

## Глава 12. Криволинейные интегралы.

### §1. Длина дуги кривой.

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат  $Oxy$ . Рассмотрим множество точек  $\{M(x,y)\}$ , координаты которых задаются уравнением

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1)$$

где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  — непрерывные функции на  $[\alpha, \beta]$ .

Если некоторая точка  $M \in \{M\}$  соответствует нескольким значениям  $t \in [\alpha, \beta]$ , то такую точку назовем кратной.

Пусть различным значениям  $t \in [\alpha, \beta]$  соответствуют различные точки  $M(x,y)$ , т.е. мн-во  $\{M(x,y)\}$  не содержит кратных точек.

Тогда мн-во  $\{M(\varphi(t), \psi(t))\}$  назовем простой плоской незамкнутой кривой. Переменную  $t$  назовем параметром и будем говорить, что уравнение (1) задает кривую параметрически.

Точки  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$  и  $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$  назовем граничными точками или концами кривой. Саму кривую называют также кривой  $AB$  или дугой  $AB$ .

Если точки  $A$  и  $B$  совпадают, а остальные точки не являются кратными, то кривая называется простой замкнутой кривой.

Примеры.

1)  $x = \cos t, \quad y = \sin t;$

а)  $0 \leq t \leq \pi$  — простая незамкнутая кривая (полуокружность),

б)  $0 \leq t \leq 2\pi$  — простая замкнутая кривая (окружность),

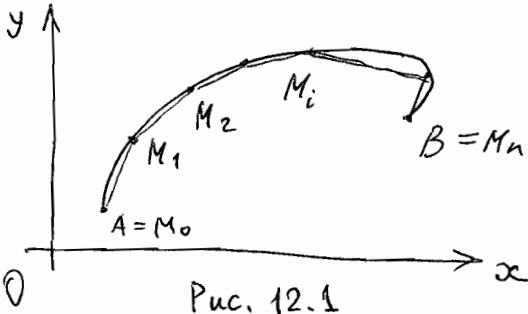
в)  $0 \leq t \leq 4\pi$  — непростая кривая (все ее точки — дву-кратные, кроме точки  $(1,0)$  — она трехкратная).

2) Графика непрерывной  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , можно рассматривать как простую незамкнутую кривую, задавая ее параметрическим уравнением в виде

$$x = t, \quad y = f(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Рассмотрим простую (замкнутую или незамкнутую) кривую, заданную ур-ием (1). Разобьем  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частей точками

$$\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta.$$



Каждому значению  $t_i$  соответствует точка  $M_i(\varphi(t_i), \psi(t_i))$  на кривой (рис. 12.1). Вспомем в кривую ломаную  $AM_1M_2 \dots B$ .

Длина  $i$ -го звена ломаной равна

$$\Delta l_i = \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2}$$

(рис. 12.2),

а длина  $l(t_i)$  всей ломаной выражается равенством

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \Delta l_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}))^2 + (\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}))^2} \quad (2)$$

Пусть  $\Delta t = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$ , где  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

Определение. Число  $l$  наз-ся пределом длины ломаных  $l(t_i)$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такие, что  $\forall$  разбиения  $[\alpha, \beta]$ , у которого  $\Delta t < \delta$ , выполняются не-во  $0 \leq l - l(t_i) < \varepsilon$ .

Если существует  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} l(t_i) = l$ , то кривая наз-ся спрямляемой, а число  $l$  — длина её дуги.

Теорема 1. Пусть простая кривая задана параметрически

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta \quad (1)$$

и пусть функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют непрерывные производные  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$  на  $[\alpha, \beta]$ .

Тогда кривая спрямляема и длина  $l$  её дуги выражается формулой

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (3)$$

а) Доказательство "на калесках" (рис. 12.3).

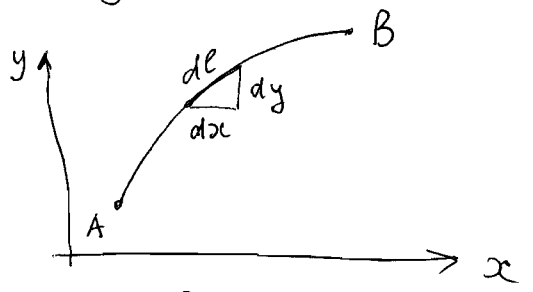


Рис. 12.3

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t) dt,$$

$$dy = d\psi(t) = \psi'(t) dt,$$

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

$$l = \int_A^B dl = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

поэтому

б) "Аккуратное" док-во.

Нужно доказать, что 
$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} l(t_i) = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (4)$$

Функцию  $l(t_i)$  выражает формулой (2). По формуле Лагранжа конечных приращений имеем:

$$\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i) \Delta t_i, \quad \xi_i \in [t_{i-1}, t_i],$$

$$\psi(t_i) - \psi(t_{i-1}) = \psi'(\xi_i^*) \Delta t_i, \quad \xi_i^* \in [t_{i-1}, t_i].$$

Следовательно,

$$l(t_i) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i^*)} \Delta t_i.$$

Введем функцию  $f(t) = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ . Она непрерывна и, следовательно, интегрируема на  $[a, b]$ . Интегральная сумма этой функции, соответствующая разбиению  $[a, b]$  на  $n$  равных сегментов  $[t_{i-1}, t_i]$  и выбору точек  $\xi_i$  в качестве промежуточных точек, имеет вид

$$I(t_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\varphi'^2(\xi_i) + \psi'^2(\xi_i)} \Delta t_i.$$

По определению определенного интеграла

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} I(t_i, \xi_i) = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (5)$$

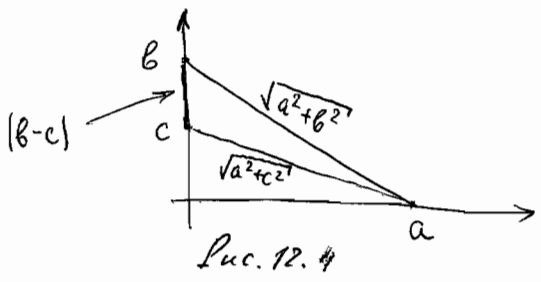
В силу (5) для док-ва (4) достаточно доказать, что

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} (\ell(t_i) - I(t_i, \xi_i)) = 0.$$

Для этого покажем, что <sup>(алгебраическое)</sup> неравенство

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|. \quad (6)$$

Геометрическое доказ-во справедливости неравенства (6) представлено на рисунке 12.4.



