МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

им. М.В. Ломоносова

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математики

А.В. Щепетилов

# Дополнительные материалы по математическому анализу для экспериментального потока. Третий семестр.

Москва, 2010

Настоящее пособие содержит часть дополнительного материала, включенного автором в лекции по математическому анализу для экспериментального потока в третьем семестре. В нем использованы стандартные в математической литературе обозначения: курсивом в тексте выделен определяемый в этом месте термин, а формула $A =: B$ или $B := A$ означает, что $B$ по-определению полагается равным $A$.

Автор благодарит сотрудников кафедры математики: Г.Н. Медведева, И.Е. Могилевского и Н.Е. Шапкину за ряд предложений по улучшению текста пособия.

# 1 Поверхности

Интуитивно, *непрерывная поверхность* является множеством $\Gamma$ в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{E}^3$, каждая точка которого имеет окрестность $V$ в $\Gamma$, являющуюся *гомеоморфным* (т.е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным) образом круга $K$ единичного радиуса на евклидовой плоскости.

Если дополнительно потребовать дифференцируемости соответствующего отображения и обратного к нему, то мы получим *гладкую поверхность*. Техническая проблема для четкой формулировки такого определения состоит в том, что нужно исключить из определения произвол, связанный с выбором конкретного отображения для каждой окрестности (пара, состоящая из окрестности $U$ и соответствующего ей гомеоморфного отображения $h : K \mapsto U$ называется *картой*) и согласовать отображения для разных окрестностей. Этого можно добиться и даже определить поверхность абстрактно без содержащего ее евклидова пространства. На этом пути получаются определения *непрерывного* и *гладкого многообразий* произвольных размерностей [4]. Но этот путь технически слишком сложен для нас и мы по нему не пойдем, ограничившись рассмотрением поверхностей, задаваемых одной картой или явно составленных из небольшого их числа.

В курсе аналитической геометрии мы уже встречались с поверхностями второго порядка: эллипсоидом, гиперболоидом, эллиптическим и гиперболическим параболоидами, цилиндром, которые являются гладкими поверхностями. Эти поверхности были заданы неявно, уравнением

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F$ – многочлен второго порядка. Заметим, что для многочленов $F$

произвольного порядка такие поверхности называются *алгебраическими.*

Но уже для конуса
$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{1}$$
точка $(0, 0, 0)$ не обладает окрестностью в конусе, гомеоморфной открытому кругу (поскольку граница этой окрестности состоит из не менее чем двух связных компонент, а граница открытого круга связна). Поверхность куба является гладкой везде, кроме его ребер. Точки, в которых нарушается требование наличия окрестности, гомеоморфной единичному кругу, называются *особыми для непрерывных поверхностей*, а точки, в которых нарушается требование гладкости поверхности – *особыми для гладких поверхностей.* Если рассмотреть половину конуса (1), выделенную условием $z \geqslant 0$, то мы получим непрерывную поверхность, но гладкой она будет везде за исключением точки $(0, 0, 0)$.

Таким образом, невозможно дать единое определение поверхностей, пригодное для всех встречающихся в математике ситуаций, и при рассмотрении конкретных случаев поверхностей приходится мириться с наличием особых точек.

Простейшим, но важным, примером поверхности, заданной одной картой, является поверхность $\Gamma$, являющаяся графиком функции
$$z = f(x, y),\ (x, y) \in \bar{V}, \tag{2}$$
где $V$ – область (т.е. открытое связное множество) в $\mathbb{R}^2$, а функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частые производные в $V$ и непрерывна в $\bar{V}$. В этом случае $h(x, y) := (x, y, f(x, y))$ и $\Gamma := U := h(V)$. Взаимнооднозначность соответствия между точками $(x, y) \in V$ и точками поверхности $\Gamma$ позволяет рассматривать $(x, y)$ как координаты на $\Gamma$.

При таком задании поверхности координаты $x, y$ и координата $z$ не равноправны. Они станут равноправными, если удастся ввести новые координаты $(u, v)$ и задать параметризацию точек поверхности $\Gamma$ в виде:
$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v),\ \ (u, v) \in \bar{U} \subset \mathbb{R}^2,$$
где функции $\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области $U$ и непрерывны в $\bar{U}$. Иначе, эту формулу можно записать в виде
$$\mathbf{r}(u, v) = \varphi(u, v)\mathbf{i} + \psi(u, v)\mathbf{j} + \chi(u, v)\mathbf{k},\ \ (u, v) \in \bar{U} \subset \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

По определению, если существует касательная плоскость к поверхности в некоторой точке, то вектора $\mathbf{r}_u$ и $\mathbf{r}_v$ ей принадлежат.

**Определение 1.** *Параметризацию (3) назовем регулярной, если вектора* $\mathbf{r}_u$ *и* $\mathbf{r}_v$ *линейно независимы для всех* $(u,v) \in U$, *и соответствие* $\mathbf{r}(u,v) : U \mapsto \Gamma$ *взаимнооднозначно.*

Регулярность параметризации гарантирует существование нормали $\mathbf{n} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ (и, тем самым, касательной плоскости) к поверхности $\Gamma$ во всех ее точках.

Изначально, $u$ и $v$ являются декартовыми координатами в области $U$, но взаимнооднозначность отображения $\mathbf{r}(u,v) : U \mapsto \Gamma$ позволяет рассматривать их как функции на поверхности $\Gamma$ или, иначе, как криволинейные координаты на $\Gamma$. При этом кривые $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ являются *координатными линиями* на поверхности $\Gamma$.

## 1.1 Первая квадратичная форма поверхности

**Определение 2.** *Первой квадратичной формой или метрикой поверхности называется квадратичная форма*

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(u,v) &:= E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 := ds^2 = \\ &= d\mathbf{r}^2 = \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2,\end{aligned}$$

*где вектор-функция* $\mathbf{r}(u,v)$ *задана уравнением (3).*

Через первую квадратичную форму $\mathbf{I}(u,v)$ можно выразить длины векторов

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,\ \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v,$$

лежащих в касательной плоскости и углы между ними

$$\cos\theta = \frac{(d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r})}{|d\mathbf{r}||\delta\mathbf{r}|} = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + \delta u dv) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

Тем самым, первая квадратичная форма определяет *внутреннюю геометрию* поверхности, т.е. позволяет находить на поверхности длины кривых и углы между векторами.

Координатные линии $u = c_1 = \mathrm{const}$ и $v = c_2 = \mathrm{const}$ ортогональны, если в точке их пересечения $F = 0$. Криволинейные координаты на поверхности $\Gamma$ называются *ортогональными*, если все их координатные линии пересекаются под прямыми углами. Это эквивалентно условию $F(u,v) \equiv 0$.

