

Тема 1. Множества точек пространства R^m .

1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение шаровой окрестности точки пространства R^m .
- 1.2. Сформулируйте определение прямоугольной окрестности точки пространства R^m .
- 1.3. Сформулируйте определение окрестности точки пространства R^m .
- 1.4. Сформулируйте определение внутренней точки множества D точек пространства R^m .
- 1.5. Сформулируйте определение изолированной точки множества D точек пространства R^m .
- 1.6. Сформулируйте определение граничной точки множества D точек пространства R^m .
- 1.7. Сформулируйте определение границы множества.
- 1.8. Сформулируйте определение открытого множества точек пространства R^m .
- 1.9. Сформулируйте определение замкнутого множества точек пространства R^m .
- 1.10. Сформулируйте определение предельной точки множества D точек пространства R^m .
- 1.11. Сформулируйте определение связного множества точек пространства R^m .
- 1.12. Сформулируйте определение прямой в пространстве R^m .
- 1.13. Сформулируйте определение непрерывной кривой в пространстве R^m .

2. Вопросы и задачи.

Замечание: Пустое множество считается одновременно открытым и замкнутым.

- 2.1. Докажите, что объединение любого числа открытых множеств является открытым множеством.
- 2.2. Докажите, что любая внутренняя точка множества является его предельной точкой.
- 2.3. Докажите, что граничная точка множества является либо предельной точкой, либо изолированной точкой этого множества.
- 2.4. Докажите, что граница сферы в пространстве R^m совпадает с самой сферой.
- 2.5. Приведите пример множества точек, которое является одновременно открытым и замкнутым.
- 2.6. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое не имеет внутренних точек.
- 2.7. Может ли множество, содержащее хотя бы одну свою граничную точку, быть открытым?
- 2.8. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого граничные.
- 2.9. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, все точки которого предельные.
- 2.10. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, которое совпадает со своей границей.
- 2.11. Приведите пример непустого множества точек на плоскости, для которого множество всех предельных точек не совпадает с множеством всех граничных точек.
- 2.12. Приведите пример непустого замкнутого множества точек на плоскости, которое не имеет ни одной предельной точки.
- 2.13. Докажите, что любая точка множества точек на плоскости, которая не является внутренней, является его граничной точкой.
- 2.14. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его предельной точкой.
- 2.15. Приведите пример множества, каждая граничная точка которого является его изолированной точкой.
- 2.16. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.
- 2.17. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$.

3. Задачи повышенной трудности.

- 3.1. Докажите, что дополнение к открытому множеству является замкнутым
- 3.2. Докажите, что дополнение к замкнутому множеству является открытым.
- 3.3. Докажите, что сфера в пространстве R^m является замкнутым множеством.
- 3.4. Докажите, что пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством. Верно ли это для любого числа открытых множеств?
- 3.5. Докажите, что объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли это для любого числа замкнутых множеств?
- 3.6. Докажите, что пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.
- 3.7. Найдите все граничные точки множества точек на плоскости $\left\{ \left(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n} \right), n \in N \right\}$.
- 3.8. Найдите все предельные точки множества точек на плоскости $\left\{ \left(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n} \right), n \in N \right\}$.
- 3.9. Найдите все множества точек на плоскости, которые не имеют граничных точек.

Тема 2. Последовательности точек пространства R^m .

1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение ограниченной последовательности точек пространства R^m .
- 1.2. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства R^m .
- 1.3. Сформулируйте определение предельной точки последовательности точек пространства R^m .
- 1.4. Сформулируйте определение предела последовательности точек пространства R^m .
- 1.5. Сформулируйте определение сходящейся последовательности точек пространства R^m .
- 1.6. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности точек пространства R^m .

2. Основные теоремы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности точек пространства R^m .
- 2.2. Сформулируйте теорему Больцано-Вейерштрасса.

3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите, что ограниченная последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости имеет по крайней мере одну предельную точку.
- 3.2. Докажите, что если последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся, то числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися.
- 3.3. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является сходящейся.
- 3.4. Докажите теорему о критерии Коши сходимости последовательности точек пространства R^m .

4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Докажите, что сходящаяся последовательность точек пространства R^m является ограниченной.
- 4.2. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются сходящимися, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является ограниченной.
- 4.3. Докажите, что если числовые последовательности x_n и y_n являются фундаментальными, то последовательность точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости является фундаментальной.
- 4.4. Докажите, что последовательность точек на плоскости, расположенных на окружности, имеет по крайней мере одну предельную точку.
- 4.5. Найдите предел последовательности точек $M_n \left(\cos \frac{\pi}{n}, \sin \frac{\pi}{n} \right)$ на плоскости.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Найдите предел последовательности точек $M_n(x_n, y_n)$ на плоскости, если $x_1 = 8$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{4}{x_n} \right), \quad y_n = x_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тема 3. Функции, предел, непрерывность.**1. Определения.**

1.1. Сформулируйте определение ограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m .

1.2. Сформулируйте определение неограниченной сверху функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m .

1.3. Сформулируйте определение ограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m .

1.4. Сформулируйте определение неограниченной снизу функции $u(M)$, заданной на множестве D точек пространства R^m .

1.5. Сформулируйте определение точной верхней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m .

1.6. Сформулируйте определение точной нижней грани функции m переменных на множестве D точек пространства R^m .

1.7. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.

1.8. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R^m$.

1.9. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ при $M \rightarrow \infty$.

1.10. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ при $M \rightarrow \infty$.

1.11. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$.

1.12. Сформулируйте определение непрерывной функции $u(x, y)$ по совокупности переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте теорему о критерии Коши существования предела функции $u(M)$ в точке $M_0 \in R_m$.

2.2. Сформулируйте теорему о непрерывности суммы непрерывных функций нескольких переменных.

2.3. Сформулируйте теорему о непрерывности произведения непрерывных функций нескольких переменных.

2.4. Сформулируйте теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций нескольких переменных.

2.5. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение.

2.6. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

2.7. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.

2.8. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.

