Глава 11

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

11.1. Площадь плоской фигуры

Под плоской фигурой будем понимать любое множество точек плоскости.

Из курса школьной геометрии известно понятие площади многоугольника. При выбранной единице измерения площадей площадь каждого многоугольника выражается некоторым числом.

Рассмотрим плоскую фигуру G. Многоугольник $Q_{в}$ будем называть *вписанным* в фигуру G, а многоугольник Q_{o} - *описанным* около фигуры G, если $Q_{в} \subset G \subset Q_{o}$ (рис. 11.1). Через $P_{в}$ и P_{o} обозначим площади вписанного и описанного многоугольников. Очевидно, что $P_{в} \leqslant P_{o}$.

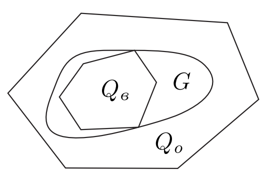

Рис. 11.1.

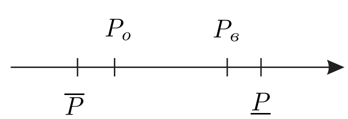

Рис. 11.2.

Пусть $\{P_{в}\}$ — множество площадей всех вписанных в фигуру G многоугольников. Оно ограничено сверху (любой площадью P_{o} описанного многоугольника) и, следовательно, существует $\sup\{P_{в}\}$, который обозначим $\underline{P}$. Если в фигуру G нельзя вписать ни одного многоугольника, то положим $\underline{P} = 0$.

Аналогично, множество $\{P_{o}\}$ площадей всевозможных описанных многоугольников ограничено снизу (например, числом нуль) и, следовательно, существует $\inf\{P_{o}\} := \overline{P}$.

Числа $\underline{P}$ и $\overline{P}$ называются *нижней* и *верхней площадью* фигуры G.

Утверждение: $\underline{P} \leqslant \overline{P}$.

Если допустить, что $\underline{P} > \overline{P}$, то найдутся такие $P_{в}$ и P_{o} (см. рис. 11.2), для которых выполнено неравенство $P_{o} < P_{в}$, чего не может быть. Таким образом, для любых $P_{в}$ и P_{o} выполняются неравенства

$$P_{в} \leqslant \underline{P} \leqslant \overline{P} \leqslant P_{o}. \qquad (11.1)$$

Определение. Плоская фигура G называется квадрируемой, если $\underline{P} = \overline{P}$. При этом число $P = \underline{P} = \overline{P}$ называется *площадью фигуры G (по Жордану)*.

Замечание. Всякий многоугольник является, очевидно, квадрируемой фигурой в смысле данного определения, и его площадь по Жордану равна площади, введенной в элементарной геометрии.

Теорема 1. Для того, чтобы плоская фигура была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовали такие вписанный и описанный многоугольники, для которых $P_o - P_в < \varepsilon$.

<u>Доказательство.</u> 1) Необходимость. Пусть G—квадрируемая фигура, т.е. $P = \underline{P} = \overline{P}$. Согласно определению точных граней числового множества $\forall \varepsilon > 0$ найдутся такие вписанный и описанный многоугольники, площади которых удовлетворяют неравенствам

$$\underline{P} - P_в < \frac{\varepsilon}{2}, \;\; P_o - \overline{P} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Складывая эти неравенства, получаем $P_o - P_в < \varepsilon$, и, тем самым, утверждение о необходимости доказано.

2) Достаточность. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ существуют $Q_в$ и Q_o, для которых $P_o - P_в < \varepsilon$. Отсюда и из неравенств (11.1) следует, что $0 \leqslant \overline{P} - \underline{P} < \varepsilon$, а так как ε—произвольное положительное число, то $\overline{P} - \underline{P} = 0$, т.е. $\overline{P} = \underline{P}$. Это и означает (по определению), что фигура G квадрируема. Утверждение о достаточности доказано.

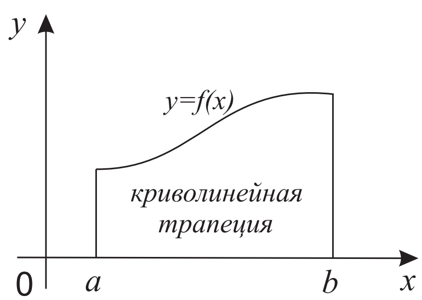

Рис. 11.3.

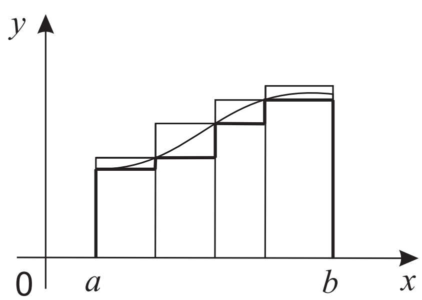

Рис. 11.4.

Пусть функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на сегменте $[a, b]$ (рис. 11.3). Фигура, ограниченная графиком этой функции, отрезком $[a, b]$ оси Ox и двумя вертикальными отрезками ($x = a$ и $x = b$; каждый из этих отрезков может вырождаться в точку), называется *криволинейной трапецией*.

Теорема 2. Криволинейная трапеция квадрируема и ее площадь P выражается формулой

$$P = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{11.2}$$

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то она интегрируема на этом сегменте. Поэтому $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое разбиение сегмента $[a, b]$, для которого $S - s < \varepsilon$, где S и s—верхняя и нижняя суммы этого разбиения. Заметим, что S— площадь описанного около криволинейной трапеции ступенчатого многоугольника ($S = P_o$), а s— площадь вписанного ступенчатого многоугольника ($s = P_в$) (рис. 11.4). Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ существуют такие вписанный и описанный многоугольники, для которых $P_o - P_в < \varepsilon$. Следовательно, согласно теореме 1, криволинейная трапеция квадрируема.

Пусть ее площадь равна P. Тогда для любых $Q_в$ и Q_o выполняются неравенства $P_в \leqslant P \leqslant P_o$, в частности, $s \leqslant P \leqslant S$. Перейдем в этих неравенствах к пределу при $\Delta \to 0$ (Δ— максимальная длина частичного сегмента разбиения сегмента $[a, b]$). Так как $\lim\limits_{\Delta \to 0} s = \lim\limits_{\Delta \to 0} S = \int\limits_a^b f(x)dx$ (лемма Дарбу), то $P = \int\limits_a^b f(x)dx$. Теорема 2 доказана.

Примеры. 1) Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 11.5).

Искомая площадь P в четыре раза больше площади заштрихованной фигуры, а ее можно вычислить по формуле (11.2), в которой нужно положить $a = 0$, $b = a$, $f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Итак,

$$P = 4b \int\limits_0^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\, dx$$

.

