нам ее начальный элемент $x = \mathfrak{P}(x_0 - b)$, продолжая его получим многозначную функцию.

При доказательстве теоремы единственности мы видели, что начальный элемент $x = \varphi(t, t_0, x_0)$ отображает малую окрестность $x_0 = b$ на некоторую окрестность $x = b$, а отображение $x_0 = \varphi(t_0, t; x)$ ставить в соответствие точкам этой окрестности их прообразы, и в этом смысле является обратным к $x = \varphi(t, t_0; x_0)$. Таким образом, решение задачи Коши задает локально взаимно однозначное соответствие между переменными x_0 и x. Глобально это неверно: общее решение не являлось бы однозначной функцией начальных данных.

Пример 4.3.1. Рассмотрим, например, уравнение М. Гамбургера

$$\dot{x} + \frac{t}{x} = 0$$

которое имеет, очевидно, общее решение

$$x^2 + t^2 = C;$$

взяв $t_0 = 0$ имеем

$$x^2 + (t^2 - x_0^2) = 0$$

С аналитической точки зрения ситуация здесь не простая: при $t \neq 0$ это уравнение задает одну двузначную аналитическую функцию x_0 с подвижной алгебраической особой точкой, а при $t = 0$ — две различные однозначные аналитические функции x_0 (продолжая элемент $x = x_0$ нельзя получить $x = -x_0$).

Доказательство теоремы 13 позволяет высказать следующие *гипотезы*: *если уравнение является общим, то, во-первых, решение задачи Коши как функция x_0 имеет только алгебраические особые точки, а, во-вторых, количества ветвей решения как функции t и как функции x_0 совпадают.*

Отсюда далее следует, что уравнение, имеющее как функция t конечное число ветвей, является таковым и как функция x_0. Поскольку же эта функция имеет только алгебраические при всех x_0 без исключения (в отличие от переменной t, меняющейся в области с разрезами G), то в этом случае решение задачи Коши зависит от x_0 алгебраически.

Для обоснования можно указать на следующие соображения. В окрестности любой точки $x_0 = b$ можно построить решение задачи Коши, которое будет иметь самое большее алгебраическую особую точку и сходится в некоторой области $|t - a| < r$. В самом деле, поскольку если при $x_0 = b$ не применима теорема Коши, то нужно сделать описанную замену переменных, то есть обратить по подготовительной теореме Вейерштрасса

$$t = \psi(x_1, x_0)$$

При этом получится алгебраическая особенность как по t (о чем и говорит теорема Пенлеве 13), так и по x_0. Продолжая это решение по t до рассматриваемого фиксированного значения по любому пути и принимая во внимание то, что коэффициенты получающихся рядов будут рациональными функциями коэффициентов исходного ряда, получим решение $x = \varphi(t, t_0, x_0)$, имеющее при $x = x_0$ разве лишь алгебраическую точку, что и утверждает первая гипотеза. Разветвления по t и по x_0 происходят одновременно, поэтому число ветвей одной и то же.

Как ни правдоподобны высказанные гипотезы, они тем не менее не верны. Контрпример был указан Пенлеве в 1908 г.[2]

Пример 4.3.2. Рассмотрим

$$\dot{x} = \frac{x}{t(x+1)}$$

его общее решение дается как

$$xe^x = Ct$$

[2]

Точки $t = 0$ и $t = \infty$ являются неподвижными особыми точками, соединим их разрезом l, скажем по отрицательной полуоси и получим область G. Теорема Пенлеве утверждает, что в этой области могут быть только алгебраические особые точки. Так оно и есть. Если продолжая частное решение $x(t)$ вдоль любого контура $t_0 \ldots t_1$ мы придем к особой точке, то $x(t_1) = -1$, откуда

$$t_1 = \frac{-1}{eC}.$$

В окрестности этой точки решение дается как

$$-\frac{1}{e} + \frac{1}{2e}(x+1)^2 + \cdots = -\frac{1}{e} + C(t - t_1),$$

откуда

$$x = \mathfrak{P}(\sqrt{C(t - t_1})$$

Таким образом, если C — положительно число, то точка ветвеления решения попадает на разрез и решение однозначно в области G, если $C = 0$ — то решение однозначно и равно тождественно нулю, в прочих случаях решение имеет одну подвижную алгебраическую точку в G и является двузначной функцией.

При этом, если взять $t_0 = 1$, то общее решение задачи Коши будет

$$xe^x = x_0 e^{x_0} t$$

Отсюда видно, что x как функция x_0 вовсе не алгебраическая и не двузначная. На самом деле, уравнение

$$we^w = z$$

при любом комплексном z имеет бесконечно много решений.

Пенлеве признавал, что в текст стокгольмских лекций вкралась ошибка, связанная с излишне смелым обращением с зависимостью от начальных данных. При этом Пенлеве считал единственным существенным упущением то, что не была рассмотрена ситуация, когда число ветвей решения как функции t зависит от начальных данных и при этом, на x_0-плоскости имеются кривые или более сложные множества, при которых число ветвей отлично от общего случая. Случай уравнений второго порядка был обойден молчанием.