2.9. Сформулируйте теорему Кантора для функции нескольких переменных.

3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о непрерывности суммы двух непрерывных функций нескольких переменных.
- 3.2. Докажите теорему о непрерывности произведения двух непрерывных функций нескольких переменных.
- 3.3. Докажите теорему о непрерывности частного двух непрерывных функций нескольких переменных.
- 3.4. Докажите теорему о непрерывности сложной функции нескольких переменных.
- 3.5. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции нескольких переменных через любое промежуточное значение.
- 3.6. Докажите первую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
- 3.7. Докажите вторую теорему Вейерштрасса для функции нескольких переменных.
- 3.8. Докажите теорему Кантора для функции нескольких переменных.

4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0 .
- 4.2. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \rightarrow \infty$.
- 4.3. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела в точке M_0 .
- 4.4. Сформулируйте определение “по Гейне” того, что функция $u(M)$ не имеет предела при $M \rightarrow \infty$.
- 4.5. Сформулируйте “по Гейне” отрицание того, что число b является пределом функции $u(M)$ в точке M_0 .
- 4.6. Нарисуйте семейство линий уровня функции
 - 4.6.1. $u(x, y) = xy$.
 - 4.6.2. $u(x, y) = \frac{y}{x}$.
 - 4.6.3. $u(x, y) = \frac{y}{x^2}$.
 - 4.6.4. $u(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.
 - 4.6.5. $u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x}$.
 - 4.6.6. $u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x + 2y}$.
 - 4.6.7. $u(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.
- 4.7. Приведите пример ограниченной сверху и неограниченной снизу функции, определённой на множестве $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- 4.8. Приведите пример неограниченной сверху и ограниченной снизу функции, определённой на множестве $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$.
- 4.9. Приведите пример неограниченной снизу и неограниченной сверху функции, определённой на множестве $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$.
- 4.10. Приведите пример функции двух переменных, которая является равномерно непрерывной на заданном множестве.
- 4.11. Приведите пример непрерывной функции, которая не является равномерно непрерывной на заданном множестве.

4.12. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна на заданном ограниченном, но незамкнутом множестве, и является неограниченной на этом множестве.

4.13. Приведите пример функции двух переменных, которая непрерывна и ограничена на заданном ограниченном множестве, но не достигает на этом множестве своей точной верхней грани.

4.14. Найдите предел функции $u(x, y)$ при $M(x, y) \rightarrow \infty$ или докажите, что предел не существует:

$$u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}; \quad u(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^4 + y^4}; \quad u(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}; \quad u(x, y) = xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2};$$

$$u(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке.

$$5.1.1. u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } (0,0);$$

$$5.1.2. u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } (0,0);$$

$$5.1.3. u(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } (0,0);$$

$$5.1.4. u(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy}, & xy \neq 0, \\ 1, & xy = 0 \end{cases} \quad \text{в точках } (0,0) \text{ и } (0,1);$$

$$5.1.5. u(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{в точках } (0,0), (1,0), (0,1);$$

$$5.1.6. u(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } (0,0).$$

$$5.1.7. u(x, y) = \begin{cases} xy \ln(|xy|), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } (0,0).$$

$$5.1.8. u(x, y) = \begin{cases} x \ln(|xy|), & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0 \end{cases} \quad \text{в точке } (0,0).$$

Тема 4. Дифференцируемые функции.

1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение дифференцируемой функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$.
- 1.2. Сформулируйте определение частной производной функции $f(x_1, \dots, x_m)$ по переменной x_k в точке $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$.
- 1.3. Сформулируйте определение первого дифференциала функции нескольких переменных.
- 1.4. Сформулируйте определение касательной плоскости к графику функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- 1.5. Сформулируйте определение n раз дифференцируемой функции нескольких переменных в данной точке.
- 1.6. Сформулируйте определение второго дифференциала функции $u(x_1, \dots, x_m)$ в данной точке.
- 1.7. Сформулируйте определение n -ого дифференциала функции $u(x_1, \dots, x_m)$ в данной точке.
- 1.8. Сформулируйте определение градиента функции $f(x, y, z)$ в данной точке $M(x_0, y_0, z_0)$.
- 1.9. Сформулируйте определение производной по направлению $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ для функции $f(x, y, z)$ в точке $M(x_0, y_0, z_0)$.
- 2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).**
- 2.1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $u(x, y)$ в точке.
- 2.2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$.
- 2.3. Сформулируйте теорему о достаточных условиях равенства $u_{xy} = u_{yx}$ в данной точке.
- 2.4. Сформулируйте теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.
- 2.5. Сформулируйте теорему о дифференцируемости сложной функции.
- 2.6. Запишите формулу для частных производных сложной функции.
- 2.7. Запишите выражение производной функции $f(x, y, z)$ по заданному направлению в данной точке через частные производные функции в этой точке.
- 2.8. Запишите выражение производной функции $f(x, y, z)$ по заданному направлению в данной точке через градиент функции в этой точке.
- 2.9. Запишите формулу Лагранжа конечных приращений для функции нескольких переменных. При каких условиях эта формула верна?
- 2.10. Запишите выражение для второго дифференциала функции нескольких независимых переменных.
- 2.11. Запишите выражение для дифференциала n -го порядка функции нескольких независимых переменных.
- 2.12. Запишите выражение для второго дифференциала сложной функции нескольких переменных.
- 2.13. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1, \dots, x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$.
- 2.14. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для функции $f(x_1, \dots, x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$.
- 3. Теоремы с доказательством.**
- 3.1. Докажите теорему о необходимых условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$.

- 3.2. Докажите теорему о достаточных условиях дифференцируемости функции $f(x_1, \dots, x_m)$ в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$.
- 3.3. Докажите теорему о достаточных условиях равенства $u_{xy} = u_{yx}$ в данной точке.
- 3.4. Докажите теорему о касательной плоскости к графику функции двух переменных.
- 3.5. Докажите теорему о дифференцируемости сложной функции.
- 3.6. Докажите, что производная дифференцируемой в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ функции $f(x, y, z)$ по направлению $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ равна скалярному произведению вектора \vec{l} и градиента функции f в точке M .
- 3.7. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для функции $f(x_1, \dots, x_m)$ с центром разложения в точке $M_0(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \dots, \overset{\circ}{x}_m)$.

