

4.5.1. Коллоквиум 3, семестр 1, курс 1, декабрь 2014 [5302]

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 1

1. Сформулируйте "по Гейне" определение предела функции в точке.
2. Сформулируйте теорему о формуле Коши.
3. Докажите теорему Ролля.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 12 \operatorname{arctg} \sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 3$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{(x-e)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность x_n , если подпоследовательность x_{2k} является возрастающей, а подпоследовательность x_{2k-1} является убывающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 2

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: " $f(x) \rightarrow b$ при $x \rightarrow +\infty$ ".
2. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.
3. Докажите теорему о достаточном условии возрастания дифференцируемой функции в точке.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 2 \operatorname{arcsin} \sqrt{x}$, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{4}$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$.
6. Найдите все предельные точки последовательности x_n , если известно, что $\forall n$ верно $0 \leq x_n \leq 1$, и $\forall m, n \in \mathbf{Z} : \frac{m}{n} \in (0; 1), \forall \varepsilon > 0 \exists k : |x_k - \frac{m}{n}| < \varepsilon$. Ответ должен быть обоснован.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 3

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: " $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$ ".
2. Сформулируйте теорему Ролля.
3. Докажите теорему Ферма (о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции).
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \ln x$, $a = 1$, $b = 10$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{4\sqrt{x+1} - x - 5}{(x-3)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность x_n , если подпоследовательности x_{3k} и x_{3k-1} являются возрастающими, а подпоследовательность x_{3k-2} является убывающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014

Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 4

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: " $f(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow a + 0$ ".
2. Сформулируйте теорему о правиле Лопиталья.
3. Докажите теорему о формуле Коши (обобщенная формула конечных приращений).
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 12 \arcsin x$, $a = \frac{3}{5}$, $b = \frac{4}{5}$.
5. Найдите, используя правило Лопиталья, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{ex} - x(e^2)}{(x-e)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность x_n , если подпоследовательности x_{3k} и x_{3k-1} являются убывающими, а подпоследовательность x_{3k-2} является возрастающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014

Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 5

1. Сформулируйте "по Гейне" определение: " $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ ".
2. Сформулируйте теорему Ролля.
3. Докажите теорему о правиле Лопиталья для вычисления $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 65 \arctg x$, $a = 3$, $b = 5$.
5. Найдите, используя правило Лопиталья, $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6\sqrt{x+3} - x - 12}{(x-6)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь последовательность x_n , если подпоследовательность x_{2k} является убывающей, а подпоследовательность x_{2k-1} является возрастающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014

Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 6

1. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.
2. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.
3. Докажите теорему о формуле Лагранжа (конечных приращений).
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 25$, $b = 36$.
5. Найдите, используя правило Лопиталья, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin 2x}}{x^3}$.
6. Сколько предельных точек может иметь последовательность x_n , если подпоследовательности x_{3k} и x_{3k-1} являются возрастающими, а подпоследовательность x_{3k-2} является убывающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 7

1. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие подпоследовательности.
2. Сформулируйте теорему о формуле Коши.
3. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 8$, $b = 27$.
5. Найдите, используя правило Лопиталья, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{(x-e)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь монотонная ограниченная последовательность? Ответ должен быть обоснован.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 8

1. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.
2. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.
3. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \frac{24}{\pi} \sin x$, $a = \frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{3}$.
5. Найдите, используя правило Лопиталья, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos 2x} - e}{x^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь последовательность, любая подпоследовательность которой имеет не более трех предельных точек? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 9

1. Сформулируйте определение бесконечно большой положительной последовательности.
2. Сформулируйте теорему о формуле Коши.
3. Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 13 \arcsin x$, $a = \frac{5}{13}$, $b = \frac{12}{13}$.
5. Найдите, используя правило Лопиталья, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\lg x} - 1 - x}{x^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь неограниченная последовательность x_n , если подпоследовательность x_{2k} является возрастающей, а подпоследовательность x_{2k-1} является убывающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 10