Если на поверхности $\Gamma$ задана гладкая кривая $\gamma$, определенная дифференцируемыми функциями $(u(t), v(t))$, $t \in [a, b]$, то ее длину можно найти по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{E(u(t), v(t))u'^2 + 2F(u(t), v(t))u'v' + G(u(t), v(t))v'^2}dt.$$

**Пример 1.** *Для поверхности вращения*

$$\mathbf{r}(u, v) = x(v)\cos u \cdot \mathbf{i} + x(v)\sin u \cdot \mathbf{j} + z(v) \cdot \mathbf{k},\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi$$

*заметаемой кривой $x(v), z(v)$ в плоскости $(x, z)$ (профилем поверхности) при ее вращении вокруг оси $Oz$, мы имеем*

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= -x(v)\sin u \cdot \mathbf{i} + x(v)\cos u \cdot \mathbf{j}, \\ \mathbf{r}_v &= x'(v)\cos u \cdot \mathbf{i} + x'(v)\sin u \cdot \mathbf{j} + z'(v) \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

*Следовательно, $E = x^2(v)$, $F = 0$, $G = x'(v)^2 + z'(v)^2$ и*

$$\mathbf{I}(u, v) = x(v)^2 du^2 + (x'(v)^2 + z'(v)^2)dv^2.$$

Меридианы *(линии $v = \mathrm{const}$) и* параллели *(линии $u = \mathrm{const}$) поверхности вращения, очевидно, ортогональны. Если параметр $v$ профиля $x(v), z(v)$ является натуральным, т.е. длиной дуги и тогда $x'(v)^2 + z'(v)^2 = 1$, то*

$$\mathbf{I}(u, v) = x(v)^2 du^2 + dv^2.$$

**Пример 2.** *Для сферы радиуса 1 имеем $x(v) = \cos v$, $z(v) = \sin v$, $-\pi \leqslant v \leqslant \pi$ и*

$$\mathbf{I}(u, v) = \cos^2 v du^2 + dv^2.$$

**Пример 3.** *Линия провеса однородной тяжелой нити называется цепной линией и является графиком гиперболического косинуса $x(v) = \mathrm{ch}(v)$, $z(v) = v$. Соответствующая ей поверхность вращения вокруг оси $Oz$ называется катеноидом и для него*

$$\mathbf{I}(u, v) = \mathrm{ch}^2 v(du^2 + dv^2),\ 0 \leqslant u < 2\pi,\ v \in \mathbb{R}.$$

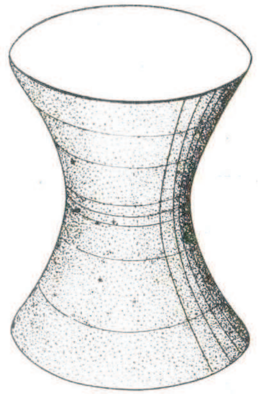

Рис. 1: Катеноид.

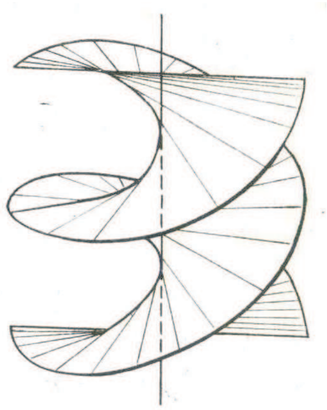

Рис. 2: Геликоид.

**Пример 4.** *Пусть прямая, перпендикулярная оси $Oz$, равномерно вращается вокруг нее, оставаясь ей перпендикулярной и одновременно поднимаясь винтовым движением на высоту, пропорциональную углу поворота. Поверхность, заметаемая этой прямой, называется геликоидом.*[1] *Она имеет вид винтового пандуса для въезда автомашин.*

*Если $v$ – параметр на прямой, а $u$ – угол поворота, то геликоид будет иметь параметризацию*

$$\mathbf{r}(u,v) = v\cos u \cdot \mathbf{i} + v\sin u \cdot \mathbf{j} + u \cdot \mathbf{k},\ u, v \in \mathbb{R}.$$

*Поэтому*

$$\mathbf{r}_u = -v\sin u \cdot \mathbf{i} + v\cos u \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_v = \cos u \cdot \mathbf{i} + \sin u \cdot \mathbf{j},$$

*откуда $E = 1 + v^2$, $F = 0$, $G = 1$ и*

$$\mathbf{I}(u,v) = (1+v^2)du^2 + dv^2.$$

*В новых координатах $u = u_1$, $v = \operatorname{sh} v_1$ мы получим $1 + v^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 v_1 = \operatorname{ch}^2 v_1$, $du = du_1$, $dv = \operatorname{ch} v_1 dv_1$, и поэтому*

$$\mathbf{I}(u_1,v_1) = \operatorname{ch}^2 v_1(du_1^2 + dv_1^2).$$

**Определение 3.** *Взаимнооднозначное отображение поверхностей $\Gamma_1 \mapsto \Gamma_2$, переводящее кривые на поверхности $\Gamma_1$ в кривые на поверхности $\Gamma_2$ той же длины называется изометрией $\Gamma_1$ на $\Gamma_2$. Эквивалентное сохранению длин кривых требование состоит в том, что квадратичная форма $\mathbf{I}_{\Gamma_1}$ переводится в форму $\mathbf{I}_{\Gamma_2}$.*

[1] Поверхность, заметаемая прямой линией при ее движении, называется *линейчатой*.

Из рассмотренных примеров мы видим, что разрезанный по меридиану $u = 0$ катеноид изометричен части $0 < u < 2\pi$ геликоида.

**Пример 5.** *Рассмотрим верхнюю полу конуса $z^2 = x^2 + y^2$, выделяемую из него условием $z \geqslant 0$. Введем для нее параметризацию*

$$\mathbf{r}(u, v) = v\cos u \cdot \mathbf{i} + v\sin u \cdot \mathbf{j} + v \cdot \mathbf{k},\ v \geqslant 0, 0 \leqslant u < 2\pi.$$

*Тогда*

$$\mathbf{r}_u = -v\sin u \cdot \mathbf{i} + v\cos u \cdot \mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}_v = \cos u \cdot \mathbf{i} + \sin u \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

*откуда $E = v^2$, $F = 0$, $G = 2$ и*

$$\mathbf{I}(u, v) = v^2 du^2 + 2dv^2.$$

*Введем новые координаты $(\tilde{x}, \tilde{y})$ по формулам*

$$\tilde{x} = \sqrt{2}v\cos\frac{u}{\sqrt{2}},\ \tilde{y} = \sqrt{2}v\sin\frac{u}{\sqrt{2}},$$

*откуда*

$$d\tilde{x} = \sqrt{2}\cos\frac{u}{\sqrt{2}}dv - v\sin\frac{u}{\sqrt{2}}du,\ d\tilde{y} = \sqrt{2}\sin\frac{u}{\sqrt{2}}dv + v\cos\frac{u}{\sqrt{2}}du,$$
$$d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 = 2dv^2 + v^2du^2 = \mathbf{I}.$$

*Тем самым, верхняя пола конуса, разрезанная по образующей, изометрична некоторому плоскому сектору.*

## 1.2 Вторая квадратичная форма поверхности

Наряду с первой, можно определить и вторую квадратичную форму поверхности $\Gamma$. Пусть кривая $\gamma$ на поверхности $\Gamma$ параметризована длиной дуги $s$, а $\mathbf{r}(s) := \mathbf{r}(u(s), v(s))$ – ее радиус-вектор, $|\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}| = 1$. Тогда

$$0 = \frac{d}{ds}1 = \frac{d}{ds}\left(\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}, \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right) = 2\left(\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}, \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\right) \Rightarrow \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} \perp \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}.$$

В явном виде:

$$\frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2} = \mathbf{r}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \mathbf{r}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \mathbf{r}_u\frac{d^2u}{ds^2} + \mathbf{r}_v\frac{d^2v}{ds^2}. \qquad (4)$$

**Определение 4.** *Нормальной кривизной* $k_\gamma|_{M_0}$ *кривой* $\gamma$ *в точке* $M_0 \in \gamma$ *называется проекция скорости поворота вектора* $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}$ *на нормаль к поверхности в точке* $M_0$*, т.е.*

$$k_\gamma|_{M_0} := \left( \frac{d^2\mathbf{r}(s)}{ds^2}, \mathbf{n} \right) \Bigg|_{M_0}, \tag{5}$$

*где* $\mathbf{n}$ *– нормаль к кривой* $\gamma$*.*

Сейчас мы покажем, что эта величина определяется только самой поверхностью $\Gamma$ и вектором $\frac{d\mathbf{r}(s)}{ds}\Big|_{M_0}$, но не кривой $\mathbf{r}(s)$.