4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Докажите, что если функция $u(x, y)$ имеет частные производные первого порядка в любой точке круга единичного радиуса и $|u_x(x, y)| \leq 1$, $|u_y(x, y)| \leq 1$, то для любых двух точек M и N этого круга справедливо неравенство $|u(M) - u(N)| < 3$.
- 4.2. Что такое “инвариантность формы первого дифференциала”?
- 4.3. Что такое “неинвариантность формы дифференциала второго порядка”?
- 4.4. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1 , функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2 . Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ дифференцируема в точке $M = (x_1, x_2)$.
- 4.5. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1 , функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2 . Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) + g(y)$ дифференцируема в точке $M = (x_1, x_2)$.
- 4.6. Для функции $z = u(x, y)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы в точке $M(x, y)$, запишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x, y)$ в точке $M(x, y, u(x, y))$, найдите вектор нормали к этой плоскости. Вычислите все указанные величины в точке $M_0(x_0, y_0)$. Вычислите производную по направлению заданного вектора \vec{L} в точке $M_0(x_0, y_0)$.
- 4.6.1. $u(x, y) = 2x + 3y$, $M_0 = (3; 2)$, $\vec{L} = (3; -2)$;
- 4.6.2. $u(x, y) = 8x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$, $M_0 = (2; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$;
- 4.6.3. $u(x, y) = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$;
- 4.6.4. $u(x, y) = x^2y^3(6 - 2x - 3y)$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$;
- 4.6.5. $u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$, $M_0 = (1; 1)$, $\vec{L} = (-1; -1)$;
- 4.6.6. $u(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $M_0 = (\sqrt{3}; 1)$, $\vec{L}_1 = (1; -\sqrt{3})$, $\vec{L}_2 = (\sqrt{3}; 1)$;
- 4.6.7. $u(x, y) = x^y - y^x$, $M_0 = (e; e)$, $M_1 = (1; 1)$, $\vec{L} = (1; -1)$;
- 4.6.8. $u(x, y) = x^3 - x^2y + y^3 - 1$, \vec{L} образует угол $\frac{\pi}{6}$ с осью Ox .
- 4.7. Для функции $f(x, y, z)$ найдите частные производные первого порядка, градиент, первый и второй дифференциалы. Вычислите все указанные величины в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Найдите производную по направлению заданного вектора \vec{L} в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.
- 4.7.1. $u(x, y, z) = x^3 + x + y + xyz$, $M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1, 1, 1)$;
- 4.7.2. $u(x, y, z) = \ln(xyz)$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1, 1, 1)$;
- 4.7.3. $u(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z)$, $M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1, 1, 1)$;

4.7.4. $u(x, y, z) = x^3 y^4 z^5 (13 - 3x - 4y - 5z)$, $M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1, 1, 1)$.

4.7.5. $u(x, y, z) = x^3 + x + y + xyz$, $M_0 = (1; 1; 1)$, $\vec{L} = (1, 1, 1)$.

4.8. Для функции $u(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

4.9. Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции u , если f — дважды дифференцируемая функция, x и y — независимые переменные:

4.9.1. $u = f(\xi, \theta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\theta = x^2 - y^2$;

4.9.2. $u = f(\xi, \eta, \theta)$, $\xi = xy$, $\eta = x - y$, $\theta = x + y$.

4.10. Предполагая, что функции φ и ψ дифференцируемы достаточное число раз, проверить следующее равенство:

4.10.1. $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$, если $z = y\varphi(x^2 - y^2)$;

4.10.2. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если $z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$;

4.10.3. $a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, если $z = \varphi(x - ay) + \psi(x + ay)$.

4.11. Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 и с остаточным членом в форме Пеано для функций:

4.11.1. $u(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$, $M_0(2, 3)$, $n = 2$;

4.11.2. $u = x^y$, $M_0(e, e)$, $n = 2$;

4.11.3. $u = e^x \sin y$, $M_0(0, 0)$, $n = 3$;

4.11.4. $u = \ln(1 + x + y)$, $M_0(0, 0)$, $n = 3$;

4.11.5. $u(x, y, z) = x^3 + x + y + xyz$, $M_0(x_0, y_0)$, $n = 3$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Пусть $u = f(x, y)$, d^2u в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует и является положительно определённой квадратичной формой. Докажите, что при этом условии в некоторой окрестности точки $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ касательная плоскость к графику функции $u = f(x, y)$ в точке N_0 имеет единственную общую точку с графиком.

5.2. Имеет ли функция $u(x, y)$ частные производные первого порядка в точке $(0, 0)$? Если имеет, найдите их и исследуйте эти частные производные на непрерывность в точке $(0, 0)$.

$u(x, y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{x^2y}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{xy}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$;

$u(x, y) = \sqrt[3]{xy(x^2 + y^2)}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{x^4 - y^4}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{x^5 - y^5}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{yx^4 + xy^4}$.

5.3. Является ли функция $u(x, y)$ дифференцируемой в точке $(0, 0)$?

$u(x, y) = \sqrt[3]{xy}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{x^2y}$; $u(x, y) = xy \cdot \sqrt[3]{xy}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$; $u(x, y) = \sqrt[3]{x^4 - y^4}$;

$$u(x, y) = \sqrt[3]{xy(x^2 + y^2)}; \quad u(x, y) = \sqrt[3]{xy(x + y)}; \quad u(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2), \text{ если } x^2 + y^2 > 0,$$

$$u(0, 0) = 0; \quad u(x, y) = xy \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \text{ если } x^2 + y^2 > 0, \quad u(0, 0) = 0;$$

$$u(x, y) = xy \cdot \sqrt[3]{x^3 + y^3} \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right), \text{ если } x^2 + y^2 > 0, \quad u(0, 0) = 0.$$

5.4. Пусть функция $u(x, y)$ дважды дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой окрестности точки $N_0(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ касательная плоскость к графику функции в этой точке имеет единственную общую точку с графиком. Докажите, что второй дифференциал в указанной точке является либо положительно определённой, либо квазиположительно определённой квадратичной формой.