Согласно не-бу тригонометрии

$$|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}| \leq |b-c|.$$

Используя не-во (6), а также выражения для  $\ell(t_i)$  и  $I(t_i, \xi_i)$ , получаем

$$\begin{aligned} |\ell(t_i) - I(t_i, \xi_i)| &= \left| \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\psi'^2(\xi_i^*) + \psi_i'^2(\xi_i^*)} - \sqrt{\psi'^2(\xi_i) + \psi_i'^2(\xi_i)} \right) \Delta t_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |\psi'(\xi_i^*) - \psi'(\xi_i)| \cdot \Delta t_i. \end{aligned}$$

Зададим теперь произвольное  $\epsilon > 0$ . Т.к.  $\psi'(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ , то  $\exists \delta > 0$ , такое, что при  $\Delta t_i < \delta$  будет выполняться не-во

$$|\psi'(\xi_i^*) - \psi'(\xi_i)| < \frac{\epsilon}{\beta - \alpha}.$$

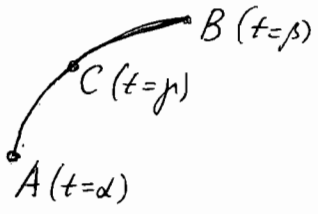
Следовательно, при  $\Delta t_i < \delta$ , <sup>( $i=1, 2, \dots, n$ )</sup> (т.е. при  $\Delta < \delta$ ) выполняется не-во

$$|\ell(t_i) - I(t_i, \xi_i)| < \frac{\epsilon}{\beta - \alpha} \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \epsilon,$$

а это и означает, что  $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (\ell(t_i) - I(t_i, \xi_i)) = 0$ . Теорема 1 доказана.

Следствие.

① Возьмем на кривой AB произвольную точку  $C(\psi(\eta), \psi(\eta))$ ,  $\eta \in (\alpha, \beta)$  (рис. 12.5). Тогда



$$l_{AC} = \int_{\alpha}^{\eta} \sqrt{\psi'^2(t) + \psi_i'^2(t)} dt, \quad l_{CB} = \int_{\eta}^{\beta} \sqrt{\psi'^2(t) + \psi_i'^2(t)} dt, \quad l_{AB} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\psi'^2(t) + \psi_i'^2(t)} dt.$$

Т.к.  $\int_{\alpha}^{\eta} + \int_{\eta}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta}$ , то  $l_{AC} + l_{CB} = l_{AB}$ . Это св-во наз-ся аддитивностью длины дуги.

Рис. 12.5

- ② Пусть кривая задана в декартовой системе координат уравнением  $y=f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , причем  $f$ -я  $f(x)$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную  $f'(x)$ .

Перейдем к параметрическому уравнению кривой:

$$x = t, \quad y = f(t), \quad a \leq t \leq b$$

в которой можно положить  $\varphi(t) = t$ ,  $\psi(t) = f(t)$ ,  
По формуле (3), получаем:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

- ③ Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах

$$z = z(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 \text{ (рис. 12.6),}$$

причем  $\varphi$ -я  $z(\varphi)$  имеет на  $[\varphi_1, \varphi_2]$  непрерывную производную  $z'(\varphi)$ .

Переходя к декартовым координатам, получаем уравнение кривой в параметрической форме ( $\varphi$ -параметр):

$$x = z(\varphi) \cos \varphi, \quad y = z(\varphi) \sin \varphi, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2.$$

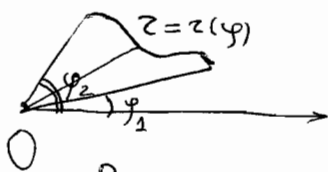


Рис. 12.6

Т.к.  $x'(\varphi) = z'(\varphi) \cos \varphi - z(\varphi) \sin \varphi$ ,  $y'(\varphi) = z'(\varphi) \sin \varphi + z(\varphi) \cos \varphi$ , то, применяя  $\varphi$ -я (5),

получаем

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{x'^2(\varphi) + y'^2(\varphi)} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{z^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} d\varphi.$$

- ④ Если кривая задана в полярных координатах уравнением  $\varphi = \varphi(z)$ ,  $z_1 \leq z \leq z_2$ , то

$$L = \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{1 + z^2 \varphi'^2(z)} dz \text{ (вывести эту формулу самостоятельно).}$$

Примеры. 1)  $x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .  
(окружность радиуса  $R$  с центром в начале координат).

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = R \int_0^{2\pi} dt = 2\pi R.$$

2)  $z = R = \text{const} > 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (та же окружность, но заданная уравнением в полярных координатах  $z = z(\varphi) = R$ ).

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{z^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0} d\varphi = R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R.$$

3)  $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$  (часть параболы).

$$l = \int_0^1 \sqrt{1 + (2x)^2} dx = \left[ x \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} \ln \left( x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{4}} \right) \right] \Big|_0^1 = \\ = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2 + \sqrt{5}).$$

Замечание о пространственной кривой.

Простая пространственная кривая определяется как множество точек  $\{M(x, y, z) : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \leq t \leq \beta\}$ , где  $\varphi(t), \psi(t)$  и  $\chi(t)$  — непрерывные функции на сегменте  $[\alpha, \beta]$ , причём множество  $\{M(x, y, z)\}$  не содержит кратных точек.

Поиск длины дуги вводится таким же образом, как и для плоской кривой, и получается формула

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt.$$

Пример.  $x = R \cos t, y = R \sin t, z = ht$  — винтовая линия.

Пусть  $0 \leq t \leq 2\pi$  (одна виток), тогда

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + h^2} dt = 2\pi \sqrt{R^2 + h^2}.$$

~~Глава 12~~ ~~Криволинейные интегралы~~

§2. Криволинейные интегралы I рода.

Пусть  $L$  - простая спрямляемая кривая <sup>(на плоскости)</sup>, заданная параметрически

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta. \quad (1)$$

(т.е.  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  - непрерывные функции на  $[\alpha, \beta]$  и разложимы в ряд Тейлора в каждой точке  $M(\varphi(t), \psi(t))$ ; если  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ , то кривая - замкнутая).

Пусть на кривой  $L$  задана скалярная функция  $Z = f(x, y)$ .

Разобьем  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частей точками  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ .

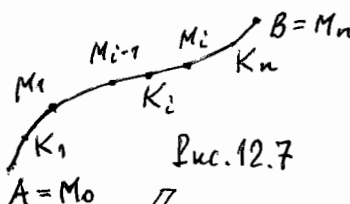
При этом кривая  $L$  разобьется на  $n$  частей точками

$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$  (рис. 12.7). Точка  $M_i$  имеет координаты  $(\varphi(t_i), \psi(t_i))$ .

Пусть  $\Delta l_i$  - длина дуги  $M_{i-1}M_i$ ,  $\Delta l = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$ .