Подставляя формулу (4) в (5), получаем с учетом $(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}) \equiv 0$ формулу

$$\begin{aligned} k_\gamma = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) \left( \frac{du}{ds} \right)^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 = \\ = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{ds^2} =: \frac{\mathbf{II}(u,v)}{\mathbf{I}(u,v)}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $L := (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})$, $M := (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})$, $N := (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n})$, а $\mathbf{II}(u,v) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ – вторая квадратичная форма поверхности $\Gamma$.

Поскольку $(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}) \equiv (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}) \equiv 0$, то

$$0 = \frac{\partial}{\partial u}(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) + (\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u) \Rightarrow (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) = -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u).$$

Аналогично,

$$(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) = -(\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v), \ (\mathbf{r}_{vu}, \mathbf{n}) = -(\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u) = -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v).$$

Отсюда, вторую квадратичную форму можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{II}(u,v) = -(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_u)du^2 - (\mathbf{r}_u, \mathbf{n}_v)dudv - (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_u)dudv - (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}_v)dv^2 = \\ = -(d\mathbf{r}, d\mathbf{n}), \end{aligned}$$

где $d\mathbf{r} := \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv$, $d\mathbf{n} := \mathbf{n}_u du + \mathbf{n}_v dv$.

Вторая квадратичная форма содержит информацию о том как поверхность искривлена в объемлющем ее евклидовом пространстве. Тем самым, она отвечает за *внешнюю геометрию* поверхности.

Рассмотрим зависимость нормальной кривизны от направления.

**Определение 5.** *Кривая в касательной плоскости, заданная уравнением*

$$|\mathbf{II}| = |Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2| = 1,$$

*называется индикатрисой кривизны или индикатрисой Дюпена.*[2]

Для касательных векторов, концы которых лежат на индикатрисе, получаем из (6)

$$|k| = 1/\mathbf{I}.$$

Поэтому в направлении данной точки индикатрисы модуль нормальной кривизны тем больше, чем ближе эта точка к точке касания. Если в каком-то направлении нормальная кривизна равна нулю, то в этом направлении индикатриса уходит на бесконечность.

При $LN - M^2 > 0$ индикатриса Дюпена является эллипсом, а соответствующая точка поверхности называется *эллиптической.* Знак кривизны постоянен.

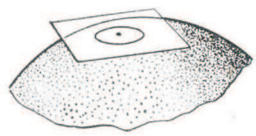

Рис. 3: Эллиптическая точка.

При $LN - M^2 < 0$ индикатриса Дюпена состоит из двух гипербол

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = \pm 1 \tag{7}$$

с общими асимптотами. В направлении асимптот кривизна равна нулю, а в направлении действительных осей обеих гипербол она принимает два раза максимальное положительное и два раза минимальное отрицательное значение. Соответствующая точка поверхности называется *гиперболической.*

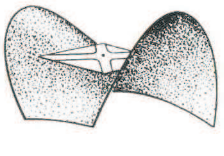

Рис. 4: Гиперболическая точка.

Пусть теперь $LN - M^2 = 0$, $L^2 + N^2 \neq 0$. Тогда $LN = M^2 \geqslant 0$ и левая часть уравнения (7) является с точностью до знака полным квадратом $(\sqrt{|L|}x \pm \sqrt{|N|}y)^2$, уравнение (7) имеет решения только при одном из знаков правой части (а, значит, вторая квадратичная форма в этом случае знакопостоянна) и индикатриса Дюпена состоит из двух параллельных прямых $\sqrt{|L|}x \pm \sqrt{|N|}y = \pm 1$.[3] В направлении этих прямых нормальная кривизна $k$ равна нулю, а в перпендикулярном направлении достигает наибольшего (по абсолютной величине) значения, сохраняя все время один и тот же знак. Соответствующая точка поверхности называется *параболической.*

[2] Дюпен Франсуа Пьер Шарль (1784-1873) – французский математик.

[3] Слева знак фиксирован либо $+$, либо $-$, а справа знак произволен.

В каждом из трех случаев кривизна дважды достигает своего наибольшего $k_1$ и дважды наименьшего $k_2$ значения в перпендикулярных направлениях. Эти значения называются *главными кривизнами*, а соответствующие им направления в касательной плоскости – *главными направлениями*. Для эллиптической точки $k_1 k_2 > 0$, для гиперболической $k_1 k_2 < 0$, а для параболической $k_1 \neq 0, k_2 = 0$.

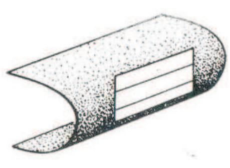

Рис. 5: Параболическая точка.

На эллипсоиде, двухполостном гиперболоиде и эллиптическом параболоиде все точки эллиптические.

Если же $L = 0$, $N = 0$ (и потому $M = 0$), то кривизна $k$ тождественно по направлению равна нулю (а индикатриса Дюпена не определена). Такая точка называется *точкой уплощения* поверхности.

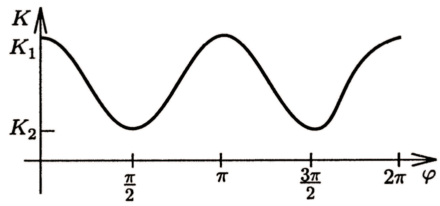


Рис. 6: Зависимость кривизны от направления.

Как известно из курса линейной алгебры, две квадратичные формы, одна из которых положительно определена, одновременно приводятся линейной заменой координат к диагональному виду. Поскольку первая квадратичная форма $\mathbf{I}(u, v)$ положительно определена, мы можем привести в фиксированной точке $M_0$ поверхности $\Gamma$ к диагональному виду формы $\mathbf{I}(u, v)$ и $\mathbf{II}(u, v)$:

$$\mathbf{I}|_{M_0} = d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2,\ \mathbf{II}|_{M_0} = k_1 d\tilde{u}^2 + k_2 d\tilde{v}^2.$$

Тогда

$$k|_{M_0} = \frac{k_1 d\tilde{u}^2 + k_2 d\tilde{v}^2}{d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2},\ k_1 \geqslant k_2.$$

Поскольку $d\tilde{u}$, $d\tilde{v}$ суть декартовы координаты в касательной плоскости, то вводя полярные координаты $\rho, \phi$ по формулам $d\tilde{u} = \rho \cos\varphi$, $d\tilde{v} = \rho \sin\varphi$ в этой плоскости, получаем следующее значение нормальной кривизны в направлении единичного вектора $\mathbf{t}$:

$$k(\mathbf{t}) = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi,$$

где $\varphi$ – угол между вектором $\mathbf{t}$ и направлением, в котором кривизна равна $k_1$. Эта формула называется *формулой Эйлера*[4] *для кривизны.*

Обратная к кривизне величина называется *радиусом кривизны* $R := 1/k$. Если в некоторой точке поверхности $k_1 = k_2$, то эта точка называется *омбилической*. Все точки сферы являются омбилическими.