5.5. Известно, что касательная плоскость к графику в точке $N_0(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$ дважды дифференцируемой функции $z = u(x, y)$ имеет в любой окрестности точки N_0 не менее двух общих точек с графиком. Может ли при этом условии второй дифференциал d^2u в точке $M_0(x_0, y_0)$ являться знакоопределённой квадратичной формой?

5.6. Докажите, что отличный от нуля градиент дифференцируемой функции $z = u(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ направлен перпендикулярно касательной к линии уровня функции $u(x, y)$ в точке M_0 .

5.7. Пусть функция $u(x, y)$ дифференцируема два раза в точке $M_0(x_0, y_0)$ и $R_3(x, y) = u(x, y) - P_2(x, y)$ – остаточный член формулы Тейлора, где $P_2(x, y)$ – многочлен Тейлора второго порядка. Докажите, что функция $R_3(x, y)$ и все её частные производные первого и второго порядка обращаются в нуль в точке M_0 .

5.8. Пусть функция $u(x, y)$ такова, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ $u(M_0) = 0$, $du|_{M_0} = 0$, $d^2u|_{M_0} = 0$.

Докажите, что $u(x, y) = o(\rho^2)$ при $\rho \rightarrow 0$, где $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Тема 5. Локальный экстремум.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение локального экстремума функции нескольких переменных.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте необходимые условия локального экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ функции $u(x, y)$, дифференцируемой в этой точке.

2.2. Сформулируйте достаточные условия локального экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$ дважды дифференцируемой в этой точке функции $u(x, y)$.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о необходимых условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

3.2. Докажите теорему о достаточных условиях локального экстремума функции нескольких переменных.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Докажите, что функция $u(x, y) + v(x, y)$ также имеет локальный минимум в указанной точке.

- 4.2. Приведите пример функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $u(x, y) \cdot v(x, y)$ имеет локальный максимум в указанной точке.
- 4.3. Приведите пример функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, которые имеют локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функция $u(x, y) \cdot v(x, y)$ не имеет локального экстремума в указанной точке.
- 4.4. Пусть функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1, x_2)$, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_1 , $f(x_1) \neq 0$, функция $g(x)$ дифференцируема в точке x_2 , $g(x_2) \neq 0$. Докажите, что $f'(x_1) = 0$, $g'(x_2) = 0$.
- 4.5. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1 , $f(x_1) > 0$, функция $g(x)$ имеет локальный минимум в точке x_2 , $g(x_2) > 0$. Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ имеет локальный минимум в точке $M(x_1, x_2)$.

4.6. Найдите все точки локального экстремума функций:

$$u(x, y) = x^2 + xy + y^2; \quad u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy; \quad u(x, y) = xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y};$$

$$u(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}; \quad u(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2; \quad u(x, y, z) = xy + xz + yz;$$

$$u(x, y, z) = xyz(4 - x - y - z); \quad u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz;$$

$$u(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}.$$

4.7. Исследуйте на экстремум функцию $u = x \cos y + z \cos x$ в точке $M\left(\frac{\pi}{2}; 0; 1\right)$.

4.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции в заданной области:

$$u = xy - x^2y - \frac{1}{2}y^2x, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2.$$

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если $d^2u(M_0)$ - знакопеременная квадратичная форма, то функция u не имеет локального экстремума в точке M_0 .

5.2. Докажите, что если в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $u(x, y)$ трижды дифференцируема, $du|_{M_0} = 0$, $d^2u|_{M_0} = 0$, $d^3u|_{M_0} \neq 0$, то функция u не имеет локального экстремума в точке M_0 .

5.3. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в точке x_1 , $f'(x_1) = 0$, функция $g(x)$ дважды дифференцируема в точке x_2 , $g'(x_2) = 0$, $f(x_1)g(x_2)f''(x_1)g''(x_2) > 0$. Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ имеет локальный экстремум в точке $M(x_1, x_2)$.

5.4. Пусть функция $f(x)$ имеет локальный минимум в точке x_1 , $f(x_1) > 0$, функция $g(x)$ имеет локальный максимум в точке x_2 , $g(x_2) > 0$. Докажите, что функция $u(x, y) = f(x) \cdot g(y)$ не имеет локального экстремума в точке $M(x_1, x_2)$.

5.5. Пусть функция $u(x, y)$ имеет локальный минимум в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функции $x = \varphi(t, s)$ и $y = \psi(t, s)$ имеют отличный от нуля первый дифференциал в точке $K_0(s_0, t_0)$, причем $x_0 = \varphi(t_0, s_0)$ и $y_0 = \psi(t_0, s_0)$. Докажите, что сложная функция $u(\varphi(t, s), \psi(t, s))$ имеет локальный минимум в точке K_0 .

5.6. Пусть непрерывные функции $x = \varphi(t, s)$ и $y = \psi(t, s)$ имеют локальный максимум в точке $K_0(s_0, t_0)$, а дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $u(x, y)$ такова, что $\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) > 0$ и

$\frac{\partial u}{\partial y}(M_0) > 0$, причем $x_0 = \varphi(t_0, s_0)$ и $y_0 = \psi(t_0, s_0)$. Докажите, что сложная функция $u(\varphi(t, s), \psi(t, s))$ имеет локальный максимум в точке K_0 .

Тема 6. Неявные функции.

1. Определения.

- 1.1. Сформулируйте определение зависимости функций $f_1(x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_2, \dots, x_n)$.
- 1.2. Сформулируйте определение независимости функций $f_1(x_2, \dots, x_n), \dots, f_k(x_2, \dots, x_n)$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.
- 2.2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.
- 2.3. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.
- 2.4. Сформулируйте теорему о дифференцируемости функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.
- 2.5. Сформулируйте теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

2.6. Сформулируйте теорему о достаточных условиях независимости функций.

2.7. Сформулируйте теорему о зависимости и независимости функций.

