ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ ЛЕКТОРСКОЙ КОНТРОЛЬНОЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (1 СЕМЕСТР)
(декабрь 2013)

Определения

1. Дайте определение производной функции.
2. Дайте определение правой производной функции.
3. Дайте определение левой производной функции.
4. Дайте определение дифференцируемой функции.
5. Дайте определение первого дифференциала функции.
6. Дайте определение n -ной производной функции.
7. Дайте определение n -ного дифференциала функции.
8. Дайте определение производной вектор-функции.
9. Дайте определение функции, ограниченной на множестве X.
10. Дайте определение верхней грани функции на множестве X, точной верхней грани функции на множестве X.
11. Дайте определение нижней грани функции на множестве X, точной нижней грани функции на множестве X.
12. Дайте определение функции, возрастающей в точке x.
13. Дайте определение функции, убывающей в точке x.
14. Дайте определение касательной к графику функции $y = f\left(x\right)$ в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ и запишите уравнение касательной.
15. Дайте определение равномерно непрерывной функции $f\left(x\right)$ на множестве X.

Формулировки теорем.

1. Сформулируйте теорему о связи непрерывности и дифференцируемости функции $f\left(x\right)$ в точке x.
2. Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости функции $f\left(x\right)$ в точке x.
3. Сформулируйте достаточное условие дифференцируемости функции $f\left(x\right)$ в точке x.
4. Сформулируйте теорему о производной обратной функции.
5. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
6. Выведите формулу производной функции, заданной параметрически.
7. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке
8. Сформулируйте теорему об устойчивости знака непрерывной функции.
9. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.
10. Сформулируйте I теорему Вейерштрасса.
11. Сформулируйте II теорему Вейерштрасса. (отдельно точной верхней и точной нижней)
12. Сформулируйте достаточное условие возрастания дифференцируемой функции $f\left(x\right)$ в точке x.
13. Сформулируйте достаточное условие убывания дифференцируемой функции $f\left(x\right)$ в точке x.

14. Сформулируйте теорему Ролля о нуле производной непрерывной дифференцируемой функции.
15. Сформулируйте теорему о формуле конечных приращений Лагранжа.
16. Сформулируйте необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции на интервале.
17. Сформулируйте необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции на интервале.
18. Сформулируйте теорему о формуле Коши.
19. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора.

Теоремы с доказательством.

1. Докажите теорему о связи непрерывности и дифференцируемости функции $f\left(x\right)$ в точке x.
2. Сформулируйте и докажите необходимое условие дифференцируемости функции $f\left(x\right)$ в точке x.
3. Сформулируйте и докажите достаточное условие дифференцируемости функции $f\left(x\right)$ в точке x.
4. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции.
5. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции.
6. Выведите формулу производной функции, заданной параметрически.
7. Сформулируйте и докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке
8. Сформулируйте и докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.
9. Сформулируйте и докажите теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.
10. Сформулируйте и докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.
11. Сформулируйте и докажите I теорему Вейерштрасса.
12. Сформулируйте и докажите II теорему Вейерштрасса.
13. Сформулируйте и докажите достаточное условие возрастания дифференцируемой функции $f\left(x\right)$ в точке x.
14. Сформулируйте и докажите достаточное условие убывания дифференцируемой функции $f\left(x\right)$ в точке x.
15. Сформулируйте и докажите теорему Ролля о нуле производной непрерывной дифференцируемой функции.
16. Сформулируйте и докажите теорему о формуле конечных приращений Лагранжа.
17. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие невозрастания дифференцируемой функции на интервале.
18. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие неубывания дифференцируемой функции на интервале.

Примеры вопросов и задач.

1. Сформулируйте и обоснуйте свойство инвариантности формы первого дифференциала.
2. Покажите неинвариантность формы второго дифференциала.

3. Выведите табличные формулы для производных через определение функции: $f(x) = \sin x, \quad f(x) = \log_a x$.

4. Выведите формулы для производных обратных тригонометрических функций: $f(x) = \sqrt[7]{x}, \quad \arcsin x$.

5. Найдите односторонние производные $f'\left(x_0 + 0\right)$ и $f'\left(x_0 - 0\right)$ для функции: $f\left(x\right) = x^2 \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$.

6. Пусть $F\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2x+3}, & x \le x_0 \\ ax + b, & x > x_0 \end{cases}$, где функция $f\left(x\right)$ дифференцируема слева в точке $x = x_0$. При каком выборе коэффициентов *a* и *b* функция $F\left(x\right)$ будет дифференцируемой в точке x_0?

7. Для функции $y = f\left(x\right)$, заданной параметрически уравнениями $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, запишите уравнения касательной и нормали к графику функции при: $t = \dfrac{\pi}{3}$

8. Разложите функцию $\sqrt[3]{\sin x^{13}}$ по формуле Маклорена до члена 6 порядка включительно.

9. Разложите функцию $\dfrac{3}{x} + \dfrac{5x}{1 - e^{x^2}}$ по формуле Маклорена до члена второго порядка включительно. Указание: можно использовать соотношение

$$\frac{1}{x - ax^2 + bx^3} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - ax + bx^2}.$$

10. Вычислите пределы, используя разложение по формуле Тейлора:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right); \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \left(\cos x\right)^{\sin x}}{x^3}.$$

11. Вычислите производные: $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_{x^3}^{2} \sqrt{1 + t^2}\, dt$; $\dfrac{d}{dp} \displaystyle\int_{p}^{r} e^{t^2}\, dt$

Задачи повышенной сложности:

1. *)Докажите, что если функция $f\left(x\right)$ определена и непрерывна на полупрямой $\left[0; +\infty\right)$ и $\lim\limits_{x \to \infty} f\left(x\right) = 0$, то $f\left(x\right)$ равномерно непрерывна на этой полупрямой.

2. Исследуйте функцию $f\left(x\right)=e^{x}\cos\dfrac{1}{x}$ на равномерную непрерывность на интервале $\left(0;1\right)$.

3. Исследуйте функцию $f\left(x\right)=x\ln x$ на равномерную непрерывность на множествах $\left(0;1\right)$ и $\left[1;+\infty\right)$.

Пример билета:

Билет 0.

1. Дайте определение *n*- производной функции.
2. Сформулируйте II теорему Вейерштрасса.
3. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.
4. С помощью определения выведите формулу для производной функции $y=\operatorname{arctg}x$.
5. Разложите функцию $f(x)=\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ по формуле Маклорена до члена 4 порядка включительно.
6. Вычислите производную: $\dfrac{d}{da}\displaystyle\int_{a^2-a+4}^{\ln\left(a^2+5\right)}\sin\left(ax^2\right)dx$
7. *) Исследуйте функцию $f\left(x\right)=x\ln x$ на равномерную непрерывность на промежутке $\left[1;+\infty\right)$.

ВНИМАНИЕ!

При отсутствии доказательства теоремы ставится оценка не выше «удовлетворительно».

Оценка «отлично» ставится за верные и полные ответы на первые 6 вопросов.

За верно решенную задачу повышенной сложности (7-ая задача на равномерную непрерывность функции) в рейтинг дополнительно добавляется 1 балл.

ЛИТЕРАТУРА:

1. В.Ф. Бутузов. Лекции по математическому анализу. Часть 1. (на сайте кафедры)
2. В.Ф. Бутузов и др. Математический анализ в вопросах и задачах.
3. В.А.Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть1.
4. В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова, Н.Е. Шапкина. Равномерная непрерывность функции одной переменной (на сайте кафедры).