6.4.2. Математический анализ, Вопросы для подготовки к экзамену 1 семестра 2014-2015 [4199]

Замечание. Вопросы, в формулировке которых присутствует термин "ряд", в январе 2014 года на экзамене присутствовать не будут.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562g-d1.t9-2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 101(d1.t9-2)

1. Сформулируйте определение сходящегося числового ряда.

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$".

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции на промежутке.

4. Найдите $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\, dx$.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

6. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

7. Докажите, что $\forall n \geqslant 0, \forall x \in [0;\, 2]$ верно неравенство $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{10\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562g-d2.t1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 102(d2.t1)

1. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Напишите формулу дифференциала первого порядка сложной функции.

3. Сформулируйте теорему о признаке Лейбница сходимости числового ряда.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = xe^{-x}$.

5. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Коши".

7. Докажите, что $\forall x$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сходится и его сумма равна $\sin x$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562g-d3.t4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 103(d3.t4)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

2. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о производной обратной функции.

7. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d4.t6
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 104(d4.t6)

1. Сформулируйте определение первообразной.

2. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$".

3. Что такое неопределенный интеграл?

4. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

5. При каких x ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

6. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные до n-го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $f^{(k)}(x_0)$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

7. Докажите вторую теорему Вейерштрасса.

8. Докажите, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ является бесконечно малой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d1.t1-v1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 111(d1.t1-v1)

1. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение производной n—го порядка функции.

3. Сформулируйте теорему о признаке Коши сходимости числового ряда в "предельной форме".

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = x^2 \ln x$.

5. Докажите теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Коши".

7. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d1.t2-v2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 112(d1.t2-v2)

1. Сформулируйте определение сходящегося числового ряда.

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$".

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является ограниченной в некоторой окрестности точки $x = a$ функцией.

6. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1\text{-}4$, T562g-d1.t3-v3
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 113(d1.t3-v3)

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение обратной функции.

3. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

4. Найдите $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

6. Докажите теорему об обобщенной формуле конечных приращений (Коши).

7. Докажите, что $\forall n \geqslant 0, \forall x \in [0;\,2]$ верно неравенство $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| < \frac{10\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1\text{-}4$, T562g-d1.t4-v4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 114(d1.t4-v4)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции в точке $x = a$.

2. Сформулируйте определение точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии убывания дифференцируемой функции на интервале.

4. Найдите $\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 0$ верно утверждение $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о производной частного двух функций.

7. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1-x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1\text{-}4$, T562g-d1.t5-v5
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 115(d1.t5-v5)

1. Сформулируйте определение непрерывной на промежутке функции.

2. Сформулируйте определение производной функции $f(x)$ в точке $x = a$.

3. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда.

4. Найдите $\int e^x \cos x\,dx$.

5. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

6. Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d1.t6-v6
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 116(d1.t6-v6)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to b$ при $x \to +\infty$".

2. Сформулируйте определение дифференциала функции в данной точке.

3. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

4. При каких x ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

5. Докажите теорему о производной суммы двух функций.

6. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

7. Пусть $f(x) = \begin{cases} |x| \ln |x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$ Найдите первообразную этой функции на всей числовой оси.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d1.t7-v7
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 117(d1.t7-v7)

1. Сформулируйте определение первообразной.

2. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.

3. Используя теорему о производной обратной функции и формулу $(e^x)' = e^x$, найдите производную функции $f(x) = \ln x$.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = xe^{-x}$.

5. Докажите теорему теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

6. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

7. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d2.t1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 121(d2.t1)

1. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Напишите формулу дифференциала первого порядка сложной функции.

3. Сформулируйте теорему о признаке Лейбница сходимости числового ряда.

4. Найдите производную 7–го порядка функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Гейне".

7. Докажите, что $\forall x$ $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d2.t2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 122(d2.t2)

1. Сформулируйте определение суммы числового ряда.

2. Сформулируйте определение вертикальной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в общей форме.

4. Найдите $\int \sin \ln x \, dx$.

5. Докажите, что сумма двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

6. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

7. Докажите, что $\forall x \ \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d2.t3
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 123(d2.t3)

1. Сформулируйте определение точной верхней грани функции $f(x)$ на множестве X.

2. Сформулируйте определение "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a + 0$".

3. Сформулируйте необходимые условия существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

4. Найдите $\int \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) dx$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $-\ln(1 - x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о правиле Лопиталя для вычисления $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $x \in [a, +\infty)$, $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, и $f(a) = b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своей точной верхней грани на промежутке $x \in [a, +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d2.t4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 124(d2.t4)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

2. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \ln x \, dx$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\cos x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о производной сложной функции.

7. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $x \in [a;\ +\infty)$, $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, $f(a) = b$, $\exists c \in (a;\ +\infty) : f(c) < b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своей точной нижней грани на промежутке $x \in (a;\ +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562g-d2.t5**
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 125(d2.t5)

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to a$.

2. Сформулируйте определение равномерно непрерывной на промежутке X функции.

3. Сформулируйте интегральный признак сходимости числового ряда.

4. Найдите $\int x \ln \sqrt{1+x^2}\, dx$.

5. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, **(1)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$, **(2)** $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$, $x \to 0$.

6. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

7. Найдите все предельные точки последовательности $x_n =$ дробная часть числа $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562g-d2.t6**
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 126(d2.t6)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение первообразной.

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.

4. При каких $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

5. Докажите теорему о производной произведения двух функций.

6. Докажите теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.

7. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ при $\alpha > 0$ является бесконечно малой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562g-d2.t7**
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 127(d2.t7)

1. Сформулируйте определение предельной точки числового множества.

2. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.

4. Найдите $\int \cos \ln x\, dx$.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

6. Докажите теорему о признаке Даламбера сходимости числового ряда с положительными членами в "непредельной" форме.

7. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{n^a}{b^n}$ при $b > 1$ является бесконечно малой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d3.t1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 131(d3.t1)

1. Сформулируйте определение ограниченного снизу множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение дифференцируемой n раз функции.

3. Сформулируйте теорему о признаке Абеля-Дирихле сходимости числового ряда.

4. Найдите $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx$.

5. Докажите теорему Ферма (о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции).

6. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Коши".

7. Докажите, что функция $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0; +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d3.t2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 132(d3.t2)

1. Сформулируйте определение абсолютно сходящегося числового ряда.

2. Сформулируйте отрицание определения фундаментальной числовой последовательности.

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

4. Найдите $\int e^x \sin 2x\,dx$.

5. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

6. Докажите, что если $f''(x) < 0$ на промежутке $x \in (a,\, b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом промежутке направлен выпуклостью вверх.

7. Докажите, что $\forall b$ верно равенство $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d3.t3
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 133(d3.t3)

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте необходимые условия перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$.

6. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, $f'(x_0) = 0$, $g'(x_0) = 0$, $g''(x_0) \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$.

7. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{b^n}{n^a}$ при $b > 1$ является бесконечно большой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1\text{-}4$, T562g-d3.t4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 134(d3.t4)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

2. Сформулируйте определение наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о производной обратной функции.

7. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1\text{-}4$, T562g-d3.t5
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 135(d3.t5)

1. Сформулируйте "по Коши" определение "$f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$".

2. Сформулируйте определение непрерывной в точке функции.

3. Сформулируйте теорему о признаке сравнения для числовых рядов.

4. Найдите $\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}\,dx$.

5. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о пределе при $x \to +\infty$ монотонной ограниченной функции.

7. Докажите, что $\forall b \in [-2; 2]$ верно равенство $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n \cdot n!}{n^n} = 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1\text{-}4$, T562g-d3.t6
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 136(d3.t6)

1. Сформулируйте определение бесконечно большой положительной последовательности.

2. Что такое неопределенный интеграл?

3. Сформулируйте теорему о формуле Коши.

4. При каких значениях параметра p ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n^2}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

5. Докажите теорему теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

6. Докажите первую теорему Вейерштрасса.

7. Докажите, что $\forall n \geqslant 0, \forall x \in [0; 3]$ верно неравенство $\left| e^{2x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^k}{k!} \right| < \frac{1000 \cdot 6^{n+1}}{(n+1)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562g-d3.t7
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 137(d3.t7)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to -\infty$ при $x \to a+0$".

2. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

3. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.

4. Найдите все предельные точки последовательности $x_n = (-1)^n$.

5. Докажите, что сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

6. Докажите, что из любой ограниченной числовой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

7. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(0;\,+\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562g-d4.t1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 141(d4.t1)

1. Сформулируйте определение неограниченного множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение дифференциала функции в данной точке.

3. Сформулируйте теорему о перестановке членов условно сходящегося числового ряда.

4. Найдите $\int \frac{dx}{\cos x}$.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

6. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

7. Пусть $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{4}{x_n}\big)$, $n \geqslant 1$. Докажите, что существует $\lim_{n\to+\infty} x_n$ и найдите этот предел.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562g-d4.t2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 142(d4.t2)

1. Сформулируйте определение условно сходящегося числового ряда.

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to -\infty$".

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии убывания дифференцируемой функции в точке.

4. Найдите $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.

5. Сформулируйти и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке.

6. Докажите, что если $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ "по Гейне", то $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ "по Коши".

7. Докажите, что $\forall x \in (-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2})$ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d4.t3
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 143(d4.t3)

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение предела функции в точке "по Коши".

3. Сформулируйте теорему Кантора.

4. Найдите $\int \frac{dx}{\cos x}$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $e^{-x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

6. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела $\lim_{x\to a} f(x)$. Докажите утверждение о достаточности условия Коши.

7. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном промежутке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d4.t4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 144(d4.t4)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение предела функции $f(x)$ при $x \to a$.

2. Сформулируйте определение точки локального эстремума функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии убывания дифференцируемой функции на промежутке.

4. Найдите $\int x \ln x \, dx$.

5. Используя равенство $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ и определение обратной функции, докажите, что $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. Докажите, что ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

7. Докажите, что $\forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d4.t5
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 145(d4.t5)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение бесконечно большой положительной функции $x \to a$.

2. Сформулируйте определение точки разрыва функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о признаке Даламбера сходимости числового ряда в "непредельной форме".

4. Найдите $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

5. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

6. Докажите неравенство Бернулли, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$ при $x \geqslant -1$ и $n \geqslant 1$.

7. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$ и имеет наклонную асимптоту, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном промежутке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d4.t6
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 146(d4.t6)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$".

2. Что такое неопределенный интеграл?

3. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

4. При каких x ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

5. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные до n-го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $f^{(k)}(x_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

6. Докажите вторую теорему Вейерштрасса.

7. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d4.t7
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 147(d4.t7)

1. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.

2. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши предела функции при $x \to +\infty$.

4. Найдите $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

6. Пусть $P_n(x)$ — многочлен Тейлора дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$. Докажите, что $f(x) = P_n(x) + o\big((x-x_0)^n\big)$.