1. Сформулируйте отрицание определения предела числовой последовательности.
2. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.
3. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела последовательности. Докажите утверждение о достаточности.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \frac{1}{x}$, $a = 1$, $b = 2$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{ex} - x(e^2)}{(x-e)^2}$.
6. Найдите все предельные точки последовательности x_n , если известно, что $\forall n$ верно $0 \leq x_n \leq 1$, и $\forall b \in (0; 1), \forall \varepsilon > 0 \exists n : |x_n - b| < \varepsilon$. Ответ должен быть обоснован.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 11

1. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.
2. Сформулируйте теорему Ролля.
3. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела последовательности. Докажите утверждение о необходимости.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 4$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x} - e}{x^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь неограниченная последовательность x_n , если подпоследовательность x_{2k} является убывающей, а подпоследовательность x_{2k-1} является возрастающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 12

1. Сформулируйте определение сходящейся числовой последовательности.
2. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.
3. Докажите теорему о стягивающейся системе сегментов.
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 3\sqrt[3]{x}$, $a = 1$, $b = 8$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь неограниченная последовательность x_n , если подпоследовательности x_{3k} и x_{3k-1} являются возрастающими, а подпоследовательность x_{3k-2} является убывающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 13

1. Сформулируйте определение неограниченной сверху числовой последовательности.
2. Сформулируйте теорему о формуле Коши.
3. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ "по Коши".
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = x^3$, $a = 2$, $b = 3$.
5. Найдите, используя правило Лопиталю, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{(x-e)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность x_n , если подпоследовательность x_{2k} является возрастающей, а подпоследовательность x_{2k-1} является убывающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 14

1. Сформулируйте определение неограниченной снизу числовой последовательности.
2. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.
3. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ "по Гейне".
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \ln(1 + x^2)$, $a = 1$, $b = 3$.
5. Найдите, используя правило Лопиталю, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{2x} - x^{2e}}{(x-e)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность x_n , если подпоследовательность x_{2k} является убывающей, а подпоследовательность x_{2k-1} является возрастающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 15

1. Сформулируйте определение неограниченной числовой последовательности.
2. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.
3. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ "по Коши".
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 3x - x^3$, $a = 0$, $b = 1$.
5. Найдите, используя правило Лопиталю, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$.
6. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность x_n , если подпоследовательности x_{3k} и x_{3k-1} являются возрастающими, а подпоследовательность x_{3k-2} является убывающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 16

1. Сформулируйте определение ограниченной числовой последовательности.
2. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.
3. Докажите, что если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ "по Гейне".
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \operatorname{tg} x$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{4}$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^{ex} - x(e^2)}{(x-e)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь ограниченная последовательность x_n , если подпоследовательности x_{3k} и x_{3k-1} являются убывающими, а подпоследовательность x_{3k-2} является возрастающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 17

1. Сформулируйте определение ограниченной снизу числовой последовательности.
2. Сформулируйте теорему Ролля.
3. Докажите, что если $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$ "по Гейне", то $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow a$ "по Коши".
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = 2 \arcsin x$, $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{6\sqrt{x+3} - x - 12}{(x-6)^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь неограниченная последовательность x_n , если подпоследовательность x_{2k} является убывающей, а подпоследовательность x_{2k-1} является возрастающей? Приведите примеры.

Московский Государственный университет Физический факультет Кафедра математики
Вопросы для подготовки к коллоквиуму 3 по курсу математического анализа, К1 S1 M3-q3
Декабрь 2014 Т529f, К1 S1 M3-q3-Набор вопросов 18

1. Сформулируйте определение ограниченной сверху числовой последовательности.
2. Сформулируйте теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.
3. Докажите, что если $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ "по Коши", то $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$ "по Гейне".
4. Используя формулу конечных приращений (Лагранжа), оцените снизу и сверху значение величины $f(b) - f(a)$, если $f(x) = \arctg x$, $a = 0$, $b = 1$.
5. Найдите, используя правило Лопиталя, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x}{x^2}$.
6. Сколько предельных точек может иметь последовательность x_n , любая подпоследовательность которой является сходящейся? Ответ должен быть обоснован.