Выберем на каждой дуге  $M_{i-1}M_i$  какую-нибудь точку  $K_i(\xi_i, \eta_i)$

и составим интегральную сумму



$$I(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

Предел этой суммы  $I(M_i, K_i)$  при  $\Delta l \rightarrow 0$  (если он существует)

называется криволинейным интегралом I рода от функции

$f(x, y)$  по кривой  $L$  и обозначается

$$\int_L f(x, y) dl \quad \text{или} \quad \int_{AB} f(x, y) dl.$$

Из этого определения следует, что  $\int f dl$  не зависит от того, в каком направлении проделана кривая  $L$ , т.е.  $\int_{AB} f dl = \int_{BA} f dl$ .

(С.М.Н.О.)

Вычисление криволинейных интегралов 1 рода с помощью определенных интегралов.

Теорема 2. Пусть

① простая кривая  $L$  задана параметрически

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (1)$$

и пусть функции  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют на  $[\alpha, \beta]$  непрерывные производные  $\varphi'(t)$  и  $\psi'(t)$ , одновременно не равные нулю, т.е.  $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$  (в таком случае кривая  $L$  наз-ва гладкой);

② функции  $f(x, y)$  непрерывны вдоль кривой  $L$ .

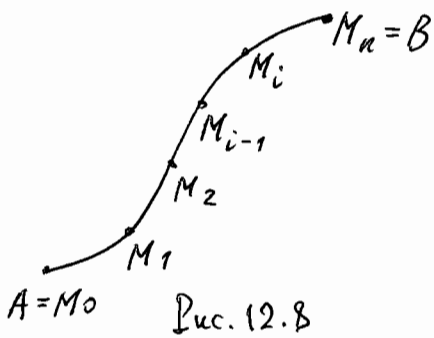
Тогда

криволинейный интеграл  $\int_L f(x, y) dl$  существует

и справедливо равенство

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (2).$$

Доказ-во. Разобьем  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частичных сегментов точками  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ :



При этом кривая  $L$  разобьётся на частичные дуги точками  $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$ , где  $M_i = (\varphi(t_i), \psi(t_i))$  (рис. 12.8). Введём обозначения:

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad \Delta t = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i,$$

$$\Delta l_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt - \text{длина } i\text{-й частичной дуги,}$$

$$\Delta l = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i.$$

Отметим, что  $\Delta l \rightarrow 0$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  (это очевидно), и обратно,  $\Delta t \rightarrow 0$  при  $\Delta l \rightarrow 0$  (это следует из того, что  $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} \geq \min_{[\alpha, \beta]} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = m > 0$  и поэтому  $\Delta l_i \geq m \cdot \Delta t_i$ ; следовательно,  $\Delta t_i \leq \frac{\Delta l_i}{m}$  и  $\Delta t \leq \frac{\Delta l}{m}$ ).



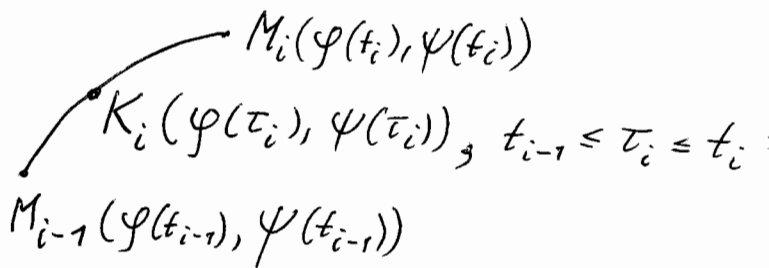


Рис. 12.9

На каждой частичке  
 дуге  $M_{i-1} M_i$  возьмём  
 произвольным образом  
 точку  $K_i(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i))$   
 (рис. 12.9) и составим интегральную сумму

$$I(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) \Delta l_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$$

Требуется доказать, что  $\lim I(M_i, K_i)$  при  $\Delta l \rightarrow 0$   
 (или, что то же самое, при  $\Delta t \rightarrow 0$ ) существует и  
 равен опр. интегралу  $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt.$

Представим интеграл  $I$  в виде

$$I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$$

и рассмотрим разность

$$I(M_i, K_i) - I = \sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} [f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \cdot \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \quad (3)$$

Нам нужно доказать, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (I(M_i, K_i) - I) = 0,$$

т.е.  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ , такие, что  $\forall$  разбиение  $[\alpha, \beta]$ , у которого  
 $\Delta t < \delta$ , и  $\forall$  выбора точек  $K_i$  выполняется не-во

$$|I(M_i, K_i) - I| < \varepsilon.$$

$\Phi$ -я  $f(\varphi(t), \psi(t))$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  и, с.н., равномерно непрерывна на этом сегменте. Поэтому  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists \delta > 0$ , такое, что если  $\Delta t < \delta$ , то  $\forall \tau_i$  и  $t \in [t_{i-1}, t_i]$  выполняется неравенство

$$|f(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i)) - f(\varphi(t), \psi(t))| < \frac{\varepsilon}{\ell},$$

где  $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$  — длина кривой  $L$ .

Из (3) получаем; что если  $\Delta t < \delta$ , то

$$|I(M_i, K_i) - I| < \frac{\varepsilon}{\ell} \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt}_{\ell} = \varepsilon, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Замечания.

1. Выражение  $d\ell = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt$  представляет собой дифференциал функции  $\ell(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{\varphi'^2(s) + \psi'^2(s)} ds$ , которая называется переменной дугой и при каждом  $t \in [\alpha, \beta]$  равна длине дуги кривой  $AM$ , где  $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ ,  $M(\varphi(t), \psi(t))$ . Если кривая  $L$  задана уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  (в декартовых координатах), причем  $\varphi$ -я  $y(x)$  имеет непрерывную производную  $y'(x)$  на  $[a, b]$ , то

$$d\ell = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

$$\int_L f(x, y) d\ell = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

Если кривая  $L$  задана в полярных координатах:

$z = z(\varphi)$ ,  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ , причем  $z(\varphi)$  имеет непрерывную производную  $z'(\varphi)$ , то  $d\ell = \sqrt{z^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} d\varphi$  и

$$\int_L f(x, y) d\ell = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(z(\varphi)\cos\varphi, z(\varphi)\sin\varphi) \sqrt{z^2(\varphi) + z'^2(\varphi)} d\varphi.$$

2. Непрерывная кривая, состоящая из конечного числа гладких кривых, называется кусочно гладкой (рис. 12.10).



Рис. 12.10

Если кривая  $L$  — кусочно гладкая, а функция  $f(x, y)$  — кусочно непрерывная вдоль кривой  $L$ , то формула (2) остаётся в силе.

3. Криволинейные интегралы I рода обладают такими же свойствами, как и определенные интегралы (линейность, аддитивность, оценка по модулю, формула среднего значения).