7. Докажите, не пользуясь правилом Лопиталя, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d5.t1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 151(d5.t1)

1. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение дифференцируемой функции.

3. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

4. Найдите производную 12–го порядка функции $f(x) = xe^{-x}$.

5. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = AB$.

6. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите утверждение о необходимости условия Коши.

7. Докажите, что $\forall x\ \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d5.t2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 152(d5.t2)

1. Сформулируйте определение первообразной.

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$".

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии убывания дифференцируемой функции в точке.

4. Найдите производную 11–го порядка функции $f(x) = x\sin x$.

5. Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

6. Докажите, что если $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ "по Коши", то $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ "по Гейне".

7. Докажите, что $\forall x$ $\lim_{m\to+\infty} \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = e^{-x}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d5.t3
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 153(d5.t3)

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение предела функции в точке "по Гейне".

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$.

4. Найдите $\int \frac{dx}{\sin x}$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о необходимых условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

7. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d5.t4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 154(d5.t4)

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение точки локального максимума функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

4. Найдите $\int e^x \sin x\,dx$.

5. Используя равенства $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, докажите, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

7. Докажите, что $\forall n > 0$, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ верно неравенство $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| < \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d5.t5
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 155(d5.t5)

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$".

2. Сформулируйте определение функции, убывающей в точке.

3. Используя теорему о производной обратной функции, найдите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

4. Найдите $\int e^{2x}\sqrt{1-e^x}\,dx$.

5. Докажите теорему о формуле Лагранжа (конечных приращений).

6. Докажите теорему о признаке Коши сходимости числового ряда с положительными членами в "непредельной" форме.

7. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}, & \text{если}\, x \neq 0, \\ 0, & \text{если}\, x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d5.t6
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 156(d5.t6)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение предела функции в точке.

2. Напишите формулу дифференциала первого порядка сложной функции.

3. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.

4. При каких x ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot n^x$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

5. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + o(x)$ при $x \to 0$.

6. Докажите, что если число b является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие окрестности, то то же число является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие подпоследовательности.

7. Докажите, что $\forall n \geqslant 0, \forall x > 0$ верно неравенство $\left|e^{-x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!}\right| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d5.t7
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 157(d5.t7)

1. Сформулируйте определение точной верхней грани числового множества.

2. Сформулируйте определение производной функции в точке.

3. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

4. Найдите $\int e^{x}\sqrt{1-e^x}\,dx$.

5. Докажите теорему теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

6. Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

7. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 161(d6.t1)

1. Сформулируйте определение неограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение производной функции в точке.

3. Сформулируйте теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$.

5. Докажите теорему о необходимом условии сходимости числового ряда.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Гейне".

7. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на некотором интервале $x \in (-a,\, a)$, и $\forall x, y \in (-a,\, a)$ таких, что $x + y \in (-a,\, a)$ верно равенство $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, то найдется такое число C, что $C \cdot f'(x) = 1 + (f(x))^2$ на указанном промежутке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 162(d6.t2)

1. Что такое неопределенный интеграл?

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$\lim_{x\to a} f(x) = b$".

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

4. Найдите производную 11–го порядка функции $f(x) = xe^x$.

5. Докажите, что сумма бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является ограниченной в некоторой окрестности точки $x = a$ функцией.

6. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, $g'(x_0) \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

7. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет строгий локальный максимум.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t3
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 163(d6.t3)

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение дифференциала n—го порядка функции.

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши для последовательностей.

4. Найдите $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$.

6. Докажите, что если $f''(x) > 0$ на промежутке $x \in (a,\, b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом промежутке направлен выпуклостью вниз.

7. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $x \in (0; +\infty)$ и $\forall x > 0$, $y > 0$ верно равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$, то найдется такое число C, что $f'(x) = \frac{C}{x}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 164(d6.t4)

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$".

2. Сформулируйте определение точки устранимого разрыва функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

4. Найдите $\int \arcsin x\, dx$.

5. Используя равенство $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ и определение обратной функции, докажите, что $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

7. Докажите, что если $f''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t5
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 165(d6.t5)

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$.

2. Сформулируйте определение функции, возрастающей в точке.

3. Используя теорему о производной обратной функции, найдите производную функции $f(x) = \arcsin x$.

4. При каких x ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

5. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему о признаке Даламбера сходимости числового ряда с положительными членами в "предельной" форме.

7. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t6
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 166(d6.t6)

1. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.

2. Сформулируйте определение дифференциала n—го порядка функции.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

4. При каких p ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

5. Докажите теорему Ролля.

6. Докажите, что если число b является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие подпоследовательности, то то же число является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие окрестности.

7. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси и $\forall x, y$ верно равенство $f(x+y) = f(x)f(y)$, то найдется такое число C, что $f'(x) = Cf(x)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t7
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 167(d6.t7)

1. Сформулируйте определение производной n—го порядка функции.

2. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.

3. Используя теорему о производной обратной функции и формулу $(e^x)' = e^x$, найдите производную функции $f(x) = \ln x$.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = xe^{-x}$.

5. Докажите теорему теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

6. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

7. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d6.t8
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 168(d6.t8)

1. Сформулируйте определение неограниченной числовой последовательности.

2. Сформулируйте определение наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\, b]$.

4. Найдите все предельные точки последовательности $1;\ \frac{1}{2};\ \ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ldots$

5. Докажите теорему о достаточном условии убывания дифференцируемой функции в точке.

6. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

7. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d7.t1
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 171(d7.t1)

1. Сформулируйте определение положительного вещественного числа.

2. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

3. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$.

5. Сформулируйти и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке.

6. Докажите теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.

7. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $\forall x_1 \in (a;b)$, $\forall x_2 \in (a;b)$: $x_1 < x_2$ график функции $y = f(x)$ на интервале $(x_1;x_2)$ лежит ниже отрезка, соединяющего точки $\big(x_1; f(x_1)\big)$ и $\big(x_2; f(x_2)\big)$. Докажите, что график функции $y = f(x)$ лежит выше любой касательной к этому графику, за исключением точки касания.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d7.t2
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 172(d7.t2)

1. Сформулируйте определение равных положительных вещественных чисел.

2. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+\infty}\big(f(x)+g(x)\big)$.

3. Сформулируйте теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x)=e^{-x^2}$.

5. Используя равенства $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ и $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, докажите, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

6. Докажите теорему Кантора.

7. Докажите, что если $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x)=f(x_0)$ имеет единственное решение $x=x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d7.t3
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 173(d7.t3)

1. Сформулируйте правило сравнения положительных вещественных чисел.

2. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+0}\big(f(x)\cdot g(x)\big)$.

3. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в данной точке.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x)=\sqrt[3]{x^2(6-x)}$.

5. Докажите теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

6. Докажите теорему Больцано-Вейерштрасса.

7. Докажите, что если $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)=0$, $f^{(4)}(x_0)=0$, $f^{(5)}(x_0)\neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x)=f(x_0)$ имеет единственное решение $x=x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d7.t4
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 174(d7.t4)

1. Сформулируйте определение суммы двух положительных вещественных чисел.

2. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

3. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, непрерывной в данной точке.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x)=x\operatorname{arctg} x$.

5. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

6. Докажите, что последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонна.

7. Докажите, что $\forall n\geqslant 0, \forall x\in[0;\,3]$ верно неравенство $\left|\sin x - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\right| < \frac{3^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d7.t5
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 175(d7.t5)

1. Сформулируйте определение произведения двух положительных вещественных чисел.

2. Приведите пример: $\exists\lim_{x\to+0} f(x)$ и $\exists\lim_{x\to+0} g(x)$, но $\nexists\lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

3. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в данной точке.

4. Найдите $\int\ln\bigl(\sqrt{x^2+1}-x\bigr)dx$.

5. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+o(x^4)$ при $x\to 0$.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Коши".

7. Докажите, что если $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)<0$, то в точке x_0 функция $y=f(x)$ не имеет локального экстремума.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d7.t6
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 176(d7.t6)

1. Сформулируйте определение разности двух положительных вещественных чисел.

2. Приведите пример: $\exists\lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists\lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists\lim_{x\to+\infty}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr)$.

3. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\,b]$.

4. Найдите $\int\ln\bigl(x+\sqrt{x^2-1}\bigr)dx$.

5. Докажите, что сумма бесконечно малой при $x\to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x=a$ функции является ограниченной в некоторой окрестности точки $x=a$ функцией.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Коши", то $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Гейне".

7. Докажите, что если $f'(x_0)\neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x)=f(x_0)$ имеет единственное решение $x=x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562g-d7.t7
сентябрь-декабрь 2014 T562g, T562g-Набор вопросов 177(d7.t7)

1. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

2. Приведите (с обоснованием) пример иррационального вещественного числа.

3. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

4. Найдите $\int\sin\ln x\,dx$.

5. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x)=b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to a} f(x)=b$ "по Коши".

7. Докажите, что если $f''(x_0)\neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x)=f(x_0)$ имеет единственное решение $x=x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t101b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 201(t101b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

2. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = e^x$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 4$.

6. Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

7. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t102b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 202(t102b)

1. Сформулируйте определение первообразной.

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$".

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции на промежутке.

4. Найдите $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = e^{-x}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 4$.

6. Докажите теорему о единственности предела функции в точке.

7. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) + g(x)\big)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t103b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 203(t103b)

1. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Напишите формулу дифференциала первого порядка сложной функции.

3. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

4. Нарисуйте эскиз графика функции $f(x) = xe^{-x}$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \cos x$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 6$.

6. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

7. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+0}\big(f(x) \cdot g(x)\big)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t104b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 204(t104b)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение первообразной.

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.

4. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\cos 5x - \cos 7x}{x^2}$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 2$.

6. Докажите, что сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

7. Может ли неограниченная последовательность быть сходящейся?.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t105b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 205(t105b)

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение дифференциала функции в данной точке.

3. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

4. Найдите $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = e^{-x}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 4$.

6. Докажите теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

7. Приведите пример: $\exists \lim_{x\to +0} f(x)$ и $\exists \lim_{x\to +0} g(x)$, но $\nexists \lim_{x\to +0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t106b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 206(t106b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции в точке $x = a$.

2. Сформулируйте определение точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии убывания дифференцируемой функции на интервале.

4. Найдите $\int \frac{dx}{x(1+x^2)}$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = e^{2x}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 4$.

6. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

7. Приведите пример: $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to +\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to +\infty} \big(f(x)\cdot g(x)\big)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t107b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 207(t107b)

1. Сформулируйте определение непрерывной на промежутке функции.

2. Сформулируйте определение производной функции $f(x)$ в точке $x = a$.

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии убывания дифференцируемой функции на промежутке.

4. Найдите $\int e^x \cos x\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \frac{1}{1+x}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 5$.

6. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Докажите достаточность.