[4]Эйлер Леонард (1707-1783) – швейцарский математик, длительное время работавший и умерший в Санкт-Петербурге.

## 1.3 Вычисление главных кривизн и теорема Гаусса.

Поскольку $k_1$ – максимальная, а $k_2$ – минимальная величина функции

$$\frac{\mathbf{II}(du, dv)}{\mathbf{I}(du, dv)},$$

причем $\mathbf{I}(du, dv) > 0$ при $(du, dv) \neq 0$, то справедливо неравенство

$$\mathbf{II}(du, dv) - k_2\mathbf{I}(du, dv) \geqslant 0,$$

причем его левая часть достигает нулевого значения в некоторой точке $((du)_2, (dv)_2) \neq 0$. Аналогично,

$$\mathbf{II}(du, dv) - k_1\mathbf{I}(du, dv) \leqslant 0,$$

причем равенство достигается в некоторой точке $((du)_1, (dv)_1) \neq 0$.

Но легко видеть (приводя квадратичную форму к диагональному виду или рассматривая квадратичный трехчлен, получающийся из нее делением на квадрат одной из переменных), что квадратичная форма от двух переменных тогда и только тогда всюду неположительна или неотрицательна и хотя бы в одной точке $(du, dv) \neq (0, 0)$ равна нулю, когда ее ранг меньше двух. Поэтому $k_1$ и $k_2$ суть корни квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. уравнения

$$(EG - F^2)k^2 - (EN + GL - 2FM)k + LN - M^2 = 0. \tag{8}$$

**Определение 6.** *Число $K = k_1k_2$ называется полной (или гауссовой) кривизной, а число $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ – средней кривизной.*

Из уравнения (8) по формулам Виета видно, что

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},\ H = \frac{1}{2}\frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}. \tag{9}$$

**Пример 6.** *Для сферы радиуса $R$ имеем (тут мы рассматриваем параметризацию, несколько отличную от параметризации сферы из при-*

*мера 2)*

$$\mathbf{r} = R\sin u\cos v\,\mathbf{i} + R\sin u\sin v\,\mathbf{j} + R\cos u\,\mathbf{k},\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant u \leqslant \pi,$$
$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \sin u\cos v\,\mathbf{i} + \sin u\sin v\,\mathbf{j} + \cos u\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{r}_{uu} = -\mathbf{r},\ \mathbf{r}_{vv} = -R\sin u\cos v\,\mathbf{i} - R\sin u\sin v\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}_{uv} = -R\cos u\sin v\,\mathbf{i} + R\cos u\cos v\,\mathbf{j},$$
$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) = (-\mathbf{r}, \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}) = -|\mathbf{r}| = -R,$$
$$N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) = -R\sin^2 u\cos^2 v - R\sin^2 u\sin^2 v = -R\sin^2 u,$$
$$M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = -R\cos u\sin u\cos v\sin v + R\sin u\cos u\sin v\cos v = 0,$$
$$\mathbf{II} = -R(du^2 + \sin^2 u dv^2),$$
$$E = \mathbf{r}_u^2 = R^2,\ F = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = 0,\ G = \mathbf{r}_v^2 = R^2\sin^2 u,$$
$$\mathbf{I} = R^2(du^2 + \sin^2 u dv^2),\ k = \frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}} = -\frac{1}{R},\ K = k^2 = \frac{1}{R^2}.$$

**Пример 7.** *Для поверхности вращения, рассмотренной в примере 1, получаем*

$$[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = x(v)z'(v)\cos u\,\mathbf{i} + x(v)z'(v)\sin u\,\mathbf{j} - x(v)x'(v)\,\mathbf{k},$$
$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} = \frac{z'(v)\cos u\,\mathbf{i} + z'(v)\sin u\,\mathbf{j} - x'(v)\mathbf{k}}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}},$$
$$\mathbf{r}_{uu} = -x(v)\cos u\,\mathbf{i} - x(v)\sin u\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}_{uv} = -x'(v)\sin u\,\mathbf{i} + x'(v)\cos u\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{r}_{vv} = x''(v)\cos u\,\mathbf{i} + x''(v)\sin u\,\mathbf{j} + z''(v)\,\mathbf{k},$$
$$L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) = -\frac{x(v)z'(v)}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}},\ M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = 0,$$
$$N = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) = \frac{x''(v)z'(v) - z''(v)x'(v)}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{x'(v)^2 + z'(v)^2}}\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v) \end{vmatrix},$$
$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{z'(v)}{x(v)(x'(v)^2 + z'(v)^2)^2}\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v) \end{vmatrix}.$$

В формуле (9) полная кривизна зависит от коэффициентов первой и второй квадратичных форм. Однако, как обнаружил Гаусс[5], на самом деле полная кривизна целиком определяется первой квадратичной формой,

[5]Гаусс Карл Фридрих (1777-1855) – немецкий математик, внесший фундаментальный вклад в различные разделы математики.

а именно, выражается через коэффициенты $E, G, F$ и их производные в данной точке.

*Доказательство.* Из формулы (9) с учетом равенства

$$\mathbf{n} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{|[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]|} = \frac{[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

имеем:

$$\begin{aligned} K &= \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n})(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) - (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n})^2}{EG - F^2} = \\ &= \frac{(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2}{(EG - F^2)^2} =: \frac{\alpha}{(EG - F^2)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Таким образом, нам нужно выразить через коэффициенты $E, G, F$ величину $\alpha$. Для произвольных векторов $\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \in \mathbb{E}^3$, $i = 1, 2$ имеет место формула

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{a}_1, \mathbf{c}_2) \\ (\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{b}_1, \mathbf{c}_2) \\ (\mathbf{c}_1, \mathbf{a}_2) & (\mathbf{c}_1, \mathbf{b}_2) & (\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

которую легко доказать, если представить левую часть в виде произведения определителей и заменить его на определитель произведения.