4. Криволинейные интегралы I рода в пространстве вводятся аналогично тому, как это сделано для плоскости. Если

$$L = \{ (x, y, z) : x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \alpha \leq t \leq \beta \} -$$

— кусочно гладкая кривая в пространстве, то

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt.$$

Примеры. 1.  $\int_L x dl$ , где  $L$  — кривая, заданная уравнением  $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ .

$$\int_L x dl = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \dots = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

— уравнение

2.  $\int_L xy dl$ , где  $L$  — дуга эллипса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0$  (рис. 12.11).  
 Запишем уравнение  $L$  в параметрическом виде:  $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

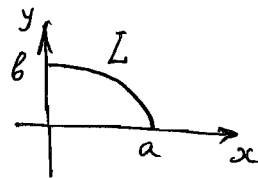


Рис. 12.11

Тогда

$$\begin{aligned} \int_L xy dl &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} ab \cos t \sin t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \cos 2t} dt = \dots = \frac{ab(a^3-b^3)}{3(a^2-b^2)}. \end{aligned}$$

### §3. Криволинейные интегралы 2 рода.

Пусть  $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$  — простая незамкнутая спрямляемая кривая, на которой заданы две функции:  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$ .

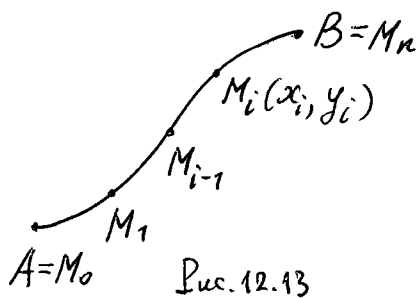


Рис. 12.13

Разобьем сегмент  $[\alpha, \beta]$  на  $n$  частей сегментов точками  $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$ .

Кривая  $L$  разобьется при этом на  $n$  частей дуэ точками  $A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$  в направлении от  $A$  к  $B$ . Обозначим

координаты точки  $M_i$  через  $(x_i, y_i)$  ( $x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i)$ )

и положим  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ ,

$\Delta l_i$  — длина дуэ  $M_{i-1}M_i$ ,  $\Delta l = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta l_i$ .

На каждой частной дуэ  $(M_{i-1}M_i)$  возьмем произвольным образом точку  $K_i(\xi_i, \eta_i)$  и составим две интегральные суммы следующего вида:

$$I_1(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i, \quad I_2(M_i, K_i) = \sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i.$$

Если сумм  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} I_k(M_i, K_i) = I_k$ , то они наз-ся

криволинейными интегралами 2 рода и обозначаются так:

$$I_1 = \int_{AB} P(x, y) dx, \quad I_2 = \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

Сумма  $I = I_1 + I_2 = \int_{AB} P dx + Q dy$  наз-ся общим криволинейным интегралом 2 рода

Из определения следует, что криволинейный интеграл 2 рода зависит от того, в каком направлении идет движение кривая  $L$ , т.е. от того, какая из точек  $A$  и  $B$  является начальной, а какая конечной. Если двигаться от  $B$  к  $A$ , то все  $\Delta x_i$  и  $\Delta y_i$  в интегральных суммах изменят знак и, следовательно, интегралы также изменят знак, т.е.

$$\int_{AB} P dx = - \int_{BA} P dx, \quad \int_{AB} Q dy = - \int_{BA} Q dy.$$

Физический пример.

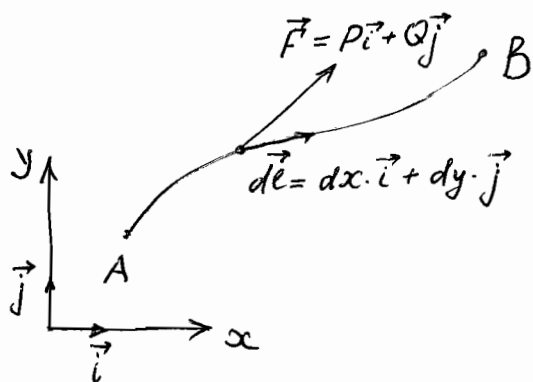


Рис. 12.14

Пусть материальная точка движется по кривой  $AB$  из т.  $A$  в т.  $B$  под действием силы  $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$  (рис. 12.14). Тогда  $(\vec{F} \cdot d\vec{l}) = P dx + Q dy$  - работа силы при перемещении точки на вектор  $d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$ , а

$$\int_{AB} (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = \int_{AB} P dx + Q dy$$
 - работа силы при

перемещении точки по кривой  $AB$  из точки  $A$  в точку  $B$ .

Вычисление криволинейных интегралов 2 рода с помощью определенных интегралов.

Теорема 3. Пусть 1) гладкая <sup>(незамкнутая)</sup> кривая  $AB$  задана уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ,  
 2) функции  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$  непрерывны вдоль кривой  $AB$ .  
 Тогда криволинейные интегралы 2 рода от ф-ий  $P$  и  $Q$  суммируются и справедливы равенства

$$\int_{AB} P(x,y) dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt, \quad \int_{AB} Q(x,y) dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (1)$$

Доказ-во теоремы 3 аналогично док-ву теоремы 2.

Замечания. 1. Если <sup>(гладкая)</sup> кривая <sup>AB</sup> задана в декартовых координатах уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ ,  $A = (a, y(a))$ ,  $B = (b, y(b))$ , (слово "гладкая" означает, что  $\varphi$ -я  $y(x)$  имеет на  $[a, b]$  непрерывную производную  $y'(x)$ ), то

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx. \quad (2)$$

2. Если  $L$  - замкнутая кривая (замкнутый контур), то есть точки  $A$  и  $B$  совпадают, то криволинейный интеграл 2 рода по кривой  $L$  вводится так же, как и для незамкнутой кривой, но только теперь в обозначении  $\int_{AB} P dx + Q dy$  не отражено, в каком направлении пробегается кривая. Договоримся

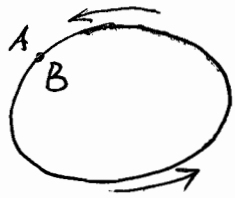


Рис. 12.15

считать положительным то направление обхода замкнутого контура, при котором область, лежащая внутри контура, остаётся слева по отношению к движущейся по контуру точке <sup>(рис. 12.15)</sup>. Интеграл по замкнутому контуру  $L$  в положительном направлении обозначается так:

$$\oint_L P dx + Q dy.$$

3. Криволинейные интегралы 2 рода в пространстве вводятся аналогично интегралам на плоскости.

Кривая  $AB$ :  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $z = \chi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ ;

$$I = \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q dy + R dz = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi, \psi, \chi) \varphi' + Q \psi' + R \chi'] dt.$$

Интеграл  $I$  также можно записать в виде:

$$I = \int_{AB} (\vec{F} d\vec{e}), \quad \text{где } \vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}, \quad d\vec{e} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k},$$

$(\vec{F} d\vec{e})$  - скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $d\vec{e}$ ,

и называется циркуляцией векторного поля  $\vec{F}$  вдоль кривой  $AB$ .