7. Верно ли утверждение: "Если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$."

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t108b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 208(t108b)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to b$ при $x \to +\infty$".

2. Сформулируйте определение дифференциала функции в данной точке.

3. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

4. Найдите $\lim_{x\to b} \frac{b^x - x^b}{(x-b)^2}$ при $b = e$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \sin x$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 5$.

6. Докажите теорему теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

7. Верно ли утверждение: "Если $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$."

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t109b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 209(t109b)

1. Что такое неопределенный интеграл?

2. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.

3. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.

4. Найдите $\lim_{x\to b} \frac{b^x - x^b}{x-b}$ при $b = 3$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 2$.

6. Докажите теорему о формуле Лагранжа (конечных приращений).

7. Верно ли утверждение: "Если $\exists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ и $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$."

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t110b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 210(t110b)

1. Сформулируйте определение точной верхней грани функции $f(x)$ на множестве X.

2. Сформулируйте определение "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a + 0$".

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int x \ln x\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \frac{1}{1-x}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 5$.

6. Докажите теорему о производной произведения двух функций.

7. Верно ли утверждение: "Если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$, то $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$."

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562d-t111b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 211(t111b)

1. Сформулируйте определение вертикальной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

2. Сформулируйте определение предела последовательности.

3. Сформулируйте теорему Ферма.

4. Найдите $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 2$.

6. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

7. Верно ли утверждение: "Если $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a} f(x)g(x)$?"

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562d-t112b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 212(t112b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

2. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \ln x\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \ln(1 - x)$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 5$.

6. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

7. Верно ли утверждение: "Если $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, то $\nexists \lim_{x\to a} f(x)g(x)$?"

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562d-t113b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 213(t113b)

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to a$.

2. Сформулируйте определение равномерно непрерывной на промежутке X функции.

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

4. Найдите $\int x \ln\sqrt{1 + x^2}\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = e^x$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 4$.

6. Докажите теорему о единственности предела функции в точке.

7. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to+\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t114b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 214(t114b)

1. Сформулируйте определение предельной точки числового множества.

2. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.

4. Найдите $\int \frac{dx}{x^2(x^2-1)}$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \ln(1+x)$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 5$.

6. Докажите теорему Ферма (о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции).

7. Приведите пример ограниченной последовательности, не имеющей предела.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t115b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 215(t115b)

1. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Напишите формулу дифференциала первого порядка сложной функции.

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$.

4. Найдите производную 7–го порядка функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

5. Найдите $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\big(f'(x_0) + \alpha(x)\big)$, причем $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.

7. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t116b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 216(t116b)

1. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$".

2. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$.

5. Найдите $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{x-1}$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то $f(x) = f(x_0) + f'(x) \cdot (x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

7. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = AB$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t117b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 217(t117b)

1. Что такое верхняя сумма (Дарбу) для определенного интеграла?

2. Сформулируйте определение дифференцируемой n раз функции.

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши предела функции при $x \to +\infty$.

4. Найдите $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,dx$.

5. Найдите $\lim_{x\to 0} \frac{7\sin 5x - 5\sin 7x}{x^3}$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

7. Докажите теорему теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t118b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 218(t118b)

1. Что такое нижняя сумма (Дарбу) для определенного интеграла?

2. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

4. Найдите $\int e^x \sin 2x\,dx$.

5. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x} - \sqrt[3]{1+5x}}{x}$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то $f(x) - f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

7. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to +\infty$ функции $f(x)$ и ограниченной на всей числовой оси функции $g(x)$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t119b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 219(t119b)

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте необходимые условия перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

4. Найдите $\int \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx$.

5. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[12]{1+4x} - \sqrt[15]{1+3x}}{x}$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то график функции $y = f(x)$ имеет касательную в точке $\left(x_0,\, f(x_0)\right)$.

7. Докажите, что последовательность не может иметь двух различных пределов.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$**-4, T562d-t120b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 220(t120b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

2. Сформулируйте определение наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

4. Найдите производную 11–го порядка функции $f(x) = x \sin x$.

5. Найдите $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то $\exists A :\ \ f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ при $x \to x_0$.

7. Докажите теорему о производной суммы двух функций.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$**-4, T562d-t121b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 221(t121b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение "$f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$".

2. Сформулируйте определение непрерывной в точке функции.

3. Сформулируйте теорему о классах интегрируемых по Риману функций.

4. Найдите производную 10–го порядка функции $f(x) = x \sin x$.

5. Найдите $\int e^{2x}\sqrt{1 + e^x}\, dx$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.

7. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$**-4, T562d-t122b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 222(t122b)

1. Сформулируйте определение бесконечно большой положительной последовательности.

2. Что такое неопределенный интеграл?

3. Сформулируйте теорему о формуле Коши.

4. Найдите производную 8–го порядка функции $f(x) = x \ln x$.

5. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{1+15x} - \sqrt[3]{1+15x}}{x}$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то график функции $f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0,\ f(x_0))$.

7. Докажите теорему теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t123b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 223(t123b)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to -\infty$ при $x \to a+0$".

2. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

3. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.

4. Найдите $\int \cos\ln x\,dx$.

5. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x-1}$.

6. Верно ли, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, то $\forall\epsilon > 0\,\exists\delta > 0 : \forall x : |x - x_0| < \delta$ верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

7. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t124b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 224(t124b)

1. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение производной n—го порядка функции.

3. Сформулируйте теорему о формуле среднего значения для определенного интеграла.

4. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to+0}(x\ln x)$.