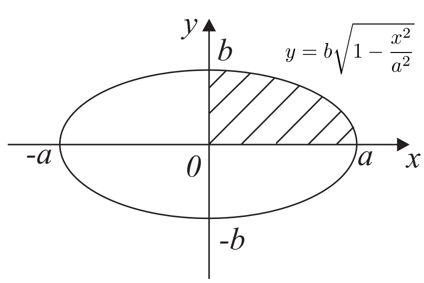

Рис. 11.5.

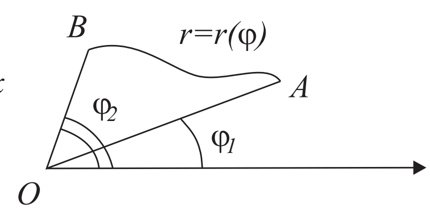

Рис. 11.6.

Для вычисления интеграла можно сделать замену переменной $x = a \sin t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. В результате получим $P = \pi ab$.

2) На рисунке 11.6 изображена плоская фигура, ограниченная отрезками OA и OB, а также кривой, заданной в полярных координатах

уравнением
$$r = r(\varphi),\ \varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2\,.$$
Такая фигура называется *криволинейным сектором*. Площадь P криволинейного сектора выражается формулой
$$P = \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi.$$
Обоснование этой формулы будет дано ниже.

3) $G = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1,\ x$ и y – рациональные числа$\}$. $\underline{P} = 0$, $\overline{P} = 1$; $\overline{P} \neq \underline{P}$, поэтому фигура G не квадрируема.

11.2. Двойные интегралы.

Областью (*открытой областью*) обычно называют любое открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$. Объединение области и ее границы называется *замкнутой областью*. В дальнейшем, если замкнутость не существенна, под словом область будем понимать либо открытую, либо замкнутую область. Если же замкнутость существенна, то будем говорить «замкнутая область».

Введем понятие диаметра множества. Пусть G — ограниченное множество точек в пространстве $\mathbb{R}^n$, в частости, на плоскости, и пусть M_1 и M_2 — две произвольные точки из G. Числовое множество $\{\rho(M_1, M_2)\}$ ограничено сверху и, следовательно, имеет точную верхнюю грань. Число
$$d = \sup_{\substack{M_1\in G\\ M_2\in G}} \{\rho(M_1, M_2)\}$$
называется *диаметром* множества G.

Примеры: диаметр прямоугольника равен его диагонали, диаметр эллипса равен его бóльшей оси.

Пусть G — квадрируемая (и, следовательно, ограниченная) область (открытая или замкнутая) на плоскости (x, y) и пусть в области G определена ограниченная функция $z = f(x, y) = f(K)$ $(K = (x, y))$. Разобьем область G на n квадрируемых частей G_i: $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ (рис. 11.7), так что любые две части G_i и G_j не имеют общих внутренних точек; в каждой части G_i возьмем произвольным образом точку $K_i(\xi_i, \eta_i)$ и составим сумму
$$I(G_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} f(K_i)S(G_i),\ \text{где } S(G_i) – \text{площадь } G_i.$$

Число $I(G_i, K_i)$ называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению области G и данному выбору

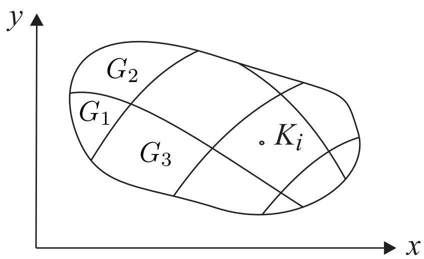

Рис. 11.7.

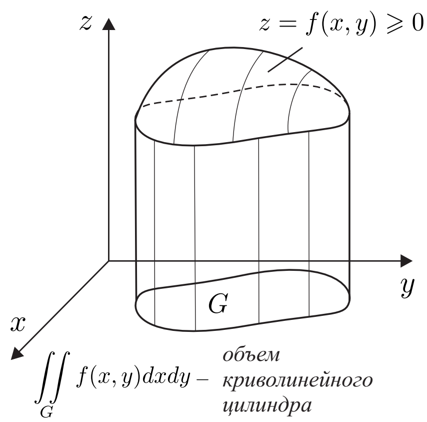

Рис. 11.8.

промежуточных точек K_i. Введем обозначение: d_i — диаметр G_i, $d = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} d_i$.

Определение *предела интегральных сумм при* $d \to 0$ вводится так же, как для определенного интеграла. Если существует $\lim\limits_{d \to 0} I(G_i, K_i) = I$, то число I называется *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области G_i и обозначается так:

$$I = \iint\limits_G f(x,y)dxdy \quad (\text{иногда так:} \int\limits_G f(K)ds),$$

а функция $f(x,y)$ называется *интегрируемой* в области G.

Геометрический смысл двойного интеграла (рис. 11.8)

Если $f(x,y) = 1$, то любая интегральная сумма такой функции равна $\sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot S(G_i) = S(G)$ — площади области G, и поэтому $\iint\limits_G dxdy = S(G)$.

Многие физические величины выражаются через двойные интегралы. Например, если $\rho(x,y)$ — плотность распределения электрического заряда в области G, то $\iint\limits_G \rho(x,y)dxdy$ — величина заряда, содержащегося в этой области.

Для двойных интегралов можно развить такую же теорию, как для определенных интегралов.

Для произвольного разбиения $G = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$ введем верхнюю и нижнюю суммы Дарбу функции $f(x,y)$:

$$S = \sum_{i=1}^{n} M_i S(G_i),\ s = \sum_{i=1}^{n} m_i S(G_i),$$

где $M_i = \sup\limits_{G_i} f(x,y)$, $m_i = \inf\limits_{G_i} f(x,y)$, $S(G_i)$ — площадь G_i.

Суммы Дарбу обладают такими же свойствами, как и в случае определенного интеграла, в частности, существуют $\underline{I} = \sup\{s\}$, $\overline{I} = \inf\{S\}$, при этом $\underline{I} \leqslant \overline{I}$, $\lim\limits_{d\to 0} s = \underline{I}$, $\lim\limits_{d\to 0} S = \overline{I}$ (лемма Дарбу).

Теорема 3. Для того, чтобы ограниченная в квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируемой в области G, необходимо и достаточно, чтобы $\underline{I} = \overline{I}$. При этом $\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \underline{I} = \overline{I}$.

Теорема 4. Для того, чтобы ограниченная в квадрируемой области G функция $f(x,y)$ была интегрируемой в области G, необходимо и достаточно, чтобы $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение области G, у которого $S - s < \varepsilon$.