С помощью (11) мы получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)(\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)^2 &= \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv}) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{uv}) & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv}) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_v) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - \mathbf{r}_{uv}^2 & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{vv}) & E & F \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \\ - \begin{vmatrix} 0 & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u) & (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) \\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_{uv}) & E & F \\ (\mathbf{r}_v, \mathbf{r}_{uv}) & F & G \end{vmatrix}&. \end{aligned} \tag{12}$$

Дифференцируя по $u$ и $v$ выражения

$$\mathbf{r}_u^2 = E,\ (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) = F,\ \mathbf{r}_v^2 = G,$$

получим

$$\begin{gathered} (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_u) = \frac{1}{2} E_u,\ (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_u) = \frac{1}{2} E_v,\ (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_v) = \frac{1}{2} G_v, \\ (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) = \frac{1}{2} G_u,\ (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) = F_u - \frac{1}{2} E_v,\ (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{r}_u) = F_v - \frac{1}{2} G_u. \end{gathered}$$

Это дает выражение всех элементов определителей из (12) кроме элемента $(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - \mathbf{r}_{uv}^2$ через коэффициенты $E, F, G$. Для получения выражения этого элемента через коэффициенты $E, F, G$ продифференцируем выражение $(\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_v) = F_u - \frac{1}{2}E_v$ по $v$, а выражение $(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_v) = \frac{1}{2}G_u$ – по $u$, и вычтем результаты. Получим

$$(\mathbf{r}_{uuv}, \mathbf{r}_v) + (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - (\mathbf{r}_{uvu}, \mathbf{r}_v) - (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vu}) = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{vv}) - \mathbf{r}_{uv}^2 = \\ = F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}.$$

Подставляя эти результаты в формулы (12) и (10), получаем

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}(E_{vv} + G_{uu}) & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \\ - \frac{1}{(EG - F^2)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}. \qquad (13)$$

□

В силу определения изометрии отсюда получается *theorema egregium («блистательная» теорема)* Гаусса.

**Теорема 1.** *Полная (гауссова) кривизна поверхности не меняется при ее изометриях, т.е. изометричные поверхности в соответствующих друг другу точках имеют одинаковую полную кривизну.*

Из данной теоремы получается, что никакую сколь угодно малую часть сферы нельзя изометрично отобразить на плоскость. Этот факт является весьма прискорбным для картографов, поскольку он показывает неизбежность искажения расстояний на географических картах. Наиболее употребительны карты, в которых минимальны искажения расстояний вблизи земного экватора и велики искажения вблизи полюсов.

Кроме того, из данной теоремы следует, что гиперболический и эллиптический тип точки поверхности целиком определяется ее первой квадратичной формой, а именно, при $K(M) > 0$ точка $M$ эллиптическая, а при $K(M) < 0$ точка $M$ гиперболическая.

## 1.4 Линии кривизны и канонический репер поверхности

Главные направления в касательной плоскости к точке $M_0$ поверхности $\Gamma$ определяются значениями $du, dv$, удовлетворяющими вырожденной однородной системе

$$\begin{pmatrix} L-k_iE & M-k_iF \\ M-k_iF & N-k_iG \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=0,\ i=1,2.$$

Это следует из того, что столбец $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ должен быть собственным вектором матрицы квадратичной формы, отвечающей нулевому собственному значению. Отсюда

$$(L-k_iE)du+(M-k_iF)dv=0,$$
$$(M-k_iF)du+(N-k_iG)dv=0,$$

а значит

$$k_i=\frac{Ldu+Mdv}{Edu+Fdv}=\frac{Mdu+Ndv}{Fdu+Gdv}.$$

Тем самым

$$(LF-ME)du^2+(GL-NE)dudv+(MG-FN)dv^2=0. \qquad (14)$$

Уравнение (14) можно записать также в виде

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix}=0. \qquad (15)$$

Кривые на поверхности Γ, касающиеся в каждой точке главных направлений, называются *линиями кривизны*. Их существование можно доказать средствами теории дифференциальных уравнений. Поскольку в каждой точке поверхности есть два ортогональных главных направления, то линии кривизны образуют два взаимно ортогональных семейства линий на поверхности Γ, причем линии, принадлежащие одному семейству, не пересекаются.

Определим на поверхности Γ новые (вообще говоря, локальные) координаты в окрестности некоторой точки $M_0$. Для этого рассмотрим пару линий кривизны $L_1, L_2$, проходящих через точку $M_0$. На линии $L_1$ определим строго монотонную функцию $\tilde{u}$ так, что $\tilde{u}(M_0)=0$, а на другой линии $L_2$ – строго монотонную функцию $\tilde{v}$ так, что $\tilde{v}(M_0)=0$. Считая функцию $\tilde{u}$ постоянной на линиях второго семейства, продолжим ее в некоторую окрестность $U_1$ точки $M_0$ (не факт, что линии второго семейства, ортогональные линии $L_1$, заполняют всю поверхность Γ). Аналогично, продолжим функцию $\tilde{v}$ в некоторую окрестность $U_2$ точки $M_0$, считая ее постоянной на линиях первого семейства.

Таким образом, функции $\tilde{u}, \tilde{v}$ являются ортогональными координатами на окрестности $U := U_1 \cap U_2$ точки $M_0$, а линии кривизны являются соответствующими им координатными линиями. Окрестность $U$ может совпадать, а может не совпадать со всей поверхностью Γ. Далее, не оговаривая это особо, будем проводить все вычисления в окрестности $U$.

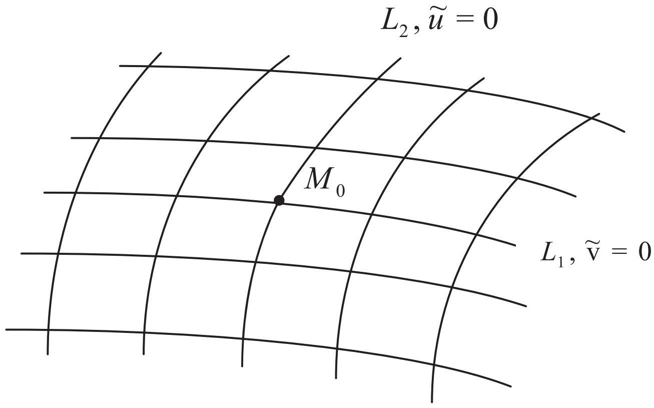


Рис. 7: Линии кривизны в окрестности точки $M_0$.

Для упрощения будем обозначать далее координаты $\tilde{u}, \tilde{v}$ через $u, v$. В этих координатах, по построению, и первая и вторая квадратичные формы диагональны, а значит $F = M = 0$. Пусть $\mathbf{e}_1$ – единичный вектор, касающийся линий $v = \mathrm{const}$, $\mathbf{e}_2$ – единичный вектор, касающийся линий $u = \mathrm{const}$ на $U$, а $\mathbf{e}_3 := \mathbf{n} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. Поскольку эти вектора естественно связаны с поверхностью Γ, то подвижный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называется *каноническим репером* поверхности Γ.

Легко видеть, что $\mathbf{r}_u = a\mathbf{e}_1$, $\mathbf{r}_v = b\mathbf{e}_2$, где $a := |\mathbf{r}_u|$, $b := |\mathbf{r}_v|$, $E = a^2, G = b^2$. Разложим производные векторов канонического репера по самому этому реперу. Ввиду $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = 1$, $i = 1, 2, 3$, получим $\mathbf{e}_{iu} \perp \mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{iv} \perp \mathbf{e}_i$. Итак:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{1u} &= \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_{2u} &= \alpha_{21}\mathbf{e}_1 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_{3u} &= \alpha_{31}\mathbf{e}_1 + \alpha_{32}\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

В силу $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \equiv 0$, получаем $0 = (\mathbf{e}_{1u}, \mathbf{e}_2) + (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_{2u}) = \alpha_{12} + \alpha_{21} \Rightarrow \alpha_{21} = -\alpha_{12}$. Аналогично, $\alpha_{31} = -\alpha_{13}$, $\alpha_{32} = -\alpha_{23}$.