5. Запишите формулу Тейлора–Пеано для $f(x) = \sin x$, с центром в точке $x_0 = 0$, $n = 5$.

6. Верно ли утверждение: Если $\exists f'(x)$ и $\nexists g'(x)$, то $\nexists(f(x) + g(x))'$.

7. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Докажите необходимость.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t125b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 225(t125b)

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной сверху на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение предела функции в точке "по Коши".

3. Сформулируйте теорему Кантора.

4. Найдите $\int \frac{dx}{\cos x}$.

5. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to+0}(\sqrt[3]{x}\,\ln x)$.

6. Верно ли утверждение: Если $\nexists f'(x)$ и $\nexists g'(x)$, то $\nexists(f(x) + g(x))'$.

7. Докажите теорему теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$**1** $\mathcal{S}$**1** $\mathcal{M}$**1-4, T562d-t126b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 226(t126b)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение бесконечно большой положительной функции $x \to a$.

2. Сформулируйте определение точки разрыва функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о формуле Ньютона-Лейбница.

4. Найдите $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2}$.

5. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\ln x}}{\sqrt{x}}$.

6. Является ли верным утверждение: Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает в точке $x = a$, то $f'(a) > 0$.

7. Докажите теорему теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$**1** $\mathcal{S}$**1** $\mathcal{M}$**1-4, T562d-t127b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 227(t127b)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: "$f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$".

2. Что такое неопределенный интеграл?

3. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

4. Найдите производную функции $f(x) = \arcsin\sqrt{1-x}$.

5. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\ln x}{x}$.

6. Является ли верным утверждение: Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, b), то $f'(x) > 0$ на (a, b).

7. Докажите теорему о производной суммы двух функций.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$**1** $\mathcal{S}$**1** $\mathcal{M}$**1-4, T562d-t128b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 228(t128b)

1. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.

2. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши предела функции при $x \to +\infty$.

4. Найдите $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Используя правило Лопиталя, найдите $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\sqrt{x}}{x}$.

6. Верно ли утверждение: Если $\exists\big(f(x) + g(x)\big)'$ и $\nexists g'(x)$, то $\nexists f'(x)$.

7. Докажите, что сумма двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562d-t129b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 229(t129b)

1. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение дифференцируемой функции.

3. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

4. Найдите производную 12–го порядка функции $f(x) = xe^{-x}$.

5. Найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 6x^2}$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-3})$ при $x \to +\infty$.

7. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562d-t130b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 230(t130b)

1. Сформулируйте определение первообразной.

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$\lim_{x\to a} f(x) = b$".

3. Сформулируйте теорему о необходимом условии убывания дифференцируемой функции в точке.

4. Найдите производную 11–го порядка функции $f(x) = x \sin x$.

5. Найдите наклонные асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-2})$ при $x \to +\infty$.

7. Докажите теорему Ферма (о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции).

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562d-t131b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 231(t131b)

1. Сформулируйте определение функции, неограниченной на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение предела функции в точке "по Гейне".

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$.

4. Найдите $\int \frac{dx}{\sin x}$.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $n = 2$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^{-3} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

7. Докажите теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t132b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 232(t132b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

2. Сформулируйте определение точки локального максимума функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

4. Найдите $\int e^x \sin x\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $n = 3$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^{-2} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

7. Докажите, что сумма двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t133b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 233(t133b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$".

2. Сформулируйте определение функции, убывающей в точке.

3. Используя теорему о производной обратной функции, найдите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

4. Найдите $\int e^{2x}\sqrt{1-e^x}\, dx$.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 1$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^{-\gamma} = o(x^{-3})$ при $x \to +\infty$.

7. Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t134b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 234(t134b)

1. Сформулируйте "по Гейне" определение предела функции в точке.

2. Напишите формулу дифференциала первого порядка сложной функции.

3. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.

4. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $n = 3$.

5. Найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x) = x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

6. Укажите все значения параметра γ, при которых $x^{-5} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

7. Докажите теорему теорему о необходимом условии возрастания дифференцируемой функции на интервале.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t135b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 235(t135b)

1. Сформулируйте определение точной верхней грани числового множества.

2. Сформулируйте определение производной функции в точке.

3. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

4. Найдите $\int e^x\sqrt{1-e^x}\,dx$.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x)=\cos x$, $x_0=0$, $n=2$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^5+x^\gamma=o(x^2)$ при $x\to+0$.

7. Докажите теорему о производной произведения двух функций.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t136b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 236(t136b)

1. Сформулируйте определение неограниченного сверху множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение производной функции в точке.

3. Сформулируйте теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

4. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $x_0=0$, $n=2$.

5. Найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x)=\sqrt[3]{x^3-6x^2}$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^4+x^\gamma=o(x^3)$ при $x\to+0$.

7. Докажите теорему о единственности предела функции в точке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562d-t137b
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 237(t137b)

1. Что такое неопределенный интеграл?

2. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$\lim_{x\to a}f(x)=b$".

3. Сформулируйте теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции в точке.

4. Найдите производную 11–го порядка функции $f(x)=xe^x$.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $x_0=0$, $n=2$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^3+x^\gamma=o(x^2)$ при $x\to+0$.

7. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x\to+\infty$. Докажите достаточность.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562d-t138b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 238(t138b)

1. Сформулируйте определение функции, ограниченной снизу на заданном множестве.

2. Сформулируйте определение дифференциала n—го порядка функции.

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши для последовательностей.