3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.
- 3.2. Докажите теорему о дифференцируемости функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$.
- 3.3. Докажите теорему о существовании и непрерывности функции $z = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y, z) = 0$.
- 3.4. Докажите теорему о существовании и дифференцируемости функций $y = f(x)$, $z = g(x)$, заданных неявно системой уравнений
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$
- 3.5. Докажите теорему о достаточных условиях независимости функций.

4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Докажите, что уравнение $x^2 + xy + y^2 = 3$ окрестности точки $(1; 1)$ однозначно определяет функцию $y = y(x)$.
- 4.2. Докажите, что уравнение $xy + \ln(xy) = 1$ в окрестности точки $(2; 0.5)$ однозначно определяет функцию $y = y(x)$.

4.3. Пусть функции $y = u(x)$, $z = v(x)$ заданы системой уравнений

$$f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0. \text{ Вычислите первый дифференциал функции } u(x).$$

4.4. Пусть функции $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$ заданы неявно системой уравнений
$$\begin{cases} F(x, y) = u, \\ G(x, y) = v. \end{cases}$$

Найдите $\frac{\partial x}{\partial v}$.

4.5. Пусть функции $y = f(x)$, $z = g(x)$ заданы неявно системой уравнений
$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Найдите $\frac{dz}{dx}$.

4.6. Докажите, что дифференцируемая функция $z(x, y)$, определяемая уравнением

$$F(z^2 - y^2, x^2 + (y - z)^2) = 0, \text{ где } F - \text{ дифференцируемая функция, является решением}$$

$$\text{уравнения } (z - y)^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

4.7. Проверьте, что дифференцируемая функция $z(x, y)$, определяемая уравнением

$$F\left(x^2 + y^2, \frac{z}{x}\right) = 0, \text{ где } F - \text{ дифференцируемая функция, является решением уравнения}$$

$$xy \frac{\partial z}{\partial x} - x^2 \frac{\partial z}{\partial y} = yz.$$

4.8. Найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$.

4.8.1. $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$;

4.8.2. $F(x, y) = 8x^2y - x^4 - y^4 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$;

4.8.3. $F(x, y) = y^2 - ay - \sin x = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$.

4.9. Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z = z(x, y)$, заданной неявно уравнением

4.9.1. $xyz = x^2 + y^2 + z^2$;

4.9.2. $z \cos x + y \cos z + x \cos y = 3$;

4.9.3. $x^2 + zx + z^2 + y = 0$.

4.10. Пусть в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) данное уравнение имеет единственное решение вида $z = z(x, y)$. Найдите указанные частные производные функции $z = z(x, y)$ в точке (x_0, y_0) .

4.10.1. $\arctg \frac{z}{x} = z + x + y; \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

4.10.2. $\ln(xy + yz) = z^2 + x^2 + y^2 - 2, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4.11. Найдите первый и второй дифференциалы функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, заданных неявно

системой уравнений
$$\begin{cases} xu + yv = 1, \\ x + y + u + v = 0. \end{cases}$$

4.12. Предполагая, что φ – дифференцируемая функция, проверьте выполнение равенства:

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = xy, \text{ если } z^2 = xy + \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

4.13. Преобразуйте уравнение, введя новые переменные.

$$4.13.1. y^2 + (x^2 - xy) \frac{dy}{dx} = 0, \quad y = tx, \quad y = y(t);$$

$$4.13.2. x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad x = e^t, \quad y = y(t).$$

4.14. Приняв v за новую функцию $v(x, y)$, преобразуйте уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -u, \quad u = ve^{-x-y}.$$

4.15. Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v , преобразуйте уравнение

$$4.15.1. \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 4x, \quad u = x, \quad v = x - y, \quad w = x - y + z;$$

$$4.15.2. \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{2}x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{y}, \quad u = \frac{y}{x}, \quad v = y, \quad w = zy - x.$$

4.16. Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad u = x, \quad v = 2\sqrt{y}, \quad (y > 0).$$

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Найдите du и dv , если функции $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, заданы неявно системой

$$\text{уравнений } \begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0. \end{cases} \text{ Сформулируйте достаточные условия существования и}$$

дифференцируемости неявных функций.

5.2. Найдите du и dv , если функции $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, заданы неявно системой

$$\text{уравнений } \begin{cases} x = F(u, v), \\ y = G(u, v). \end{cases} \text{ Сформулируйте достаточные условия существования и}$$

дифференцируемости неявных функций.

Тема 7. Условный экстремум.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x, y)$ с условием связи $f(x, y) = 0$.

1.2. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x, y, z)$ с условием связи $f(x, y, z) = 0$.

1.3. Сформулируйте определение экстремума функции $u(x, y, z)$ с двумя условиями связи $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$.

2. Основные теоремы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x, y)$ с условием связи $f(x, y) = 0$ в форме Лагранжа.
- 2.2. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x, y)$ с условием связи $f(x, y) = 0$ в форме Лагранжа.
- 2.3. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x, y, z)$ с условием связи $f(x, y, z) = 0$ в форме Лагранжа.
- 2.4. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x, y, z)$ с условием связи $f(x, y, z) = 0$ в форме Лагранжа.
- 2.5. Сформулируйте теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x, y, z)$ с двумя условиями связи $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ в форме Лагранжа.
- 2.6. Сформулируйте теорему о достаточных условиях экстремума функции $u(x, y, z)$ с двумя условиями связи $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ в форме Лагранжа.

3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x, y)$ с условием связи $f(x, y) = 0$ в форме Лагранжа.
- 3.2. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x, y, z)$ с условием связи $f(x, y, z) = 0$ в форме Лагранжа.
- 3.3. Докажите теорему о необходимых условиях экстремума функции $u(x, y, z)$ с двумя условиями связи $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ в форме Лагранжа.