Примеры. 1.  $-\frac{1}{2} \oint_L y dx - x dy$ , где  $L$  - эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Перейдем к параметрическому уравнению эллипса:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

и воспользуемся формулой (1):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \oint_L y dx - x dy &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [b \sin t (-a \sin t) - a \cos t (b \cos t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} dt = \pi ab = S_{эл} \quad (\text{площадь фигуры, ограниченной эллипсом}). \end{aligned}$$

В следующем параграфе будет введена формула Грина, из которой, в частности, следует, что если плоская фигура  $G$  ограничена кусочно гладким контуром  $L$  (рис. 12.16), то

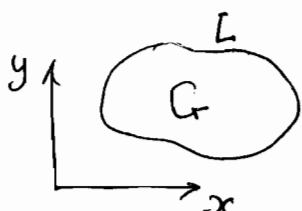


Рис. 12.16

$$S(G) = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

2. Вычислить  $I = \int_{AB} 2xy dx + x^2 dy$  по трем кривым,

соединяющими точки  $A(0,0)$  и  $B(1,1)$

и изображенных на рисунке 12.17.

Воспользуемся формулой (2):

1)  $y = x$   $I_1 = \int_0^1 2x \cdot x dx + x^2 \cdot dx = \int_0^1 3x^2 dx = x^3 \Big|_0^1 = 1;$

2)  $y = x^2$   $I_2 = \int_0^1 2x \cdot x^2 dx + x^2 \cdot 2x dx = \int_0^1 4x^3 dx = x^4 \Big|_0^1 = 1;$

3) ломаная ACB  $I_3 = \int_0^1 2x \cdot 0 dx + \int_0^1 1^2 dy = 1.$

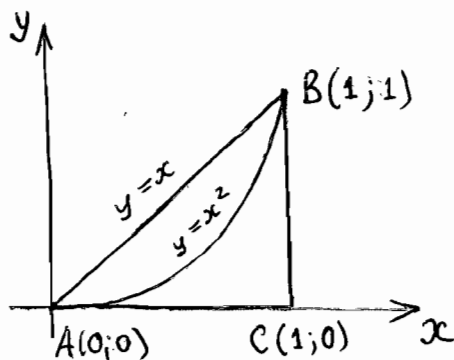


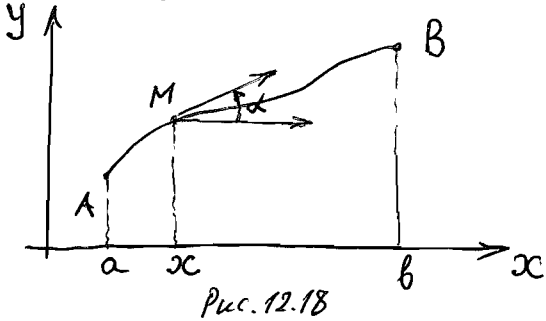
Рис. 12.17

Таким образом,  $I_1 = I_2 = I_3$ .

Это не случайно! Можно доказать, что значение интеграла  $I$  не зависит от кривой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ . Как это доказать и в каких случаях интеграл не зависит от пути интегрирования - об этом пойдет речь в §4.

Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода.

Пусть <sup>заданная</sup> кривая <sup>AB</sup> задана <sup>(в декартовых координатах)</sup> уравнением  $y = y(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , проекция на ось  $x$  имеет вид  $[a, b]$  и ее направление совпадает с направлением  $x$  осей. Обозначим через  $\alpha(x)$  угол между направлением касательной к кривой в т.  $M(x, f(x))$  и осью  $Ox$ .



Направление касательной выберем в соответствии с направлением движения по кривой (рис. 12.18):

при движении от A к B:  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(x), \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}, \quad \sin \alpha = \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}};$$

при движении от B к A:  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = y'(x)$ ,

Рассмотрим два криволинейных интеграла:  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$ ,  $\sin \alpha = -\frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'^2(x)}}$ .

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, y(x)) dx; \quad \int_{AB} P(x, y) \cos \alpha dl = \int_a^b P(x, y(x)) \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \sqrt{1+y'^2(x)} dx = \int_a^b P(x, y(x)) dx.$$

Криволинейный интеграл 2 рода
Криволинейный интеграл 1 рода

Из написанных равенств следует, что

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{AB} P(x, y) \cos \alpha dl$$

Аналогично:  $\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_{AB} Q(x, y) \sin \alpha dl$

Таким образом,  $\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl$  - формула связи между криволинейными интегралами 1 и 2 рода.

Если ввести векторы  $\vec{F}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  и  $\vec{\tau} = \{\cos \alpha, \sin \alpha\}$  - единичный вектор направления касательной к кривой, то полученную формулу можно записать так:  $\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AB} (\vec{F} \cdot \vec{\tau}) dl$ .

Аналогичные формулы имеют место для криволинейных интегралов по пространственной кривой AB:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl = \int_{AB} (\vec{F} \cdot \vec{\tau}) dl,$$

где  $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ ,  $\vec{\tau} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$  - ед. вектор направления касательной к кривой.



### §4. Формула Грина.

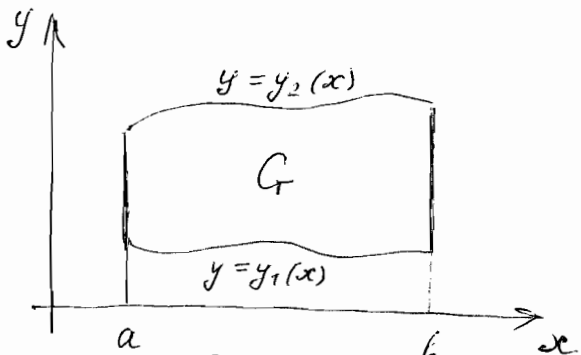


Рис. 12.19

Пусть  $y = y_1(x)$  и  $y = y_2(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) - равномерно гладкие кривые в декартовых координатах,  $y_1(x) \leq y_2(x)$ .

Область  $G = \{(x, y) : a \leq x \leq b,$

$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$  назовём "y-границевидной" (рис. 12.19),

аналогично определена "x-границевидная" область.

Замкнутую область G назовём простой, если её можно разбить как на конечное число "x-границевидных" областей, так и на конечное число "y-границевидных" областей (без общих внутр. или чужих дуг или-й).

Примеры простых областей: прямоугольник, круг, кольцо (рис. 12.20).