4. Сформулируйте теорему о классах интегрируемых по Риману функций.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = \ln(1-x)$, $x_0 = 0$, $n = 2$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^5 + x^\gamma = o(x^4)$ при $x \to +0$.

7. Докажите теорему о формуле Лагранжа (конечных приращений).

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562d-t139b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 239(t139b)

1. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$".

2. Сформулируйте определение точки устранимого разрыва функции $f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

4. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$, $n = 1$.

5. Найдите $\int \arcsin x\, dx$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^3 + x^\gamma = o(x)$ при $x \to +0$.

7. Докажите, что произведение двух ограниченных на множестве X функций является ограниченной на множестве X функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562d-t140b**
сентябрь-декабрь 2014 T562d, T562d-Набор вопросов 240(t140b)

1. Сформулируйте определение бесконечно малой функции при $x \to +\infty$.

2. Сформулируйте определение интегральной суммы для определенного интеграла Римана.

3. Сформулируйте теорему о критерии Коши для последовательностей.

4. Используя теорему о производной обратной функции, найдите производную функции $f(x) = \arcsin x$.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = x^5$, $x_0 = 0$, $n = 2$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^3 = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$.

7. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$. Докажите достаточность.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562d-t141b**
сентябрь-декабрь 2014 **T562d, T562d-Набор вопросов 241(t141b)**

1. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.

2. Сформулируйте определение верхней суммы (Дарбу) для определенного интеграла.

3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

4. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 0$, $n = 2$.

5. Пусть $\alpha > \beta > 0$. Укажите все значения $\gamma > 0$, при которых $x^{-\alpha} + x^{-\beta} = o(x^{-\gamma})$ при $x \to +\infty$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^{\gamma} = o(x^2)$ при $x \to +0$.

7. Докажите, что произведение двух бесконечно малых при $x \to a$ функций является бесконечно малой при $x \to a$ функцией.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562d-t142b**
сентябрь-декабрь 2014 **T562d, T562d-Набор вопросов 242(t142b)**

1. Сформулируйте определение производной n—го порядка функции.

2. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.

3. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.

4. Найдите $\int \cos \ln x \, dx$.

5. Найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^2 = o(x^{\gamma})$ при $x \to +0$.

7. Докажите теорему о производной произведения двух функций.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$**1-4, T562d-t143b**
сентябрь-декабрь 2014 **T562d, T562d-Набор вопросов 243(t143b)**

1. Что такое нижняя сумма (Дарбу) для определенного интеграла?

2. Сформулируйте определение наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

3. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\, b]$.

4. Найдите наклонную асимптоту графика функции $f(x) = x^2 \ln\bigl(1 - \frac{1}{x}\bigr)$.

5. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x_0 = 0$, $n = 1$.

6. Укажите все значения γ, при которых $x^{\gamma} = o(x)$ при $x \to +0$.

7. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = A$, $\lim_{x\to a} g(x) = B$, и обе функции определены на соответствующих множествах, то $\exists \lim_{x\to a}\bigl(f(x) + g(x)\bigr) = A + B$.

6.2.3. Математический анализ, Вопросы для подготовки к экзамену 1 семестра 2014-2015 [4199]

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562e-t201b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 301(t201b)

1. Докажите теорему о производной обратной функции.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562e-t202b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 302(t202b)

1. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

2. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562e-t203b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 303(t203b)

1. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 0, \forall x \in [0;\, 2]$ верно неравенство $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| < \frac{10 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562e-t204b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 304(t204b)

1. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные до n-го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $f^{(k)}(x_0)$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

2. Докажите, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ является бесконечно малой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562e-t205b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 305(t205b)

1. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Коши".

2. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1-x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}$1 $\mathcal{S}$1 $\mathcal{M}$1-4, T562e-t206b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 306(t206b)

1. Докажите вторую теорему Вейерштрасса.

2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t207b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 307(t207b)

1. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

2. Пусть $f(x) = \begin{cases} |x|\ln|x| \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$ Найдите первообразную этой функции на всей числовой оси.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t208b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 308(t208b)

1. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

2. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t209b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 309(t209b)

1. Докажите теорему теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 0$ верно утверждение $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t210b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 310(t210b)

1. Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

2. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора и правилом Лопиталя, что $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t211b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 311(t211b)

1. Докажите теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

2. Найдите все предельные точки последовательности $x_n =$ дробная часть числа $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t212b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 312(t212b)

1. Докажите теорему о формуле Ньютона-Лейбница для определенного интеграла.

2. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t213b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 313(t213b)

1. Докажите теорему о правиле Лопиталя для вычисления $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

2. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{n^a}{b^n}$ при $b > 1$ является бесконечно малой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t214b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 314(t214b)

1. Докажите теорему о производной сложной функции.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t215b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 315(t215b)

1. Докажите теорему о правиле Лопиталя для вычисления $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $x \in [a,\,+\infty)$, $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, и $f(a) = b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своей точной верхней грани на промежутке $x \in [a,\,+\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t216b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 316(t216b)

1. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

2. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0) = 0,\ g(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 0,\ g'(x_0) = 0,\ g''(x_0) \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t217b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 317(t217b)

1. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Коши".

2. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t218b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 318(t218b)

1. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Гейне".

2. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $x \in [a;\ +\infty),\ \exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = b,\ f(a) = b$, $\exists c \in (a;\ +\infty) : f(c) < b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своей точной нижней грани на промежутке $x \in (a;\ +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t219b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 319(t219b)

1. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите утверждение о необходимости условия Коши.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t220b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 320(t220b)

1. Докажите теорему об обобщенной формуле конечных приращений (Коши).

2. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{b^n}{n^a}$ при $b > 1$ является бесконечно большой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t31b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 321(t31b)

1. Докажите, что произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x = a$ функции является ограниченной в некоторой окрестности точки $x = a$ функцией.

2. Докажите, что $\forall x$ верно равенство $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t32b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 322(t32b)

1. Докажите теорему Ферма (о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции).

2. Докажите, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0; +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t33b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 323(t33b)

1. Докажите, что если $f''(x) < 0$ на промежутке $x \in (a, b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом промежутке направлен выпуклостью вверх.

2. Докажите, что $\forall b$ верно равенство $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t34b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 324(t34b)

1. Докажите теорему о производной обратной функции.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t35b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 325(t35b)

1. Докажите теорему о пределе при $x \to +\infty$ монотонной ограниченной функции.

2. Докажите, что $\forall b \in [-2; 2]$ верно равенство $\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n \cdot n!}{n^n} = 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t36b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 326(t36b)

1. Докажите первую теорему Вейерштрасса.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 0, \forall x \in [0; 3]$ верно неравенство $\left| e^{2x} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k x^k}{k!} \right| < \frac{1000 \cdot 6^{n+1}}{(n+1)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t37b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 327(t37b)

1. Докажите, что из любой ограниченной числовой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

2. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(0; +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t38b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 328(t38b)

1. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

2. Пусть $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{4}{x_n}\right)$, $n \geqslant 1$. Докажите, что существует $\lim_{n\to+\infty} x_n$ и найдите этот предел.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t39b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 329(t39b)

1. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

2. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t40b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 330(t40b)

1. Докажите теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t41b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 331(t41b)

1. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

2. Докажите, что функция $f(x) = \ln x$ не является равномерно непрерывной на промежутке $(0, +\infty)$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t42b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 332(t42b)

1. Докажите теорему об интегрируемости непрерывной на сегменте функции.

2. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t43b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 333(t43b)

1. Докажите теорему об интегрируемости монотонной на сегменте функции.

2. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t44b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 334(t44b)

1. Докажите теорему о формуле среднего значения для определенного интеграла.

2. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) \neq 0$, то найдется такая окрестность точки x_0, в которой уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет единственное решение $x = x_0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t45b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 335(t45b)

1. Докажите теорему о формуле Ньютона-Лейбница для определенного интеграла.

2. Докажите, что $\forall n > 0$, $\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ верно неравенство $\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| < \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t46b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 336(t46b)

1. Докажите теорему о формуле замены переменной для определенного интеграла.

2. Докажите, что если $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет строгий локальный максимум.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t47b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 337(t47b)

1. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 0, \forall x > 0$ верно неравенство $\left|e^{-x} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^k}{k!}\right| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t48b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 338(t48b)

1. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Коши".

2. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t49b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 339(t49b)

1. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x\to+\infty} f(x) = b$ "по Гейне".

2. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t50b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 340(t50b)

1. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

2. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0, +\infty)$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном промежутке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}1$-4, T562e-t51b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 341(t51b)

1. Докажите теорему о правиле Лопиталя для вычисления $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

2. Докажите, что ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t52b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 342(t52b)

1. Докажите неравенство Бернулли, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ при $x \geqslant -1$ и $n \geqslant 1$.

2. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0,+\infty)$ и имеет наклонную асимптоту, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном промежутке.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t53b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 343(t53b)

1. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные до n-го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $f^{(k)}(x_0)$, $k=1,\,2,\,\ldots,\,n$.

2. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t54b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 344(t54b)

1. Докажите теорему о производной суммы двух функций.

2. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n=\frac{\ln n}{n^\alpha}$ при $\alpha>0$ является бесконечно малой.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t55b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 345(t55b)

1. Пусть $P_n(x)$ — многочлен Тейлора дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$. Докажите, что $f(x)=P_n(x)+o\big((x-x_0)^n\big)$.

2. Докажите, не пользуясь правилом Лопиталя, что $\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n}=0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t56b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 346(t56b)

1. Докажите, что сумма бесконечно малой при $x\to a$ функции и ограниченной в окрестности точки $x=a$ функции является ограниченной в некоторой окрестности точки $x=a$ функцией.

2. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0$, $g'(x_0)\neq 0$, то $\exists\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t57b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 347(t57b)

1. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела $\lim_{x\to+\infty}f(x)$. Докажите утверждение о необходимости условия Коши.

2. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x\big(1+x\big)^{\frac{1}{x}}, & \text{если}\,x\neq 0,\\ 0, & \text{если}\,x=0,\end{cases}$ имеет производную в точке $x=0$ и найдите ее значение.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t58b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 348(t58b)

1. Докажите, что если $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ "по Коши", то $f(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$ "по Гейне".

2. Докажите, что если $f''(x_0) = 0$, $f^{(4)}(x_0) = 0$, $f^{(5)}(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ не имеет локального экстремума.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t59b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 349(t59b)

1. Докажите теорему о необходимых условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

2. Докажите, что $\forall n \geqslant 1$ верно равенство $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к экзамену по курсу матем. анализа $\mathcal{K}1\,\mathcal{S}1\,\mathcal{M}$1-4, T562e-t60b
сентябрь-декабрь 2014 T562e, T562e-Набор вопросов 350(t60b)

1. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

2. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема на всей числовой оси и $\forall x, y$ верно равенство $f(x+y) = f(x)f(y)$, то найдется такое число C, что $f'(x) = Cf(x)$.