4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума функции u при заданных условиях связи.
 - 4.1.1. $u(x, y) = x^2 + y^2$ при условии $x + y = 2$;
 - 4.1.2. $u(x, y) = x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 2$;
 - 4.1.3. $u(x, y) = x + y$ при условии $xy = 1$;
 - 4.1.4. $u(x, y) = xy$ при условии $x^3 + y^3 - 2xy = 0$;
 - 4.1.5. $u(x, y, z) = x + y + z$ при условии $xyz = 1$;
 - 4.1.6. $u(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ при условии $2x + 3y + 4z = 9$;
 - 4.1.7. $u(x, y, z) = xyz$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

5. Задачи повышенной трудности.

- 5.1. Пусть в точке $N_0(x_0, y_0, \lambda)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x, y)$ с условием связи $f(x, y) = 0$ и к тому же $\text{grad}u(x_0, y_0) \neq 0$, $\text{grad}f(x_0, y_0) \neq 0$. Докажите, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ градиенты функций $u(x, y)$ $f(x, y)$ коллинеарны.
- 5.2. Пусть в точке $N_0(x_0, y_0, \lambda)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x, y)$ с условием связи $ax + by = c$ и $d^2u|_{M_0} > 0$, $M_0(x_0, y_0)$. Докажите, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.
- 5.3. Пусть в точке $N_0(x_0, y_0, \lambda)$ выполнены необходимые (в форме Лагранжа) условия экстремума функции $u(x, y) = ax + by$ с условием связи $f(x, y) = 0$ и $d^2f|_{M_0} > 0$, $M_0(x_0, y_0)$.

Докажите, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет место экстремум указанной функции с указанным условием связи.

Тема 8. Кратные интегралы.

1. Определения.

- 1.1. Дайте определение интегральной суммы для двойного интеграла.
- 1.2. Для двойного интеграла дайте определение предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю.

2. Основные теоремы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному.
- 2.2. Сформулируйте теорему о формуле замены переменных для двойного интеграла.

3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о сведении двойного интеграла к повторному.
- 3.2. Докажите теорему о формуле замены переменных в двойном интеграле для случая линейной замены переменных.

4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл.

$$\int_0^1 dy \int_y^1 xy dx; \quad \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} 2y dy; \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y dy; \quad \int_0^1 dx \int_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y dy.$$

- 4.2. Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ к повторному двумя способами:

$$4.2.1. D = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\};$$

$$4.2.2. D = \{(x, y) : y^2 \leq x + 2, y \geq x\}.$$

- 4.3. Вычислите

$$4.3.1. \iint_G (x^2 + y^2) dx dy, \quad D = \{x^2 + y^2 \leq 6\};$$

$$4.3.2. \iint_G (x^2 - y^2) dx dy, \quad D = \{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cap \left\{ \frac{\pi}{6} \leq \arctg \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{4} \right\} \cap x > 0.$$

- 4.4. Найдите замену переменных $(u, v) \leftrightarrow (x, y)$, при которой область D на плоскости (x, y) , ограниченная линиями $y^2 = 16x$, $y^2 = 9x$, $x = 2y$, $x = 4y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u, v) . Вычислите площадь области D , используя замену переменных в двойном интеграле.

- 4.5. Найдите замену переменных $(u, v) \leftrightarrow (x, y)$, при которой область D на плоскости (x, y) , ограниченная линиями $xe^y = 1$, $xe^y = 2$, $x = e^y$, $x = 2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u, v) . Вычислите площадь области D , используя замену переменных в двойном интеграле.

- 4.6. Вычислите массу $m = \iint_G dx dy$, статические моменты $M_x = \iint_G y dx dy$, $M_y = \iint_G x dx dy$ и моменты инерции $I_x = \iint_G y^2 dx dy$, $I_y = \iint_G x^2 dx dy$ однородной пластинки с плотностью $\rho = 1$, ограниченной линиями

$$4.6.1. 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq x;$$

4.6.2. $0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x(4 - x);$

4.6.3. $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x;$

4.6.4. $10^{-3} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^{-1}.$

4.7. Изобразите на плоскости (x,y) область D , для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_y^{3-2y} f(x,y) dx$. Измените порядок интегрирования.

4.8. Изобразите на плоскости (x,y) область D , для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint_D f(x,y) dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-2y}^{1-y} f(x,y) dx$. Вычислите указанный интеграл для

$f(x,y) = y.$

4.9. Вычислите координаты центра масс и моменты инерции плоской фигуры относительно осей координат, если фигура ограничена линиями $x = 1, x = 2, y = 0, y = x$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

4.10. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos x, y = \sin x$ ($\pi/4 \leq x \leq 5\pi/4$); поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

4.11. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 0, x = 1, y = 0, y = \arcsin x$; поверхностная плотность $\rho(x) \equiv 1$.

4.12. Вычислите тройной интеграл $\iiint_G (x^2 + y^2) dx dy dz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$.

4.13. Сведите тройной интеграл $\iiint_G f(x,y,z) dx dy dz$ к повторному, если G - область, ограниченная поверхностями $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 2$.

4.14. Вычислите моменты инерции относительно координатных плоскостей однородного тела (плотность $\rho \equiv 1$), ограниченного поверхностями $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z = 0, (z \geq 0)$.

4.15. Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0)$.

4.16. Пусть G – тело, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 1 (z \geq 1)$. Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0 , находящейся в начале координат.

Тема 9. Криволинейные интегралы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение криволинейного интеграла I рода от функции $f(x,y)$ по заданной кривой.

1.2. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int_{AB} P(x,y) dx \cdot$

1.3. Сформулируйте определение криволинейного интеграла II рода $\int_{AB} Q(x,y) dy \cdot$

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла

$$\int_L f(x, y) dl \text{ по кривой } L.$$

2.2. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла

$$\int_{AB} P(x, y) dx.$$

2.3. Сформулируйте достаточные условия существования криволинейного интеграла

$$\int_{AB} Q(x, y) dy.$$

2.4. Запишите формулу Грина и сформулируйте достаточные условия применимости.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла первого рода с помощью определённого интеграла.

3.2. Докажите теорему о вычислении криволинейного интеграла второго рода с помощью определённого интеграла.

3.3. Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

3.4. Докажите теорему о достаточных условиях того, что выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ является полным дифференциалом.