Теорема 5. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой квадрируемой области, то она интегрируема в этой области.

Определение. Множество точек на плоскости называется *множеством площади нуль*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ конечное число многоугольников, содержащих в себе все точки этого множества и имеющих сумму площадей меньшую, чем ε.

Теорема 6. Если функция $f(x,y)$ ограничена в квадрируемой области G и непрерывна в этой области, за исключением множества точек площади нуль, то эта функция интегрируема в области G.

Теоремы 1–4 доказываются так же, как для определенного интеграла.

Двойные интегралы обладают такими же свойствами, как определенные интегралы.

11.3. Вычисление двойных интегралов с помощью повторного интегрирования.

1) Сначала рассмотрим случай, когда функция $f(x,y)$ определена в прямоугольнике $Q = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$.

Теорема 7. Пусть:
1) существует двойной интеграл $\iint\limits_Q f(x,y)dxdy$,

2) $\forall x \in [a,b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_c^d f(x,y)dy := I(x)$.

Тогда существует определенный интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx$ (он называется *по-*

вторным и записывается в виде $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy)$ и справедливо равенство

$$\iint\limits_Q f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy,$$

т.е. двойной интеграл равен повторному.

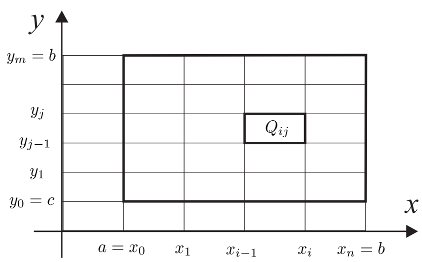

Рис. 11.9.

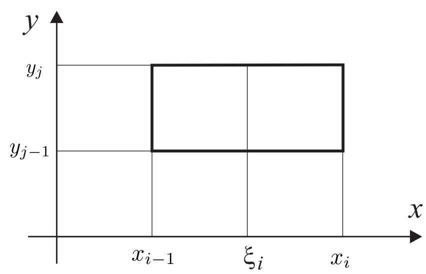

Рис. 11.10.

Доказательство. Разобьем сегмент $[a,b]$ на n частичных сегментов точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, а сегмент $[c,d]$ — на m частичных сегментов точками $c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d$. Проведем через точки разбиения прямые, параллельные осям координат (координатные линии). Прямоугольник Q разобьется на mn частичных прямоугольников (рис. 11.9)

$Q_{ij} = \{(x,y) : x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$ $(i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots \ldots, m)$.

Положим $m_{ij} = \inf\limits_{Q_{ij}} f(x,y)$, $M_{ij} = \sup\limits_{Q_{ij}} f(x,y)$. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$, d_{ij}— диаметр Q_{ij}, $d = \max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} d_{ij}$. Отметим, что $S(Q_{ij}) = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$.

На каждом частичном сегменте $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольным образом точку ξ_i (рис. 11.10). Так как

$$m_{ij} \leqslant f(\xi_i, y) \leqslant M_{ij} \text{ при } y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j, \text{ то}$$

$$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}dy \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)dy \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}dy$$

или

$$m_{ij}\Delta y_j \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i,y)dy \leqslant M_{ij}\Delta y_j \, (i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,m)$$

Просуммируем эти неравенства по j от 1 до m при каждом i:

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \leqslant \int\limits_c^d f(\xi_i, y)dy \leqslant \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j.$$

Заметим, что средняя часть неравенств есть $I(\xi_i)$.
Умножим эти неравенства на Δx_i и просуммируем по i от 1 до n:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} I(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta x_i\Delta y_j.$$

Средняя часть полученных неравенств является интегральной суммой функции $I(x)$, соответствующей разбиению сегмента $[a,b]$ на частичные сегменты $[x_{i-1}, x_i]$, а левая и правая части — нижней и верхней суммами функции $f(x,y)$, соответствующими разбиению прямоугольника Q на частичные прямоугольники Q_{ij} (поскольку $\Delta x_i \cdot \Delta y_j = S(Q_{ij})$).

Перейдем к пределу при $d \to 0$. Тогда все $\Delta x_i \to 0$. Из условия 1) в силу теоремы 3 и леммы Дарбу следует, что пределы левой и правой частей неравенств равны двойному интегралу $\iint\limits_Q f(x,y)dxdy$. Следовательно, существует предел средней части, а это и есть по определению интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx$. В результате получаем равенство

$$\iint\limits_Q f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx\int\limits_c^d f(x,y)dy.$$

Теорема доказана.

Замечание. Меняя в условиях теоремы 7 местами x и y, получим равенство

$$\iint\limits_Q f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy\int\limits_a^b f(x,y)dx.$$

Пример. Пусть $Q = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

$$\iint\limits_Q xe^{xy}dxdy = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 xe^{xy}dy = \int\limits_0^1 dx \cdot e^{xy}\Big|_{y=0}^{y=1} = \int\limits_0^1 (e^x - 1)dx =$$
$$= (e^x - x)\big|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Задание. Попробуйте вычислить этот двойной интеграл, интегрируя сначала по x, а потом по y, и посмотрите, что из этого получится.

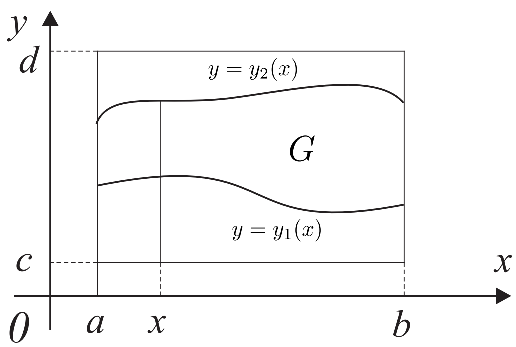

Рис. 11.11.

2) Пусть теперь функция $f(x,y)$ определена в области $G = \{(x,y) : y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$, где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — непрерывные функции (рис. 11.11).

Теорема 7'. Пусть:
1) существует двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$,
2) $\forall x \in [a,b]$ существует определенный интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy := I(x)$.

Тогда существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

и он равен двойному интегралу:

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy.$$

Теорема 7' доказывается путем введения прямоугольника $Q = \{(x,y) : a \leqslant x \leqslant y, c \leqslant y \leqslant d\}$, содержащего область G (рис. 11.11), и применения теоремы 7 к функции

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in G, \\ 0\,, & (x,y) \in Q \backslash G. \end{cases}$$

Примеры.

1) Область G ограничена прямой $y = x$ и параболой $y = x^2$ (рис. 11.12). Вычислить $I = \iint\limits_G xy^2 dxdy$.