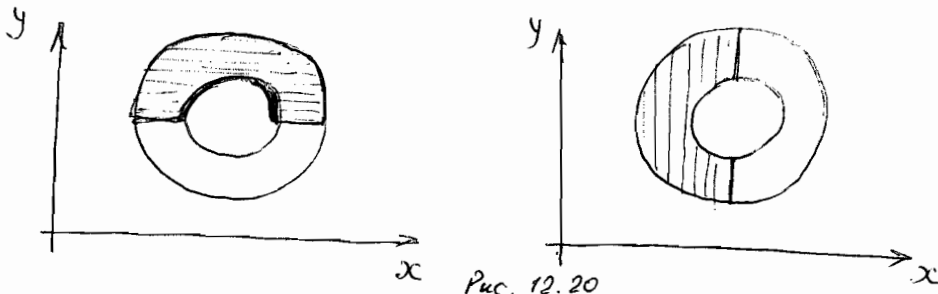


Рис. 12.20

Границу области G обозначим L. Она может состоять из конечного числа замкнутых контуров. Как было оговорено ранее, направление обхода контура считается положительным, если при этом обходе область G остаётся слева от движущейся по контуру точки.

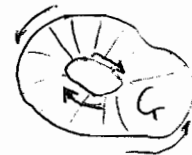


Рис. 12.21

#### Теорема 4.

Пусть функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  и их частные пр-е  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывны в простой обл. G с границей L. (кусочно-гладкой)

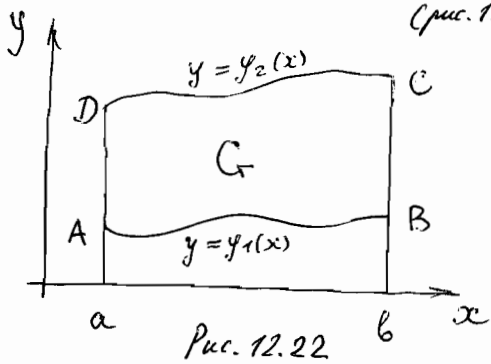
Тогда

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy, \quad (1)$$

интеграл по границе L где берётся в положительном направлении.

Формула (1) наз-ся р-ой Грина.

Док-во. а) Рассмотрим случай, когда  $G$  — "y-границ." обл.,



(рис. 12.22) и докажем, что

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_L P dx. \quad (2)$$

Сделаем гв. интегрир. и повторим, получим

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \int_a^b dx \cdot P(x,y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Каждый из двух определенных интегралов в правой части (3) выразим через криволинейный интеграл соотв. по кривым  $CD$  и  $AB$ :

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int_{CD} P(x, y) dx = - \int_{DC} P(x, y) dx,$$

$$\int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \int_{AB} P(x, y) dx.$$

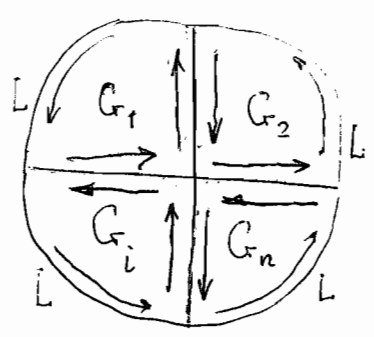
Используя полученные равенства, а также р-ва  $\int_{BC} P(x, y) dx = 0$  и  $\int_{BA} P(x, y) dx = 0$ ,

заменим (3) в виде:

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{CD} P dx - \int_{BA} P dx - \int_{AB} P dx - \int_{BC} P dx = - \oint_L P dx.$$

Тем самым, справедливость р-ва (2) доказана для "y-границевидной" обл.

в) Пусть теперь  $G$  - простая область. Разобьём её на конечное число "у-границ." областей  $G_i$  ( $i=1, \dots, n$ ):  $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$  (рис. 12.23).



Напишем для каждой обл.  $G_i$  р-во (2):

$$\iint_{G_i} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{L_i} P dx.$$

рис. 12.23

Суммируя эти р-ва по  $i$  от 1 до  $n$ , получим в левой части  $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ , а в правой части получим  $-\int P dx$ , т.к. криволинейный интеграл по каждой внутренней  $L$  (разделительной) линии берётся дважды, один в противоположных направлениях, и потому сумма таких интегралов равна нулю. Итак, для простой области  $G$  справедливо р-во

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_L P dx. \quad (2)$$

Аналогично можно док-ть, используя разбиение  $G$  на "х-границ." области, что

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_L Q dy \quad (4)$$

Вычитая (2) из (4), получим гр-ту (1):

$$\iint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_L P dx + Q dy. \quad \text{Теор. 4 доказана!}$$

Замечание. Можно док-ть, что гр на Грина справедлива не только для простых областей, но и для любой области, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гл. кривых.

Следствие. Положим в (1)  $Q=x, P=0$ , а также  $Q=0, P=-y$ , получаем.

$$\iint_G dx dy = \oint_L x dy \quad \text{и} \quad \iint_G dx dy = - \oint_L y dx, \quad \text{т.е.}$$

$$S(G) = \oint_L x dy \quad \text{и} \quad S(G) = - \oint_L y dx. \quad (5)$$

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  - произвольные числа, такие, что  $\alpha + \beta = 1$ .

Умножим первое р-во (5) на  $\alpha$ , а второе на  $\beta$ , и сложившая, получаем

$$S(G) = \oint_L \alpha x dy - \beta y dx \quad (\alpha + \beta = 1).$$

Наиболее употребительна эта ф-ла при  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ :

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx$$

Примеры.

1) Вычислить  $I = \oint_L (x^2 - y) dx + (x + y^2) dy$ ,

где  $L$  - окружность  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ .

Здесь  $P = x^2 - y, Q = x + y^2, \frac{\partial P}{\partial y} = -1, \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$ . По ф-ле Грина

$$I = \oint_G \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 2 \iint_G dx dy = 2\pi R^2.$$

2) Найти площадь области, ограниченной астрондой

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

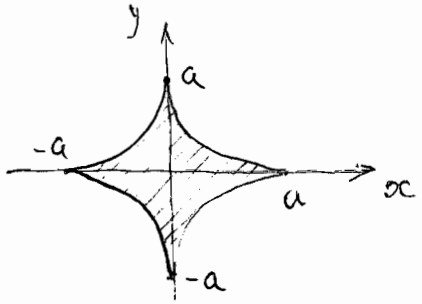


Рис. 12.24

Параметрич. ур-е астронды:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos^3 t \cdot a 3 \sin^2 t \cos t - \\ & - a \sin^3 t (-a \cdot 3 \cos^2 t \sin t)] dt = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt = \\ & = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

### §5. Условие независимости криволинейного интеграла 2 рода от пути интегрирования.

В §3 был рассмотрен пример, в котором кривая инт. 2 рода из трех разрозненных кривых, соединившим две граничные точки, имел одно и то же значение. В этом параграфе мы установим условия, при которых кривая инт. 2 рода не зависит от пути интегрирования, т.е. для двух граничных точек значение интеграла одно и то же для любой кривой, соединяющей эти точки.

Нам понадобятся понятие односвязной области.

Область ~~многоугольная~~ мы называем открытой связной м.в. Объединение области и ее границы называется замкнутой областью.