3.5. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ таковы, что криволинейный интеграл второго рода

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \text{ не зависит от пути интегрирования. Докажите, что } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

3.6. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ таковы, что выражение $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ представляет собой полный дифференциал. Докажите, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

3.7. Докажите теорему о формуле Грина.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Выразите криволинейный интеграл $\int_L f(x, y) dl$ через определённый интеграл.

4.2. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

4.3. Запишите формулу для вычисления длины дуги кривой, заданной параметрически, и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

4.4. Запишите формулу для вычисления массы кривой L на плоскости с помощью определённого интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$; линейная плотность равна $\rho(t)$.

4.5. Запишите формулу для вычисления массы кривой L на плоскости с помощью определённого интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$; линейная плотность равна $\rho(x)$.

4.6. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определённого интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$. Линейная плотность постоянна.

4.7. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определённого интеграла, если кривая задана уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$; линейная плотность постоянна.

- 4.8. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$; линейная плотность постоянна.
- 4.9. Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$; линейная плотность постоянна.
- 4.10. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
- 4.11. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана в параметрической форме: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
- 4.12. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
- 4.13. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy кривой L на плоскости с помощью определенного интеграла, если кривая задана уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$; линейная плотность постоянна и равна 1.
- 4.14. Выразите криволинейный интеграл $\int_{AB} P(x, y) dx$ через определённый интеграл.
- 4.15. Выразите криволинейный интеграл $\int_{AB} Q(x, y) dy$ через определённый интеграл.
- 4.16. Вычислите значение интеграла $\oint_L [x \cos(\mathbf{n}, x) + y \cos(\mathbf{n}, y)] ds$, где L – замкнутый контур, \mathbf{n} – внешняя нормаль к L .
- 4.17. Докажите, что если L – замкнутый контур и \mathbf{l} – постоянный вектор, то $\oint_L \cos(\mathbf{l}, \mathbf{n}) ds = 0$.
- 4.18. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L . Запишите формулу, выражающую площадь области G через интеграл вида $\oint_L f(x, y) dx$.
- 4.19. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L и площадью S . Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс области G через интеграл вида $\oint_L f(x, y) dx$, если поверхностная плотность равна 1.
- 4.20. Пусть G – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L и площадью S . Запишите формулу для вычисления y – координаты центра масс области G через интеграл вида $\oint_L f(x, y) dy$, если поверхностная плотность равна 1.
- 4.21. Пусть D – ограниченная область на плоскости с гладкой границей L . Запишите в виде двойного интеграла по области D формулу для вычисления работы силы $\vec{F}(x, y) = (P(x, y); Q(x, y))$ при перемещении материальной точки по замкнутому контуру L против часовой стрелки, если все функции непрерывно дифференцируемы в D .
- 4.22. Вычислите криволинейные интегралы первого рода

4.22.1. $\int_L 1 ds$, где L – кривая $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $0 \leq t \leq 1$;

4.22.2. $\int_L y ds$, где L – кривая $y = e^x$, $0 \leq x \leq 2$;

4.22.3. $\int_L xy dl$, где L – часть ломаной линии $x + y = 1$, $x - y = -1$, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

4.22.4. $\int_L x^2 y dl$, где $L = \left\{ (x, y) : x = 4 \cos t, y = \sin 2t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right\}$.

4.23. Вычислите длину кривой $y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$.

4.24. Вычислите массу кривой $y = \frac{2}{3} x \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 3$ с линейной плотностью $\rho(x) = 2\sqrt{1+x}$.

4.25. Вычислите x -координату центра масс кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, если

линейная плотность постоянна.

4.26. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, если линейная плотность $\rho \equiv 1$.

4.27. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$; линейная плотность $\rho(t) = \sin t$.

4.28. Найдите координаты силы притяжения материальной точки массы m однородной полуокружностью массой M и радиусом R ; точка помещена в центре соответствующей окружности.

4.29. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

4.29.1. $\int_{AB} x dx + y dy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

4.29.2. $\int_L (2-y) dx + x dy$, где кривая L задана уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$

и пробегается в направлении возрастания параметра t .

4.29.3. $\oint_L x dy + 2y dx$, где кривая L задана соотношениями

$y = 0$, $y = \sqrt{1-x^2}$, $y = x$, $0 < y < x$.

4.29.4. $\int_L xy dx - x^3 y^3 dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением $|x-y| + |x+y| = 1$.

4.29.5. $\int_L y dx + z dy + x dz$, где L – кривая $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, пробегаемая в

направлении возрастания параметра t .

4.30. С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

4.30.1. эллипсом $x = a \sin t$, $y = b \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $a > 0$, $b > 0$;

4.30.2. параболой $(x+y)^2 = 2ax$ ($a > 0$) и осью Ox .

4.30.3. астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

4.31. Вычислите моменты инерции относительно осей координат кривой, заданной как пересечение поверхности $2x^2 + y^2 - z^2 = -1$ и плоскости $z = x + 1$.

4.32. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{x - y, 2x + y^2\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$.

4.33. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{y, x\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, -3)$.

4. Задачи повышенной трудности.

4.14. Пусть число $l(t)$ равно длине кривой L на плоскости, заданной уравнением $y = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq t$. Найдите $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(t)}{t^2}$.

4.15. Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ и их частные производные первого и второго порядка непрерывны в замкнутой области G , ограниченной гладкой кривой L . Докажите, что

справедлива формула: $\oint_L \left(\frac{u}{\partial n} \frac{v}{\partial n} \right) dl = \iint_G \left(\Delta u \frac{v}{\Delta v} \right) dx dy$ (вторая формула Грина), где $\frac{\partial u}{\partial n}$ -

производная по направлению внешней нормали к L , $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, а интеграл в левой части есть криволинейный интеграл первого рода.

4.16. Вычислите интеграл $I = \oint_L (x \cos \alpha + y \cos \beta) dl$, где L - замкнутая гладкая кривая,

ограничивающая область площади S ; α и β - углы между вектором внешней нормали \mathbf{n} к кривой L в точке $M(x, y)$ и осями Ox и Oy .