Таким образом, получим разложение производных векторов канонического репера в более простом виде:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{1u} &= \alpha_{12}\mathbf{e}_2 + \alpha_{13}\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_{1v} = \beta_{12}\mathbf{e}_2 + \beta_{13}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_{2u} &= -\alpha_{12}\mathbf{e}_1 + \alpha_{23}\mathbf{e}_3, \ \mathbf{e}_{2v} = -\beta_{12}\mathbf{e}_1 + \beta_{23}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_{3u} &= -\alpha_{13}\mathbf{e}_1 - \alpha_{23}\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_{3v} = -\beta_{13}\mathbf{e}_1 - \beta_{23}\mathbf{e}_2.
\end{aligned}$$

Оставшиеся коэффициенты $\alpha_{ij}, \beta_{ij}$ можно выразить через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Действительно, дифференцируя равенство $\mathbf{r}_u = a\mathbf{e}_1$ по $v$, получим

$$\mathbf{r}_{uv} = a_v\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_{1v} = a_v\mathbf{e}_1 + a\beta_{12}\mathbf{e}_2 + a\beta_{13}\mathbf{e}_3,$$

откуда ввиду $M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{e}_3) = 0$ получаем $\beta_{13} = 0$. Дифференцируя равенство $\mathbf{r}_v = b\mathbf{e}_2$ по $u$, получим

$$\mathbf{r}_{vu} = b_u\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_{2u} = b_u\mathbf{e}_2 - b\alpha_{12}\mathbf{e}_1 + b\alpha_{23}\mathbf{e}_3.$$

Отсюда, $\alpha_{23} = 0$. Приравнивая $\mathbf{r}_{uv}$ и $\mathbf{r}_{vu}$, получим

$$a_v = -b\alpha_{12},\ a\beta_{12} = b_u,\ \text{т.е. } \alpha_{12} = -a_v/b,\ \beta_{12} = b_u/a.$$

Наконец, $\mathbf{r}_{uu} = a_u\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_{1u} = a_u\mathbf{e}_1 + a\alpha_{12}\mathbf{e}_2 + a\alpha_{13}\mathbf{e}_3$, откуда $L = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{e}_3) = a\alpha_{13}$, т.е. $\alpha_{13} = L/a$. Аналогично, $\beta_{23} = N/b$.

Итак, мы получаем *деривационные формулы* канонического репера

$$\begin{gathered}
\mathbf{r}_u = a\mathbf{e}_1,\ \mathbf{r}_v = b\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{e}_{1u} = -\frac{a_v}{b}\mathbf{e}_2 + \frac{L}{a}\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_{1v} = \frac{b_u}{a}\mathbf{e}_2,\\
\mathbf{e}_{2u} = \frac{a_v}{b}\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_{2v} = -\frac{b_u}{a}\mathbf{e}_1 + \frac{N}{b}\mathbf{e}_3,\\
\mathbf{e}_{3u} = -\frac{L}{a}\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_{3v} = -\frac{N}{b}\mathbf{e}_2.
\end{gathered}$$

Однако, поскольку локально поверхность задается одной функцией двух переменных, то между четырьмя функциями $a, b, L, M$ должны существовать три соотношения. Для их нахождения вычислим смешанные частные производные векторов репера и приравняем их:

$$\begin{gathered}
(\mathbf{e}_{1u})_v = -\left(\frac{a_v}{b}\right)_v\mathbf{e}_2 - \frac{a_v}{b}\left(-\frac{b_u}{a}\mathbf{e}_1 + \frac{N}{b}\mathbf{e}_3\right) + \left(\frac{L}{a}\right)_v\mathbf{e}_3 - \frac{LN}{ab}\mathbf{e}_2 =\\
= \frac{a_v b_u}{ab}\mathbf{e}_1 - \left(\left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \frac{LN}{ab}\right)\mathbf{e}_2 + \left(\left(\frac{L}{a}\right)_v - \frac{a_v N}{b^2}\right)\mathbf{e}_3,\\
(\mathbf{e}_{1v})_u = \left(\frac{b_u}{a}\right)_u\mathbf{e}_2 + \frac{b_u a_v}{ab}\mathbf{e}_1.
\end{gathered}$$

Из тождества $(\mathbf{e}_{1u})_v = (\mathbf{e}_{1v})_u$, получаем

$$\left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \left(\frac{b_u}{a}\right)_u = -\frac{LN}{ab}, \tag{16}$$

$$\frac{a_v N}{b^2} = \left(\frac{L}{a}\right)_v. \tag{17}$$

Перестановка координат $u \leftrightarrow v$ соответствует перестановке $a \leftrightarrow b$, $L \leftrightarrow N$. Поэтому при этой перестановке формула (17) дает уравнение

$$\frac{b_u L}{a^2} = \left(\frac{N}{b}\right)_u, \tag{18}$$

которое можно получить и из тождества $(\mathbf{e}_{2u})_v = (\mathbf{e}_{2v})_u$. Последнее возможное тождество $(\mathbf{e}_{3u})_v = (\mathbf{e}_{3v})_u$ для вторых смешанных производных опять приводит к уравнениям (17) и (18).

Для рассматриваемой системы координат из формулы (9) получим

$$K = \frac{LN}{EG} = \frac{LN}{a^2 b^2};$$

поэтому уравнение (16) имеет вид

$$K = -\frac{1}{ab}\left(\left(\frac{a_v}{b}\right)_v + \left(\frac{b_u}{a}\right)_u\right). \tag{19}$$

Мы доказали, тем самым, еще раз, что полная кривизна поверхности выражается через коэффициенты первой квадратичной формы. Прямым вычислением можно проверить, что для рассматриваемых координат уравнение (13) совпадает с (19). Уравнение (13) или (19) называется *уравнением Гаусса*, а уравнения (17) и (18) – *уравнениями Петерсона-Майнарди-Кодацци*[6] (П-М-К).

Уравнения П-М-К в произвольных координатах имеют следующий вид (см., например, [4])

$$2(EG - F^2)(L_v - M_u) - (EN + GL - 2FM)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0,$$

$$2(EG - F^2)(M_v - N_u) - (EN + GL - 2FM)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0.$$

При выводе деривационных формул для канонического репера, мы видели, что условие $M = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) = 0$, характеризующее линии кривизны среди других пар семейств ортогональных линий, эквивалентно тому, что на этих линиях $\mathbf{n}_u \| \mathbf{e}_1$ и $\mathbf{n}_v \| \mathbf{e}_2$ соответственно, что можно записать единообразно в виде $d\mathbf{n} \| d\mathbf{r}$. Поэтому линии кривизны легко угадываются на поверхностях вращения, рассмотренных в примерах 1 и 7 – это

[6] Петерсон Карл Михайлович (1828-1881) – латышский и российский математик, Майнарди Гаспаре (1800–1879) и Кодацци Дельфино (1824–1873) – итальянские математики.

параллели (сечения поверхности плоскостями $z = \mathrm{const}$) и меридианы (сечения поверхности плоскостями, содержащими ось $z$).