Область <sup>на плоскости</sup>  $G$  односвязная, если она обладает след. свойством: для любого замкнутого контура  $L$ , лежащего в обл.  $G$ , часть плоскости, ограниченная этим контуром, целиком принадлежит  $G$ .

Примеры. Круг, прямоугольник - односвязные м.в.а.  
Кольцо, круг с выколотой точкой <sup>(рис. 12.25)</sup> не являются односвязными областями.

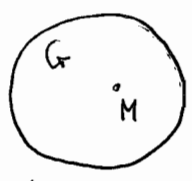


Рис. 12.25

Теорема 5. (1) Пусть ф-ии  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$  непрерывны в обл.  $G$ . Тогда следующие три условия эквивалентны (т.е. из любого из них следует два других):

1. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура  $L \subset G$ :

$$\oint_L P dx + Q dy = 0.$$

2. Для любых двух <sup>фиксированных</sup> точек  $A$  и  $B \in G$  кривая инт.  $\int_{AB} P dx + Q dy$  не зависит от пути интегрирования (т.е. от кривой, соединяющей  $A$  и  $B$ ).

3. Выражение  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом,

т.е.  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = u(M)$ , так как, так

$$du(x,y) = P(x,y) dx + Q(x,y) dy.$$

При этом  $\int_{\Gamma} P dx + Q dy = u(B) - u(A)$

$$\int_{AB} P dx + Q dy = u(B) - u(A) \quad (1)$$

② Если, кроме того, область  $G$  - односвязная, а функции  $P$  и  $Q$  имеют в обл.  $G$  непрерывные пр-е  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ , то каждая из условий 1-3 эквивалентно условию

$$4. \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ в обл. } G.$$

Доказ-во. проведем по схеме: ①  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ; ②  $3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ .

① а)  $1 \rightarrow 2$ ,

Пусть выи-но усл. 1. Рассмотрим две произв. точки  $A$  и  $B \in G$  и две произвольные кривые, соединяющие эти точки:  $ACB$  и  $A \rightarrow B$  (рис. 12.26).

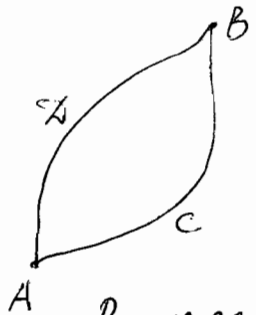


Рис. 12.26

$$\int_{ACB \rightarrow B \rightarrow A} P dx + Q dy = 0, \text{ т.е. } \int_{ACB} P dx + Q dy + \int_{B \rightarrow A} P dx + Q dy = 0,$$

$$\text{откуда } \int_{ACB} P dx + Q dy = - \int_{B \rightarrow A} P dx + Q dy = \int_{A \rightarrow B} P dx + Q dy.$$

Таким образом, выполняется условие 2.

б)  $2 \rightarrow 3$ ,

Пусть  $M_0(x_0, y_0)$  - фиксир. точка  $\in G$ ,  $M(x, y)$  - произв. точка  $\in G$ . В силу усл. 2 интеграл  $\int_{M_0 M} P dx + Q dy$

не зависит от выбора кривой  $M_0 M$ , а зависит только от т.  $M(x, y)$ , т.е. является ф-ей от  $x$  и  $y$ . Обозначим эту ф-ю  $u(x, y)$ :

$$u(x, y) = \int_{M_0 M} P dx + Q dy,$$

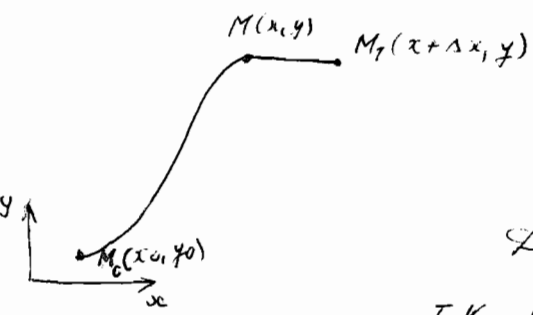


Рис. 12.27

Докажем, что  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ . Отсюда, т.к.  $P$  и  $Q$  - непр. ф-ии, следует, что  $u(x, y)$  - диф. ф-я,

т.е.  $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P dx + Q dy$ , т.е. выражение  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом.

Зарисуем точку  $M(x, y)$  и дадим прираще-  
ние  $\Delta x$  переменной  $x$  (рис. 12.27). Функция  $u(x, y)$   
получит частное приращение

$$\begin{aligned} \Delta_x u &= u(x+\Delta x, y) - u(x, y) = \int_{M_0 M_1} P dx + Q dy - \int_{M_0 M} P dx + Q dy = \\ &= \int_{M M_1} P dx + Q dy = \int_x^{x+\Delta x} P(x, y) dx = P(\xi, y) \Delta x, \text{ где } \xi \in [x, x+\Delta x] \end{aligned}$$

(последнее равенство получено с помощью формулы среднего значения). Отсюда следует, что

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(\xi, y) \rightarrow P(x, y) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0,$$

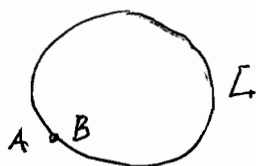
т.е. функция  $u(x, y)$  имеет в точке  $M(x, y)$  частную производную по переменной  $x$  и  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ .

Аналогично доказывается, что  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ .

Докажем, что верна формула (1):

$$\begin{aligned} \int_{AB} P dx + Q dy &= \int_{A M_0} P dx + Q dy + \int_{M_0 B} P dx + Q dy = \int_{M_0 B} P dx + Q dy - \\ &- \int_{M_0 A} P dx + Q dy = u(B) - u(A). \end{aligned}$$

б) 3 → 1. Пусть выполнено условие 3 и, следовательно, верна формула (1). Возьмем произвольный замкнутый контур  $L \subset G$  (рис. 12.28,  $A=B$ ). По формуле (1)



$$\oint_L P dx + Q dy = u(B) - u(A) = 0,$$

т.е. выполнено условие 1.

Рис. 12.28

2) 3 → 4 Пусть выполнено условие 3, т.е. существует функция  $u(x, y)$ , такая, что  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ . Тогда  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ . Так как  $\frac{\partial P}{\partial y}$  и  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  — непрерывные функции, то  $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ , т.е.  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  и, значит, выполнено условие 4.

Замечание. Односвязность области  $G$  здесь не использовалась.

g) 4 → 1,

Пусть вын-но укл. 4, т.е.  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  в обл.  $G$ , и  $G$  - односвязная область.

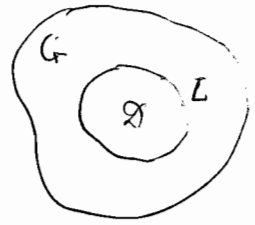


Рис. 12.29

Возьмем произвольный замкнутый контур  $\Gamma \subset G$  (рис. 12.29). В эту односвязную обл.  $G$  область  $D$ , ограниченная контуром  $L$ , целиком принадлежит области  $G$ . По ф-ле Грина

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0, \text{ т.е. вын-но укл. 1.}$$

Теорема 5 доказана.