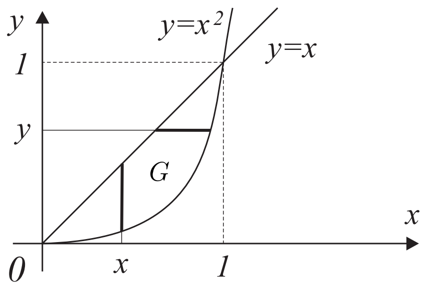

Рис. 11.12.

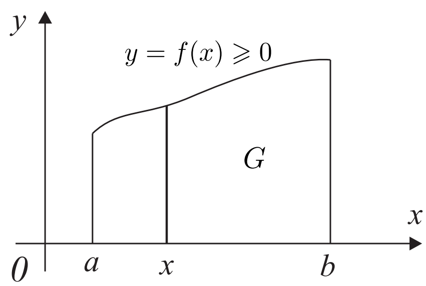

Рис. 11.13.

1-й способ. $I = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} xy^2 dy = \frac{1}{3}\int\limits_0^1 x(x^3 - x^6)dx = \frac{1}{3}(\frac{x^5}{5} - \frac{x^8}{8})\big|_0^1 = = \frac{1}{40}$.

2-й способ. $I = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} xy^2 dx = \ldots = \frac{1}{40}$.

2) Область G — криволинейная трапеция (рис. 11.13). $S(G) = = \int\int\limits_G dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} dy = \int\limits_a^b f(x)dx$. Еще раз получили формулу площади криволинейной трапеции.

11.4. Замена переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим двойной интеграл $\int\int\limits_G f(x,y)dxdy$. Перейдем от переменных (x,y) к новым переменным (u,v) посредством формул

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v), \quad (u,v) \in g. \tag{11.3}$$

При определенных условиях на область G, функцию $f(x,y)$ и функции (11.3) имеет место формула

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_g f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv, \tag{11.4}$$

где

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix} \text{ — якобиан функций 11.3 по } u \text{ и } v.$$

Формула (11.4) называется *формулой замены переменных в двойном интеграле.*

Рассмотрим эвристический (нестрогий) вывод формулы (11.4). Пусть функции (11.3) удовлетворяют условиям:

I. Если точка (u,v) пробегает область g, то точка $(x,y) =$

$= (\varphi(x,y), \psi(x,y))$ пробегает область G, причем различным точкам (u,v) из области g соответствуют различные точки (x,y) из области G.

II. Функции $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ имеют в области g непрерывные частные производные первого порядка.

III. $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \varphi_u^{'} & \varphi_v^{'} \\ \psi_u^{'} & \psi_v^{'} \end{vmatrix} \neq 0 \ \ \forall\,(u,v) \in g.$

Зафиксируем переменную u, положив $u = u_0 = const$. Тогда из уравнений (11.3) получим:

$$x = \varphi(u_0, v),\; y = \psi(u_0, v). \tag{11.5}$$

Уравнения (11.5) являются параметрическими уравнениями кривой, лежащей в области G (роль параметра играет v). Аналогично, положив $v = v_0 = const$, получим параметрические уравнения другой кривой, лежащей в области G:

$$x = \varphi(u, v_0),\; y = \psi(u, v_0)\,, \quad u \text{ — параметр.} \tag{11.6}$$

Кривые (11.5) и (11.6) пересекаются в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$ (рис. 11.14).

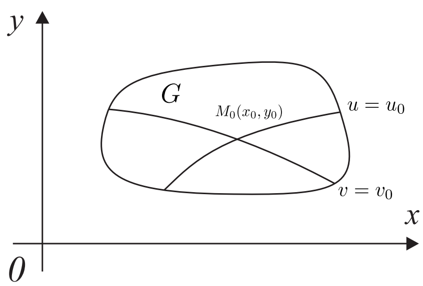

Рис. 11.14.

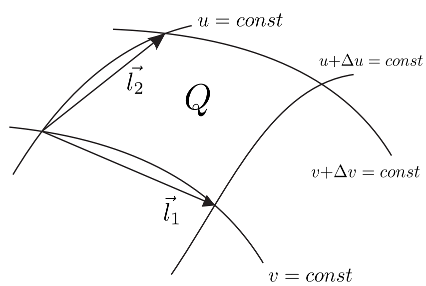

Рис. 11.15.

В силу условия I точка $M_0(x_0, y_0)$ соответствует только одной точке (u_0, v_0) из области g. Таким образом, точка M_0 однозначно определяется парой чисел (u_0, v_0). Поэтому эту пару чисел можно рассматривать как *новые координаты точки* M_0. Кривая (11.5), на которой координата u постоянна, а меняется только координата v, называется *координатной v–линией*, а кривая (11.6) — *координатной u–линией*. Т.к. координатные линии (11.5) и (11.6), вообще говоря, кривые, то пара чисел (u_0, v_0) называется *криволинейными координатами точки* M_0.

Итак, равенства (11.3) можно рассматривать как формулы, посредством которых в области G вводятся криволинейные координаты точек.

Рассмотрим две пары близких координатных линий в области G. Они ограничивают криволинейный четырехугольник Q (рис. 11.15).

Вычислим приближенно площадь этого четырехугольника, заменив его параллелограммом, построенным на векторах $\overrightarrow{l_1}$ и $\overrightarrow{l_2}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{l_1} &= \{\varphi(u+\Delta u, v)-\varphi(u,v), \psi(u+\Delta u, v)-\psi(u,v)\} = \\ &= \left\{\varphi_u^{'}\cdot\Delta u, \psi_u^{'}\cdot\Delta u\right\},\\ \overrightarrow{l_2} &= \left\{\varphi_v^{'}\cdot\Delta v, \psi_v^{'}\cdot\Delta v\right\},\end{aligned}$$

где производные $\varphi_u^{'}$, $\psi_u^{'}$, $\varphi_v^{'}$, $\psi_v^{'}$ берутся в некоторых промежуточных точках.

$$S(Q)\approx|[\overrightarrow{l_1}\times\overrightarrow{l_2}]| = |\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \varphi_u^{'}\Delta u & \psi_u^{'}\Delta u & 0\\ \varphi_v^{'}\Delta v & \psi_v^{'}\Delta v & 0\end{vmatrix}| =$$

$$= |(\varphi_u^{'}\psi_v^{'}-\varphi_v^{'}\psi_u^{'})\Delta u\cdot\Delta v\cdot\vec{k}\,| \approx \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\widetilde{u},\widetilde{v})}\cdot\Delta u\cdot\Delta v$$

(считаем $\Delta u>0$, $\Delta v>0$), $(\widetilde{u},\widetilde{v})$ — какая-нибудь точка криволинейного четырехугольника.