### 1.5 Материал для семинарских занятий

*Псевдосферой* называется поверхность вращения кривой $x = R\sin v$, $z = \pm(\ln \operatorname{tg}\frac{v}{2} + \cos v)$, $0 < v \leqslant \frac{\pi}{2}$ (*трактриссы*) вокруг оси $z$. Пользуясь формулами пособия, найти полную кривизну псевдосферы ($K = -1/R^2$), а также полные ($K_c = -\operatorname{ch}^{-4} z$, $K_h = -(1 + v^2)^{-2}$) и средние кривизны катеноида и геликоида ($H_c = H_h = 0$) (см. также [4] с. 68, 81, 84-87). Заметим, что полные кривизны катеноида и геликоида в соответствующих точках совпадают, как и должно быть по теореме 1.

## 2 Бесконечные произведения

Аналогично числовым рядам можно рассматривать и формальные бесконечные произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} p_k = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n \ldots, \; p_k \in \mathbb{R}, \tag{20}$$

для которых, подобно частичным суммам для рядов, определяются частичные произведения $P_n = \prod_{k=1}^{n} p_k$.

**Определение 7.** *Если последовательность частичных произведений $P_n$ сходится к конечной или бесконечной величине $P$ при $n \to \infty$, то эта величина называется значением бесконечного произведения (20). Если эта величина конечна и $P \neq 0$, то бесконечное произведение (20) называется сходящимся. Если же $P = 0$, то бесконечное произведение (20) называется расходящимся к нулю.*

Требование $P \neq 0$ для сходимости бесконечного произведения, хотя и идет вразрез с терминологией для бесконечных рядов, тем не менее общепринято, поскольку облегчает формулировку многих теорем. Если одно из чисел $p_k = 0$, то $P = 0$. В дальнейшем, мы всегда будем считать все $p_k \neq 0$.

Подобно изучению сходимости рядов, изучение сходимости бесконечных произведений является лишь еще одним подходом к понятию предела.

**Пример 8.** *Рассмотрим бесконечное произведение*

$$\prod_{k=2}^{\infty}(1-\frac{1}{k^2}).$$

*Поскольку*

$$p_{k-1}\cdot p_k\cdot p_{k+1}=\left(1-\frac{1}{(k-1)^2}\right)\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=$$
$$=\frac{(k-2)k}{(k-1)^2}\cdot\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\cdot\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}=\frac{k-2}{k-1}\cdot\frac{k+2}{k+1},$$

*то* $P_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}$.

Величина

$$\pi_n:=\prod_{k=n+1}^{\infty}p_k \qquad (21)$$

называется *остаточным произведением* бесконечного произведения (20).

Сформулируем следующие утверждения про бесконечные произведения, во многом аналогичные соответствующим утверждениям про бесконечные ряды.

1. Поскольку частичные произведения бесконечного произведения (21) отличаются лишь постоянным множителем от частичных произведений бесконечного произведения (20), то сходимость (расходимость) бесконечного произведения (20) влечет сходимость (расходимость) бесконечного произведения (21) и наоборот. Это показывает, что конечное число ненулевых множителей не влияет на сходимость бесконечного произведения.

2. Если бесконечное произведение (20) сходится, то из равенства $\pi_n=P/P_n$ следует, что $\pi_n\to 1$.

3. Если бесконечное произведение (20) сходится, то из равенства $p_n=P_n/P_{n-1}$ следует, что $p_n\to 1$. Это – аналог необходимого признака сходимости рядов. Поэтому у сходящихся бесконечных произведений все сомножители, начиная с некоторого, положительны. Далее, мы будем считать, что все $p_k>0$.

4. Рассмотрим ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln p_k. \tag{22}$$
Поскольку частичные суммы $L_n$ данного ряда связаны с частичными произведениями бесконечного произведения (20) равенством $L_n = \ln P_n$, то сходимость ряда (22) эквивалентна сходимости бесконечного произведения (20) (тут мы пользуемся оговоренным выше условием $P \neq 0$).

5. Положим $p_n = 1 + a_n$. Если $a_n > 0$ или $a_n < 0$ для всех достаточно больших $n$, то сходимость бесконечного произведения
$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k) \tag{23}$$
эквивалентна сходимости ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \tag{24}$$
Действительно, для сходимости произведения (23), равно как и ряда (24), необходимо равенство $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Предположим, что это равенство выполнено, тогда
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln(1 + a_k)}{a_k} = 1. \tag{25}$$
В таком случае, ввиду того, что члены рядов (24) и (22) сохраняют определенный знак, начиная с некоторого номера, по признаку сравнения рядов в предельной форме эти ряды сходятся и расходятся одновременно.

6. Если вместе с рядом (24) сходится и ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \tag{26}$$
то бесконечное произведение (23) сходится независимо от знаков $a_k$. Действительно, пользуясь асимптотической формулой
$$\ln(1 + a_k) = a_k - \frac{1}{2} a_k^2 + o(a_k^2),$$

получим

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k-\ln(1+a_k)}{a_k^2}=\frac{1}{2}. \tag{27}$$

Поэтому, по признаку сравнения рядов в предельной форме, сходимость ряда (26) влечет за собой сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-\ln(1+a_k)), \tag{28}$$

знакопостоянного, начиная с некоторого номера, а так как ряд (24) сходится, то сходится и ряд (22), что влечет сходимость бесконечного произведения (23).

Наоборот, если ряд (24) сходится, а ряд (26) расходится, то бесконечное произведение (23) расходится независимо от знаков $a_k$, причем к нулю. Этот факт мы покажем в следующем пункте.

7. Из связи между частичной суммой ряда (22) и частичным произведением бесконечного произведения (20) сразу следует, что бесконечное произведение (20) расходится к нулю, тогда и только тогда, когда ряд (22) расходится к $-\infty$.

   В частности, это будет так, если $-1 < a_k < 0$ и ряд (24) расходится или, независимо от знаков $a_k$, если ряд (24) сходится, но расходится ряд (26).

   Действительно, если $-1 < a_k < 0$ и ряд (24) расходится, то он расходится к $-\infty$.

   Если при этом $a_k \to 0$, то в силу (25) расходится и ряд (22), а поскольку $\ln(1+a_k) < 0$, то ряд (22) расходится к $-\infty$. Тогда, как показано выше, бесконечное произведение (20) расходится к нулю.

   Если же при этом $a_k \not\to 0$, то $0 > \ln p_k = \ln(1+a_k) \not\to 0$ и тем более ряд (22) расходится к $-\infty$. Тогда опять бесконечное произведение (20) расходится к нулю.

   Пусть теперь ряд (24) сходится, но расходится ряд (26). Тогда $a_k \to 0$ и в силу (27) ряд (28) расходится к $+\infty$ будучи знакоположительным при достаточно больших $k$. Но тогда, в силу сходимости ряда (24), ряд (22) расходится к $-\infty$, что опять влечет расходимость бесконечного произведения (20) к нулю.

8.

**Определение 8.** *Бесконечное произведение (20) сходится абсолютно, если абсолютно сходится ряд (22), если же этот ряд сходится условно, то и бесконечное произведение (20) также сходится условно.*

Из свойств абсолютно сходящихся рядов и рассмотренной выше связи между рядами и бесконечными произведениями сразу вытекает, что абсолютно сходящиеся бесконечные произведения обладают переместительным свойством, а условно сходящиеся не обладают.

