

ВАРИАНТ 3.

1. Исследуйте последовательность $f_n(x) = \frac{1}{\cos^2 x} (\operatorname{tg} x)^n$ на равномерную сходимость на интервалах а) $\left[0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right], \varepsilon > 0$, б) $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, в) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. **Совет:** используйте практический критерий.

Решение. Воспользуемся практическим критерием:

а) $\left[0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right]$ Предельная функция $f = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left[0, \frac{\pi}{4} - \varepsilon\right]} \left| \frac{1}{\cos^2 x} (\operatorname{tg} x)^n \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right)} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \varepsilon\right) \right)^n \right) = 0. \text{ Равномерно сходится.}$$

б) $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$. Предельная функция $f = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)} \left| \frac{1}{\cos^2 x} (\operatorname{tg} x)^n \right| = 2 \neq 0$. На интервале $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$

равномерной сходимости нет. Значит, её нет и на содержащем интервал отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

2. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}$ на равномерную сходимость на множестве $x \in \left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right], \varepsilon > 0$.

Решение. Как было показано на семинаре, $|S_n| = \left| \sum_{k=1}^n \cos 2kx \right| \leq \frac{1}{\sin^2 x}$. Значит, на отрезке

$\left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right]$ последовательность частичных сумм S_n равномерно ограничена числом $\frac{1}{\sin^2 \varepsilon}$.

Последовательность $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{x}}$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что она

монотонная. Рассмотрим отношение

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{x}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{x}} < 1 \text{ при всех } n \text{ и } x \in \left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right].$$

Согласно признаку Дирихле-Абеля, ряд равномерно сходится на отрезке $\left[\varepsilon; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Определите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} z^{4n}$ и исследуйте сходимость на границе круга. **Совет:** на границе круга сходимость $z = R \cdot e^{i\varphi}$, где R – радиус сходимости.

Решение. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(1+i)^n}{n} \right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|1+i|^n}{\sqrt[n]{n^n}} = 2; R = \frac{1}{2}$. На границе круга

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{4n} \cdot e^{i4n\varphi} = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{4k}}{4k} \left(\frac{1}{2}\right)^{4k} \cdot e^{i16k\varphi} + \frac{(\sqrt{2})^{4k-1} e^{i\frac{\pi}{4}(4k-1)}}{4k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{4k-1} e^{i(4k-1)\varphi} + \frac{(\sqrt{2})^{4k-3} e^{-i\frac{\pi}{4}(4k-3)}}{4k-3} \left(\frac{1}{2}\right)^{4k-3} e^{i(4k-3)\varphi} \right) = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k} \cdot e^{i16k\varphi} + \frac{1}{(4k-1)\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4k-1} e^{i(4k-1)\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{4k-3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4k-3} e^{i(4k-3)\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \end{aligned}$$

Ряды, составленные из последних двух слагаемых в скобках, сходятся абсолютно при всех φ .

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k} \cdot e^{i16k\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} (\cos 16k\varphi + i \sin 16k\varphi)$ сходится условно, согласно признаку

Дирихле-Абеля при всех значениях φ , кроме тех, для которых $16\varphi = 2\pi m$, то есть,

$$\varphi = \frac{\pi m}{8}, \quad m = 0, 1, \dots, 7, \text{ поскольку в этих точках } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k} \cdot e^{i16k\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k}.$$

4. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$, используя возможность почленного интегрирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ при $|x| < 1$

Решение. Обозначим $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = xS_1(x)$. Требуется найти $S\left(\frac{1}{3}\right)$.

Интегрируя ряд $S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ почленно, получаем $\int_0^x S_1(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. Откуда

$$S_1(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad S(x) = xS_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}. \text{ Тогда } S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{3}}{\left(1 - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

5. Разложите функцию $f(z) = \frac{1}{z(i-z)}$ в ряд Лорана в кольце $1 < |z+i| < 2$.

Решение.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(i-z)} = \frac{1}{iz} + \frac{1}{i(i-z)} = \frac{1}{i(z+i)+1} - \frac{1}{i(z+i-2i)} = \\ &= \frac{1}{i(z+i)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{i(z+i)}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{z+i}{2i} - 1} = \frac{1}{i(z+i)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{i(z+i)} \right)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z+i}{2i} \right)^n = \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} (-i)^n (z+i)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} i^n} (z+i)^n. \end{aligned}$$