Разобьем область g на частичные области g_{ij} отрезками прямых $u=u_i$ и $v=v_j$ $(i=0,1,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,m)$ (рис. 11.16). При этом область G разобьется на частичные области G_{ij} координатными u и v - линиями (рис. 11.17): $G=\bigcup\limits_{i,j}G_{ij}$.

Положим $\Delta u_i=u_i-u_{i-1}$, $\Delta v_j=v_j-v_{j-1}$.

В каждой частичной области G_{ij} возьмем в качестве промежуточной точки точку $K_{ij}(x_{ij},y_{ij})$, где $x_{ij}=\varphi(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_j)$, $y_{ij}=\psi(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_j)$, и составим интегральную сумму функции $f(x,y)$ для полученного разбиения области G. Учитывая, что $S(G_{ij})\approx\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_j)}\cdot\Delta u_i\cdot\Delta v_j$, получаем

$$\begin{aligned}I(G_{ij},K_{ij}) &= \sum_{i,j}f(x_{ij},y_{ij})S(G_{ij})\approx\\ &\approx\sum_{i,j}f\left(\varphi(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_j),\psi(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_j)\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{(\widetilde{u}_i,\widetilde{v}_j)}\cdot\Delta u_i\cdot\Delta v_j.\end{aligned}\tag{11.7}$$

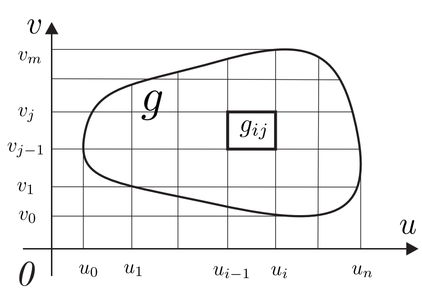

Рис. 11.16.

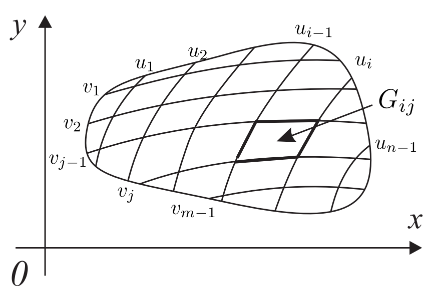

Рис. 11.17.

Так как $\Delta u_i \Delta v_j = S(g_{ij})$, то в правой части равенства (11.7) стоит интегральная сумма для функции $f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$, соответствующая разбиению области g на частичные области $g_{i,j}$.

Пусть g и G — замкнутые квадрируемые области, а функция $f(x,y)$ непрерывна в области G всюду, кроме, быть может, множества точек площади нуль. Тогда, переходя в равенстве (11.7) к пределу при $d \to 0$ (d — максимальный диаметр g_{ij}), получим равенство (11.4):

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_g f\left(\varphi(u,v),\psi(u,v)\right)\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

<u>Замечания.</u> 1) Равенства (11.3) можно рассматривать как формулы, задающие отображение области g на плоскости (u,v) на область G на плоскости (x,y) (рис. 11.18).

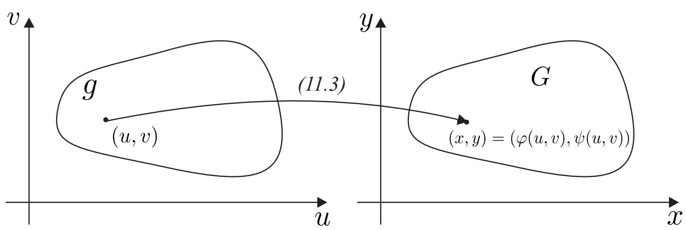

Рис. 11.18.

Область g — прообраз области G, область G — образ области g при отображении (11.3).

2) При $f(x,y) = 1$ из формулы (11.4) следует:

$$\iint\limits_G dxdy = S(G) = \iint\limits_g \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv -$$

формула площади области G через криволинейные координаты. Произведение $dxdy$ можно назвать *элементом площади в декартовых прямоугольных координатах*: $ds = dxdy$, а $ds = \left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right| dudv$ — *элемент площади в криволинейных координатах*.

Геометрический смысл якобиана $\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|$: модуль якобиана — коэффициент растяжения площади при отображении (11.3) (рис. 11.19).

3) Если условия I или III нарушаются на множестве точек площади нуль (например, в конечном числе точек или кривых), то формула (11.4) остается в силе.

4) Если область g — прямоугольник, а φ и ψ — линейные функции u и v: $\varphi = a_{11}u + a_{12}v + b_1$, $\psi = a_{21}u + a_{22}v + b_2$, то проведенный вы-

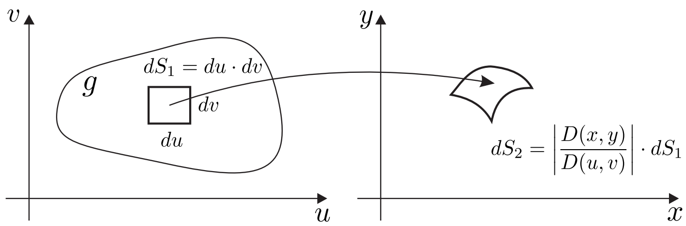

Рис. 11.19.

вод формулы (11.4) становится строгим (все приближенные равенства становятся точными).

Примеры. 1) Полярные координаты.

Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x, y) и полярные координаты (r, φ):

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \quad (r \geqslant 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi) \tag{11.8}$$

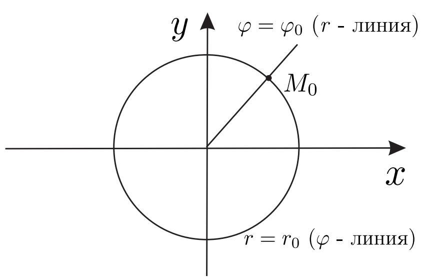

Рис. 11.20.

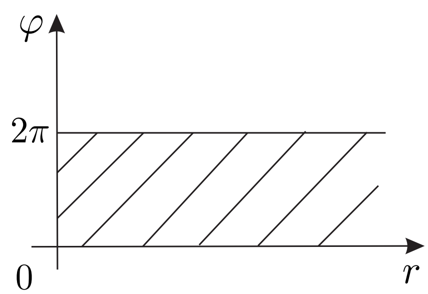

Рис. 11.21.

Пара чисел (r_0, φ_0) — полярные координаты точки M_0 (рис. 11.20). С другой стороны, равенства (11.8) задают отображение заштрихованной полуполосы на плоскости (r, φ) (рис. 11.21) на всю плоскость (x, y).