Дословно повторяя рассуждения п. 5, легко показать, что для абсолютной сходимости бесконечного произведения (20) необходима и достаточна абсолютная сходимость ряда (24).

**Пример 9.** *Бесконечное произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k^x}\right),\ (x>0)$$

*сходится при $x>1$ и расходится при $x\leqslant 1$ в соответствии с таким же поведением ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$ (п. 5).*

**Пример 10.** *Бесконечное произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k^x}\right),\ (x>0)$$

*сходится при $x>1$ (п. 5) и расходится к нулю при $0<x\leqslant 1$ (п. 7).*

**Пример 11.** *Бесконечное произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}\right),\ (x>0)$$

*сходится при $x>1/2$: именно, при $x>1$ оно абсолютно сходится (п. 8); при $1/2<x\leqslant 1$ оно сходится условно, поскольку сходятся ряды $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2x}}$, но ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^x}$ расходится (пп. 6, 8). Наконец, при $0<x\leqslant 1/2$ рассматриваемое бесконечное произведение расходится к нулю, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2x}}$ расходится (п. 7).*

**Пример 12.** *Рассмотрим пример бесконечного произведения, интересный для теории чисел. Если перенумеровать простые целые числа в* *порядке возрастания* $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7\ldots$, *то при вещественных* $x > 1$ *имеет место формула Эйлера*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} =: \zeta(x), \tag{29}$$

*где* $\zeta(x)$ – *дзета функция Римана.*[7]

*Действительно, по формуле суммы геометрической прогрессии справедливо равенство*

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = \frac{1}{p_k^x} + \frac{1}{(p_k^x)^2} + \cdots + \frac{1}{(p_k^x)^m} + \ldots.$$

*Если перемножить конечное число таких рядов, отвечающих всем простым числам, не превосходящим данного натурального числа* $N$, *то произведение окажется равным*

$$P_x^{(N)} = \prod_{p_k \leqslant N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} = {\sum_{n=1}^{\infty}}' \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + {\sum_{n=N+1}^{\infty}}' \frac{1}{n^x}, \tag{30}$$

*где штрих у знака суммы означает, что суммирование распространяется не на все натуральные числа, а лишь на те из них (не считая единицы), которые в своем разложении на простые множители содержат только простые числа, не превосходящие числа* $N$. *Отсюда*

$$0 < P_x^{(N)} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} = {\sum_{n=N+1}^{\infty}}' \frac{1}{n^x} \leqslant \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \to 0, \text{ при } N \to \infty.$$

*Переходя к пределу при* $N \to \infty$, *получаем равенство (29).*

*При* $x = 1$ *равенство (30) еще справедливо, поэтому*

$$P_1^{(N)} = \prod_{p_k \leqslant N} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k^x}} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \to \infty \text{ при } N \to \infty.$$

---

[7] Хотя Эйлер и другие математики рассматривали дзета функцию $\zeta(x)$ как функцию вещественного переменного, но только Риман рассмотрел ее аналитическое продолжение в комплексную область и доказал, что она имеет однозначное продолжение, единственный полюс первого порядка в точке $x = 1$, значение $\zeta(0) = -\dfrac{1}{2}$ и нули в точках $x = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, называемые тривиальными нулями. Наиболее старая трудная нерешенная проблема в математике состоит в доказательстве (или опровержении) *гипотезы Римана*, которая утверждает, что все нули дзета функции $\zeta(x)$, отличные от тривиальных, лежат на оси $\operatorname{Re} x = \dfrac{1}{2}$. Численные расчеты подтверждают эту гипотезу, но строгого доказательства до сих пор нет. Доказательство гипотезы Римана является одной из шести Millennium prize problem Института Клея (финансируемого американским филантропом Ландоном Клеем) оцененных в 1 млн. долларов каждая.

*Значит, произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}} \tag{31}$$

*расходится к* $+\infty$.

*Отсюда следует доказательство Эйлера бесконечности множества простых чисел (не первое, не самое простое и далеко не единственное, но, тем не менее, устанавливающее связь между, на первый взгляд, далекими областями: теорией чисел и анализом). Именно, если бы простых целых чисел было бы конечное число, то произведение*

$$P_1 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{p_k}}$$

*было бы конечным и потому сходящимся, но оно расходится, а потому множество простых целых чисел бесконечно.*

*Кроме того, раз произведение (31) расходится к* $+\infty$, *то произведение*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

*расходится к нулю, а потому, в силу п. 5, ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k}$$

*расходится к бесконечности, что оценивает сверху скорость роста простых чисел.*

*На самом деле известно, что* $p_k \sim k \ln k$. *Большие исследования велись в направлении получения дальнейших членов этого асимптотического разложения.*

Бесконечные произведения используются в ТФКП при разложении целых функций в произведение сомножителей, соответствующих их нулям. Так, справедлива формула

$$\sin z = z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{z^2}{n^2\pi^2}\right),\ z \in \mathbb{C},$$

доказанная еще Эйлером.

## 2.1 Материал для семинарских занятий

[5], раздел V, параграф 9.

**3051.** Доказать

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Поскольку

$$p_n p_{n+1}=\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{(n-1)}{n}\frac{n+2}{n+1},$$

то

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{2}\frac{n+1}{n}\to\frac{1}{2}.$$

Аналогично решаются задачи **3052, 3053, 3061, 3062, 3063, 3067**.

**3064.**

$$\prod_{n=1}^{\infty}a^{\frac{(-1)^n}{n}}=a^{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}}=a^{-\ln 2}.$$

**3065.** а) Из сходимости произведений $\prod_{n=1}^{\infty}p_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty}q_n$ следует, в силу необходимого признака сходимости, что $p_n, q_n \to 1$ при $n\to\infty$. Поэтому $p_n+q_n\to 2$ и произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(p_n+q_n)$ расходится.

Сходимость произведений в пунктах б), в), г) следует из того, что соответствующие частичные произведения выражаются через частичные произведения исходных рядов.

**3066.** Поскольку бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}n$ расходится к бесконечности, то бесконечное произведение $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится к нулю.

Задачи **3068, 3069** рассмотрены выше в примерах 9 и 10.

Сходимость произведения **3070** при любом $p$ следует из асимптотики

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p=1-\frac{2p}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

и сходимости ряда $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Аналогично решаются задачи **3073-3081.**

Бесконечные произведения **3088, 3094, 3095** сходятся в силу п. 6, но абсолютно не сходятся в силу п. 8. Поэтому они сходятся условно.

Бесконечные произведения **3089, 3091, 3092** расходятся к нулю в силу п. 7.

Бесконечное произведение **3090** рассмотрено в примере 11.

Бесконечное произведение **3093** расходится в силу п. 3.

## Список литературы

[1] Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Часть II. 5-е изд. М. Физматлит, 2004. 464 с.

[2] Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. Изд. 3-е, М. Физматлит, 2002. 512 с.

[3] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах. 8-е изд. М.: Физматлит, 2003. 864 с.

[4] Постников М.М. Гладкие многообразия, М.: Наука, 1987, лекции 3-5.

[5] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Астрель, 2002.

[6] Щербаков Р.Н., Пичурин Л.Ф. Дифференциалы помогают геометрии. М. Просвещение, 1982; УРСС, 2010.