4.17. Докажите, что если функция $u(x, y)$ имеет в замкнутой области G непрерывные производные второго порядка, то справедлива формула

$\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_G u \Delta u dx dy + \int_L u \frac{\partial u}{\partial n} dl$, где L - гладкий контур, ограничивающий

область G , $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к L .

4.18. Применяя формулу Грина, найти $\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_L (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dl$, где S - площадь области,

ограниченной контуром L , окружающим точку (x_0, y_0) , $d(S)$ - диаметр области S , \mathbf{n} - единичный вектор внешней нормали к контуру L и $\mathbf{F} = \{x, y\}$.

Тема 10. Поверхностные интегралы.

1. Определения.

1.1. Сформулируйте определение площади поверхности.

1.2. Сформулируйте определение поверхностного интеграла первого рода.

1.3. Сформулируйте определение поверхностного интеграла второго рода.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

2.1. Запишите формулу площади поверхности, заданной уравнением $z = h(x, y)$, $(x, y) \in D$, и сформулируйте условия ее применимости.

2.2. Запишите формулу площади поверхности, заданной параметрически, и сформулируйте условия ее применимости.

2.3. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в виде } z = h(x, y), (x, y) \in G, G -$$

область на плоскости (x, y) .

2.4.

2.5. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода

$$\iint_S f(x, y, z) d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в параметрической форме.}$$

2.6. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S f(x, y, z) \cos \gamma d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в виде } z = h(x, y), (x, y) \in G, G -$$

область на плоскости (x, y) , γ - угол между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Oz .

2.7. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S f(x, y, z) \cos \alpha d\sigma \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в параметрической форме, } \alpha - \text{ угол}$$

между нормалью к выбранной стороне поверхности и осью Ox .

2.8. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода

$$\iint_S P dydz + Q dx dz + R dx dy \text{ при условии, что поверхность } S \text{ задана в параметрической форме.}$$

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите теорему о вычислении площади поверхности, заданной уравнением $z = h(x, y), (x, y) \in D$.

3.2. Докажите, что если функция $f(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S , то поверхностный интеграл первого рода $\iint_S f(x, y, z) d\sigma$ существует. Требования к поверхности S сформулируйте самостоятельно.

3.3. Докажите, что если функция $P(x, y, z)$ непрерывна на поверхности S , то поверхностный интеграл второго рода $\iint_S P(x, y, z) \cos \alpha d\sigma$ существует. Требования к поверхности S сформулируйте самостоятельно.

3.4. Докажите теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке M :

4.1.1. $S: z = x^2 + y^2; M(3, 4, 25)$.

4.1.2. $S: x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2; M(1, 1, 0)$.

4.1.3. $S: x = 2uv, y = u + v, z = u^2 + v^2, M(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0)), \text{ где } u_0 = 1, v_0 = -1$.

4.2. Найдите площадь поверхности с помощью двойного интеграла:

4.2.1. $z = 3x + 4y, x^2 + y^2 \leq 1.$

4.2.2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1.$

4.2.3. $2z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 1.$

4.2.4. $z = xy, x^2 + y^2 \leq a^2.$

4.2.5. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}.$

4.2.6. $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v, 0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq 2\pi.$

4.3. Вычислите поверхностные интегралы I рода.

4.3.1. $\iint_S dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1].$

4.3.2. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1].$

4.3.3. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cap z \geq 0.$

4.3.4. $\iint_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}.$

4.3.5. $\iint_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0.$

4.4. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ с помощью поверхностного интеграла.

4.5. Вычислите поверхностные интегралы второго рода:

4.5.1. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1, x \in [-1;1], y \in [-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью Oz .

4.5.2. $\iint_S (y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq y \leq b.$

4.5.3. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz).

4.5.4. $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S – часть внутренней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 3.$

4.5.5. $\iint_S x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Тема 11. Кривые на плоскости.

Определения.

1.1. Сформулируйте определение того, что две кривые касаются (соприкасаются) в данной точке.

1.2. Сформулируйте определение порядка касания кривых в данной точке.

1.3. Сформулируйте определение огибающей однопараметрического семейства плоских кривых.

1.4. Сформулируйте определение кривизны плоской кривой.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства).

- 2.1. Сформулируйте теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух кривых в данной точке был равен n .
- 2.2. Сформулируйте теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства кривых.
- 2.3. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в виде $y = f(x)$.
- 2.4. Запишите формулу для вычисления радиуса кривизны в заданной точке кривой $y = f(x)$.
- 2.5. Запишите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в параметрической форме.

3. Теоремы с доказательством.

- 3.1. Докажите теорему о необходимых и достаточных условиях для того, чтобы порядок касания двух кривых в данной точке был равен n .
- 3.2. Докажите теорему о необходимых условиях огибающей однопараметрического семейства кривых.
- 3.3. Выведите формулу для вычисления кривизны кривой, заданной уравнением $y = f(x)$.
- 3.4. Выведите формулу для вычисления кривизны кривой, заданной в параметрической форме.

4. Вопросы и задачи.

- 4.1. Какой порядок касания с осью Ox имеют в начале координат кривые: $y = 1 - \cos x$;

$$y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right); \quad y = \operatorname{tg} x - \sin x.$$

- 4.2. При каком выборе коэффициентов a , b и c парабола $y = ax^2 + bx + c$ и кривая $y = e^x$ имеют в точке с абсциссой $x = x_0$ касание второго порядка?

- 4.3. Найдите огибающие однопараметрических семейств плоских кривых (C – параметр):

$$y = Cx + \frac{a}{C} \quad (a = \operatorname{const}); \quad y = Cx - \ln C; \quad 2C^2(y - Cx) = 1; \quad y^2 = 2Cx + C^2.$$

- 4.4. Определите радиус кривизны параболы $y^2 = 2px$ в точке $(x_0, \sqrt{2px_0})$.

5. Задачи повышенной трудности.

- 5.1. Выведите формулу для вычисления кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.
- 5.2. Выведите формулу для вычисления радиуса кривизны плоской кривой, заданной в неявной форме.
- 5.3. Определите радиусы кривизны следующих кривых в произвольной точке:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$