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\,.$$

Якобиан равен нулю на отрезке $[r = 0, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi]$ — множестве точек площади нуль, поэтому формулу (11.4) можно применять; $ds = r dr d\varphi$ — элемент площади в полярных координатах.

2) Вычислить $I = \int\limits_G\!\!\int (x^2 + 2y^2)dxdy$, где $G = \{(x, y) : a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2\}$ — кольцо (рис.11.22).

Замена переменных: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$; $(r, \varphi) \in g = \{(r, \varphi) : a \leqslant r \leqslant b,\, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$ — прямоугольник (рис. 11.23).

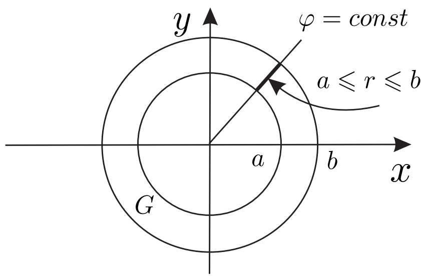

Рис. 11.22.

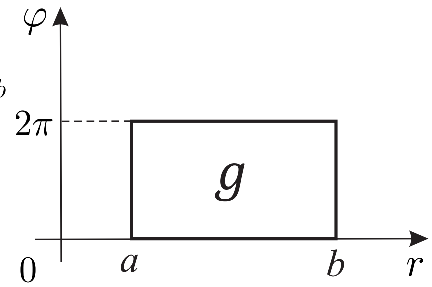

Рис. 11.23.

$$I = \iint\limits_{g} (r^2\cos^2\varphi + 2r^2\sin^2\varphi) r\,dr\,d\varphi =$$
$$= \int\limits_a^b dr \cdot r^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} + 2\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{3\pi}{4}(b^4 - a^4).$$

3) Площадь криволинейного сектора.

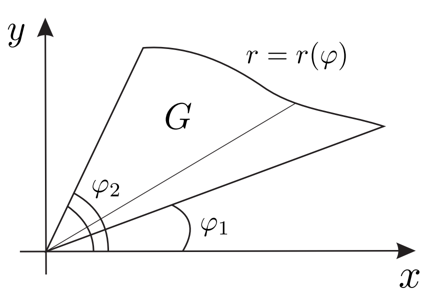

Рис. 11.24.

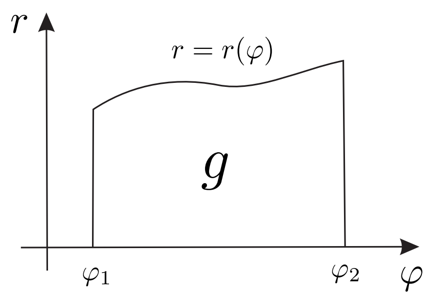

Рис. 11.25.

Область G на плоскости (x, y) — криволинейный сектор (рис. 11.24). Ее прообраз на плоскости (r, φ) — криволинейная трапеция g (рис. 11.25). $S(G) = \iint\limits_G dx\,dy =$ (делаем замену переменных $x =$ $= r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) $= \iint\limits_g r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} r\,dr = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^{r(\varphi)} =$ $= \frac{1}{2}\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi.$

4) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{xy}{ab}$ $(a > 0, b > 0)$.

$S(G) = \int\limits_G\int dxdy.$

Замена переменных: $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$ (обобщенные полярные координаты).

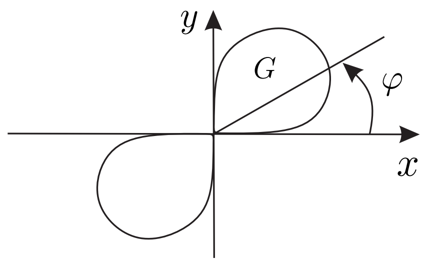

Рис. 11.26.

Уравнение кривой в новых координатах: $r^4 = r^2\cos\varphi\sin\varphi$, откуда $r = \sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}$ $\left(0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \pi \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{3\pi}{2}\right.$, рис.11.26).

Так как $\dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = abr$, то $S(G) = 2\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\cos\varphi\sin\varphi}} abrdr = = ab\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi = \dfrac{ab}{2}.$

11.5. Тройные интегралы.

Тройные (и также n–кратные) интегралы вводятся аналогично двойным интегралам. Понятия кубируемости и объема тела (области) в трехмерном пространстве вводятся аналогично понятию площади плоской фигуры с использованием множеств всевозможных вписанных и описанных для данного тела многогранников.

Пусть в кубируемой области $T \subset \mathbb{R}^3$ задана ограниченная функция $u = f(x,y,z) = f(M)$. Разобьем область T на n кубируемых частей без общих внутренних точек: $T = \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, в каждой части T_i возьмем проолзвольным образом точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и составим *интегральную сумму*

$$I(T_i, M_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot V(T_i),$$

где $V(T_i)$ — объем T_i. Пусть d_i — диаметр T_i, $d = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} d_i$.

Предел интегральных сумм при $d \to 0$ называется *тройным интегралом* от функции $f(x, y, z)$ по области T и обозначается так:

$$\iint\limits_T\int f(x,y,z)dxdydz \quad \text{или} \quad \int\limits_T f(M)dV.$$

Для тройных интегралов имеют место теоремы, аналогичные теоремам 3 – 6 для двойных интегралов. Если $f(x,y,z) = 1$, то $\iint\limits_T\int dxdydz = V(T)$ — объем тела T.

Физический пример: если $\rho(x,y,z)$ — плотность материального тела T в точке (x,y,z), то $\iint\limits_T\int \rho(x,y,z)dxdydz = m$ — масса тела T.

Тройные интегралы обладают такими же свойствами, как и двойные интегралы.

Вычисление тройных интегралов с помощью повторного интегрирования.

1) Рассмотрим область $T = \{(x,y,z) : (x,y) \in G,\ \ z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y)\}$ (рис.11.27). Пусть в области T задана ограниченная функция $u = f(x,y,z)$.

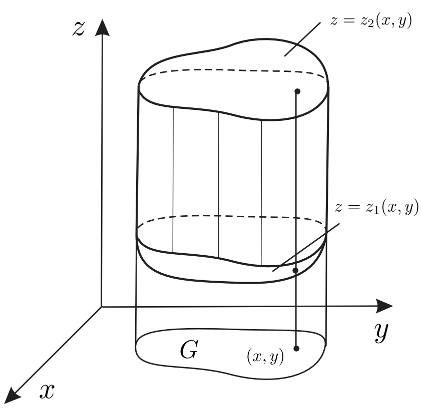

Рис. 11.27.