Замечание. Аналогичная теорема имеет место для криволинейных

интегралов 2 рода в пр-ве:  $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ , где  $P, Q, R$  - ф-ции от  $x, y, z$ .

В частности, если 3 функции существуют функции  $u(x, y, z)$ , таковы, что  $du = P dx + Q dy + R dz$ , а условия 4 содержаттеперь 3 р-ва:  $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ .

Утверждения 1 → 2 → 3 → 1 (и 3 → 4) доказаны так же, как в Т. 5, а для док-ва утв. 4 → 1 используем формулу Стокса. О ней речь пойдет в следующей главе.

Примеры. 1) Вернемся к примеру из 3.3:

$$I = \int_{A(0,0)}^{B(1,1)} 2xy dx + x^2 dy.$$

Т.к.  $2xy dx + x^2 dy = du$ , где  $u = x^2 y$ , то интеграл  $I$  не зависит от пути интегрирования:  $I = u(1,1) - u(0,0) = 1 - 0 = 1$ .

2) Если область  $G$  не является односвязной, то из укл. 4 может не следовать укл. 1. Вот пример:  $P = -\frac{y}{x^2+y^2}, Q = \frac{x}{x^2+y^2}$ ,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ т.е. вын-но укл. 4. При этом } P, Q,$$

$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$  определены и непрерывны, кроме одной точки  $(0,0)$ .

Рассм. обл.  $G$  с выколотой точкой  $(0,0)$ . Она не является односвязной. Возьмем окружность  $L: x = R \cos t, y = R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$  (рис. 12.30).

$$\oint_L P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} [-\sin t (-\sin t) dt + \cos t \cos t \cdot dt] = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

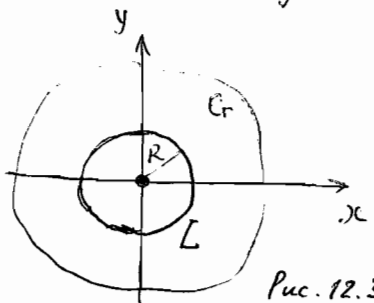


Рис. 12.30



3) Вычислить  $I = \int_{AB} \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где  $AB$  — кривая, расположенная в кольце между концентрическими окружностями радиусов  $a$  и  $b$  с центром в начале координат (рис. 12.31).

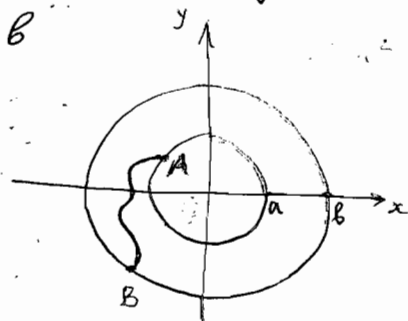


Рис. 12.31

В данном примере

$$P(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Проверим, выполнены ли условия 4 и 5:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\frac{1}{2} x (x^2 + y^2)^{-3/2} \cdot 2y = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Итак,  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ , т.е. условия 4 и 5 выполнены и, следовательно,

существует функция  $u(x, y)$ , такая, что  $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$ .

Как найти  $u(x, y)$ ? В данном примере её можно "угадать":

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad \text{Поэтому } I = u(B) - u(A) = b - a.$$

Но можно найти  $u(x, y)$  без "угадывания" (см. рис. 12.32):

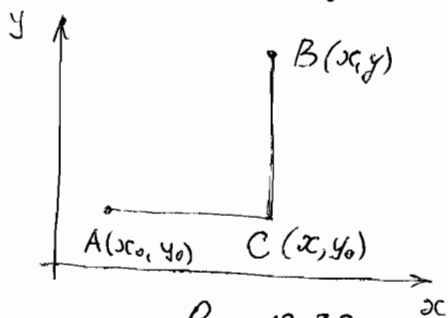


Рис. 12.32

$$u(x, y) = \int_{ACB} P dx + Q dy = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy =$$

$$= \int_{x_0}^x \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + y_0^2}} + \int_{y_0}^y \frac{y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + C = \sqrt{x^2 + y_0^2} \Big|_{x_0}^x +$$

$$+ \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{y_0}^y + C = \sqrt{x^2 + y_0^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 + y_0^2} + C =$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + C. \quad \text{Если взять } C = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \text{ то } u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

4) Физический пример. Пусть в обл.  $G$  задано векторное поле, т.е. в каждой точке  $M$  области  $G$  задан вектор  $\vec{F}(M)$ . Если  $\vec{F}(M)$  - вектор силы, то говорят о силовом векторном поле.

Примеры: поле гравитации точечной массы  $\vec{F}(M) = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}$  (см. п. 3);  
электростатическое поле напряженности.

Векторное поле  $\vec{F}(M)$  называется потенциальным, если существует такая функция  $u(M)$ , что  $\vec{F}(M) = \text{grad } u(M)$  (покажем почему, идея уже упоминалась ранее - в п. 3).

Ф-я  $u(M)$  называется потенциалом вект. поля  $\vec{F}(M)$ .

Пусть  $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$  - потенциал, силовое поле в нр-ке.

Тогда  $\vec{F}(M) = \text{grad } u(M) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$  и, следовательно,

$$P = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Поэтому  $Pdx + Qdy + Rdz = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = du$  - полный дифференциал.

Криволинейный интеграл  $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (\vec{F} \cdot d\vec{l})$  есть работа

силового поля  $\vec{F}(M)$  при перемещении материальной точки по кривой  $AB$  из т.  $A$  в т.  $B$ . Т.к.  $Pdx + Qdy + Rdz = du$  - полный диф-л, то

из **Т.5**

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A),$$

т.е. работа потенциального силового поля не зависит от пути, по которому материальная точка перемещается из т.  $A$  в т.  $B$ , а зависит лишь от начальной и конечной точек  $A$  и  $B$ : она равна разности потенциалов в точках  **$B$  и  $A$** .

В частности, если  $\vec{F}(M) = -\gamma \frac{m}{r^3} \vec{r}$  - поле гравитации точечной массы  $m$ , то  $\vec{F} = \text{grad } u(M)$ , где  $u(M) = \gamma \frac{m}{r}$  - ньютоновский потенциал, и  $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l}$  - это кинетическая энергия  $\frac{mv^2}{2}$  (работы) этого силового поля получаем выражение  $\int_{AB} (\vec{F} \cdot d\vec{l}) = \gamma m \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) = \gamma m \left( \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \gamma m r_M$  - расстояние от т.  $M$  до точки, в которой находится масса  $m$ .