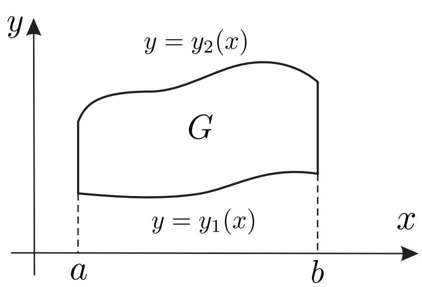

Рис. 11.28.

Теорема 8. Пусть
1) существует тройной интеграл $\iint\limits_T\int f(x,y,z)dxdydz$;

2) $\forall(x,y) \in G$ существует определенный интеграл $\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} := I(x,y)$.

Тогда существует повторный интеграл $\iint\limits_G I(x,y)dxdy$ (его записывают в виде $\iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz)$ и он равен тройному интегралу:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Теорема 8 доказывается аналогично теореме 7'.

Следствие. Если для двойного интеграла $\iint\limits_G I(x,y)dxdy$ выполняется условие теоремы 7', то его можно представить в виде повторного интеграла (см.рис. 11.28):

$$\iint\limits_G I(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} I(x,y)dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла сводится в этом случае к трехкратному вычислению определенных интегралов.

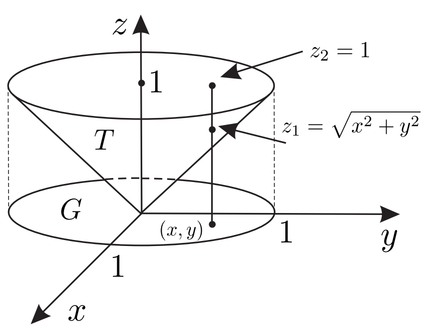

Рис. 11.29.

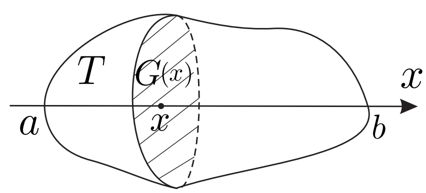

Рис. 11.30.

Пример 1. Область T ограничена поверхностями $x^2+y^2=z^2$ и $z = 1$ (рис. 11.29). Вычислить $I = \iiint\limits_T (x^2+y^2)dxdydz$.

$$I = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} (x^2+y^2)dz = \iint\limits_G dxdy(x^2+y^2)(1-\sqrt{x^2+y^2}\,).$$

В двойном интеграле по области G перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Получим

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r^2(1-r)rdr = 2\pi\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

2) Пусть в сечении кубируемой области T плоскостью $x = const$ получается квадрируемая фигура $G(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 11.30). Пусть в области T задана функция $f(x,y,z)$.

Теорема 9. Пусть
1) существует тройной интеграл $\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz$;
2) $\forall x \in [a,b]$ существует двойной интеграл $\iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)dydz := I(x)$.
Тогда существует интеграл $\int\limits_a^b I(x)dx$ (он называется повторным и записывается в виде $\int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)dydz$) и выполняется равенство

$$\iiint\limits_{T} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \iint\limits_{G(x)} f(x,y,z)dydz,$$

т.е. тройной интеграл равен повторному.

<u>Следствие.</u> Если $f(x,y,z) = 1$, то по данной формуле получаем:

$$\iiint\limits_{T} dxdydz = V(T) = \int\limits_a^b dx \underbrace{\iint\limits_{G(x)} dydz}_{S(x)} = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

<u>Пример 2.</u> Тот же интеграл, что в примере 1:

$$I = \iiint\limits_{T} (x^2+y^2)dxdydz = \int\limits_0^1 dz \iint\limits_{G(z)} (x^2+y^2)dxdy \text{ (рис.11.31).}$$

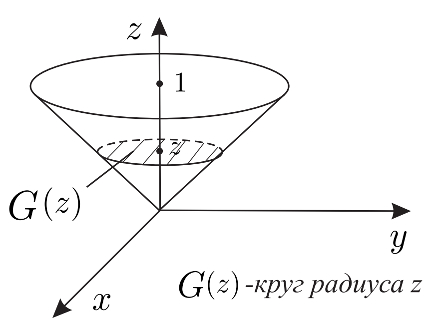

Рис. 11.31.

Во внутреннем интеграле перейдем к полярным координатам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \leqslant r \leqslant z$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Получим

$$\iint\limits_{G(z)} (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^z r^2 \cdot r \cdot dr = \frac{\pi}{2} z^4.$$

Следовательно $I = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^1 z^4 dz = \frac{\pi}{10}$.

<u>Замена переменных в тройном интеграле.</u>
<u>Рассмотрим $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz$.</u>

Перейдем от переменных (x,y,z) к новым переменным (u,v,w) с помощью формул

$$x = \varphi(u,v,w),\ y = \psi(u,v,w),\ z = \chi(u,v,w), \quad (u,v,w) \in g. \qquad (11.9)$$

Пусть выполнены условия:
I. Если точка (u,v,w) пробегает область g, то соответствующая точка $(x,y,z) = (\varphi,\psi,\chi)$ пробегает область T, причем различным точкам $(u,v,w) \in g$ соответствуют различные точки $(x,y,z) \in T$ (иначе говоря, каждая точка (x,y,z) из области T соответствует только одной точке (u,v,w) из области g).
II. Функции φ, ψ, χ имеют непрерывные частные производные первого порядка в области g.
III. $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \neq 0\ \forall (u,v,w) \in g$.

Из условия I следует, что задание тройки чисел (u,v,w) однозначно определяет точку $M(x,y,z) = M(\varphi,\psi,\chi)$ из области T. Поэтому тройку чисел (u,v,w) можно назвать новыми (*криволинейными*) координатами точки M.

Зафиксируем значение координаты u, положив $u = u_0 = cosnt$. Из уравнений (11.9) получим:

$$x = \varphi(u_0,v,w),\ y = \psi(u_0,v,w),\ z = \chi(u_0,v,w).$$

Эти уравнения являются *параметрическими уравнениями* некоторой *поверхности* в области T (в качестве параметров выступают переменные v и w). Естественно назвать эту поверхность *координатной поверхностью*.

Аналогично, положив $v = v_0$, или $w = w_0$, получим другие координатные поверхности.

Зафиксируем теперь значения двух координат, положив $u = u_0$, $v = v_0$. Из уравнений (11.9) получим:

$$x = \varphi(u_0,v_0,w),\ y = \psi(u_0,v_0,w),\ z = \chi(u_0,v_0,w).$$

Это — параметрические уравнения некоторой кривой в области T (параметром является переменная w). Естественно назвать эту кривую *координатной* w *- линией*. Аналогично определяются координатные u - линия и v - линия.

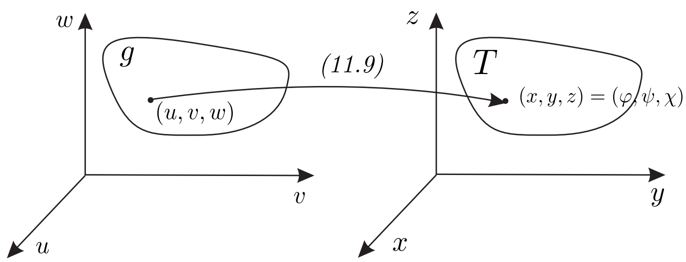

Рис. 11.32.

Формулы (11.9) можно рассматривать как *отображение* области g в пространстве переменных (u, v, w) на область T в пространстве переменных (x, y, z) (рис. 11.32).

Пусть g и T — замкнутые кубируемые области, а функция $f(x, y, z)$ ограничена в области T и непрерывна всюду в этой области, за исключением, быть может, множества точек объема нуль. Тогда справедлива формула:

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_g f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot \left|\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\right| \cdot dudvdw. \tag{11.10}$$

Формула (11.10) *называется формулой замены переменных в тройном интеграле*.

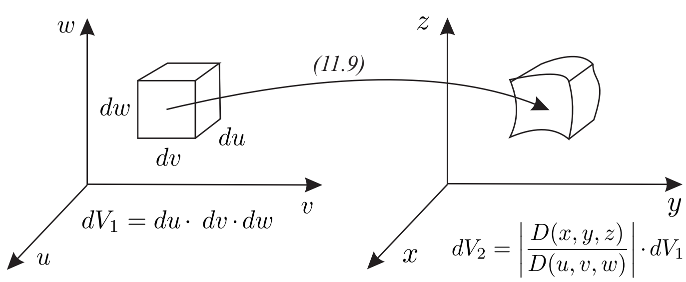

Рис. 11.33.

Если $f(x,y,z)=1$, то из формулы (11.10) получаем выражение объема тела через криволинейные координаты:

$$\iint\limits_t\int dxdydz = V(T) = \iint\limits_g\int \left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw.$$

$dV = dxdydz$ — элемент объема в прямоугольных координатах,

$dV = \left|\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right| dudvdw$ — элемент объема в криволинейных координатах (рис. 11.33).

Модуль якобиана — коэффициент растяжения объема при отображении (11.9).

Примеры наиболее важных криволинейных координат.

1) Цилиндрические координаты.

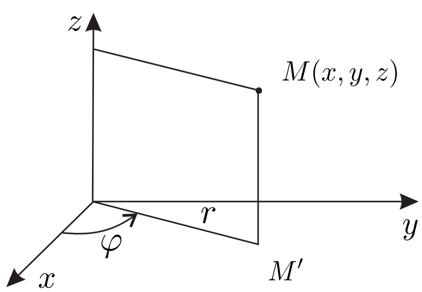

Рис. 11.34.

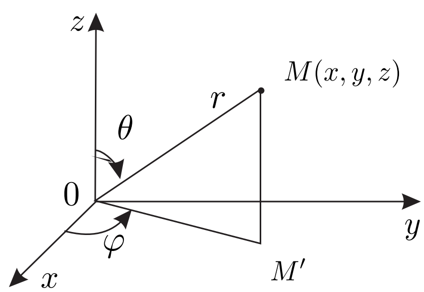

Рис. 11.35.

Тройка чисел (r,φ,z) называется *цилиндрическими координатами* точки M (рис. 11.34).

Координатная поверхность $r = const$ — цилиндрическая поверхность.

Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x,y,z) и цилиндрические координаты:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z \quad (r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$$

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = r$; $dV = rdrd\varphi dz$ — элемент объема в цилиндрических координатах.

2) Сферические координаты.

Тройка чисел (r,θ,φ) — *сферические координаты* точки M (рис. 11.35).

Координатная поверхность $r = const$ — сфера.

Формулы, связывающие декартовы прямоугольные координаты (x,y,z) и сферические координаты:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta,$$
$$(r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

$\dfrac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = r^2\sin\theta$, $dV = r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi$ — элемент объема в сферических координатах.

Пример. Найти объем тела T, ограниченного поверхностью: $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ (рис. 11.36).

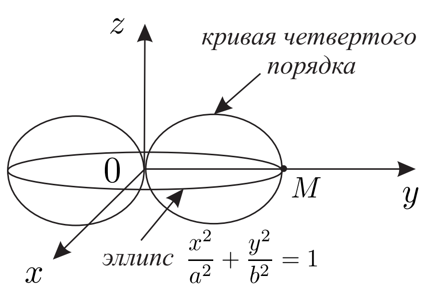

Рис. 11.36.

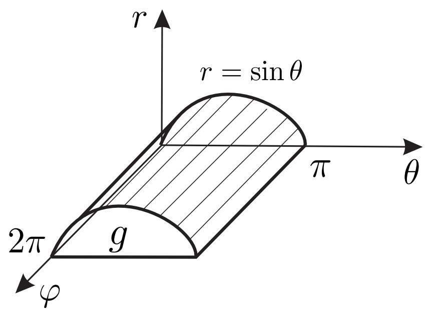

Рис. 11.37.

В сечении поверхности плоскостью $z=0$ получаются эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и точка $O(0,0,0)$. В сечении плоскостью $x=0$ получается кривая 4-го порядка $\left(\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{y^2}{b^2}$. При повороте вокруг оси Oz эта кривая деформируется каким-то образом, оставаясь замкнутой кривой, а точка M движется по эллипсу. В результате получается «бублик»без дырки.

$$V = \iiint\limits_T dxdydz\,.$$

Перейдем к обобщенным сферическим координатам

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi, y = br\sin\theta\sin\varphi, z = cr\cos\theta, (0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi).$$

Уравнение поверхности в новых координатах:

$$r^4 = r^2\sin^2\theta\,.$$

Оно распадается на два уравнения:

$$r = 0 \ \text{ и } \ r = \sin\theta\,.$$

Тело g, ограниченное этими поверхностями, изображено на рис. 11.37.

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} = abcr^2\sin\theta\,.$$

$$V = \iiint\limits_{g} \left| \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,\varphi)} \right| dr d\theta d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{\sin\theta} abcr^2 \sin\theta dr =$$
$$= 2\pi abc \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^{\sin\theta} d\theta = \frac{2}{3}\pi abc \int\limits_0^{\pi} \sin^4\theta d\theta = \frac{\pi^2}{4} abc.$$