ЗАДАЧИ К ОБЩЕМУ ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, II СЕМЕСТР.

I. Точки и множества в пространстве

Найдите все граничные и все предельные точки множества точек на плоскости.

1. $\left\{(x,y): x^2+y^2<1\right\}$,
2. $\left\{(x,y): x^2+y^2=1\right\}$,
3. $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right), n\in N\right\}$

Нарисуйте семейство линий равного уровня функции

4. $u(x,y)=xy$,
5. $u(x,y)=\dfrac{y}{x}$,
6. $u(x,y)=\dfrac{y}{x^2}$,
7. $u(x,y)=x^2+2xy+y^2$,
8. $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$,
9. $u(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$,
10. $u(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

II. Предел функции нескольких переменных. Непрерывные функции.

Исследуйте функцию на непрерывность по каждой из переменных и по совокупности переменных в заданной точке.

11. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $(0;0)$,
12. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ в точке $(0;0)$,
13. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{xy}, & xy\neq 0,\\ 1, & xy=0\end{cases}$ в точках $(0;0)$ и $(0;1)$,
14. $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ в точках $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$,
15. $u(x,y)=\begin{cases}xy\ln\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$ в точке $(0;0)$.

III. *Дифференцируемые функции нескольких переменных*

Для функции $z = u(x,y)$ найдите частные производные первого и второго порядков, первый и второй дифференциалы, градиент. Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности $z = u(x,y)$ в точке $N_0(x_0, y_0, u(x_0, y_0))$, найдите вектор нормали к этой плоскости. Найдите производную по направлению $\vec{L}$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

16. $u(x,y) = 2x + 3y$, $M_0 = (3;2)$, $\vec{L} = (3;-2)$,
17. $u(x,y) = 8x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$, $M_0 = (2;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
18. $u(x,y) = xy(3 - x - y)$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
19. $u(x,y) = x^2y^3(6 - 2x - 3y)$, $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
20. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ $M_0 = (1;1)$, $\vec{L} = (-1;-1)$,
21. $u(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$, $M_0 = \left(\sqrt{3},1\right)$, $\vec{L}_1 = \left(1;-\sqrt{3}\right)$, $\vec{L}_2 = \left(\sqrt{3};1\right)$,
22. $u(x,y) = x^y - y^x$, $M_0 = (e;e)$, $M_1 = (1;1)$, $\vec{L} = (1;-1)$,
23. $u\left(x,y\right) = x^3 - x^2y + y^3 - 1$, $\vec{L} = \left(\sqrt{3};\,1\right)$.
24. Для функции $u(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ найдите $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

Найдите дифференциалы первого и второго порядка сложной функции

25. $u = f(\xi,\theta)$, $\xi = \sin t$, $\theta = \cos t$,
26. $u = f(\xi,\theta)$, $\xi = x^2 + y^2$, $\theta = x^2 - y^2$,
27. $u = f(\xi,\eta,\theta)$, $\xi = xy$, $\eta = x - y$, $\theta = x + y$,

Имеет ли функция $u\left(x,y\right)$ частные производные первого порядка в точке $\left(0;0\right)$? Если имеет, найдите их.

28. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy(x+y)}$,
29. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^2y}$,
30. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy}$,
31. $u(x,y) = \sqrt[3]{xy\left(x^2+y^2\right)}$,
32. $u\left(x,y\right) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$,
33. $u(x,y) = \sqrt[3]{x^5 - y^5}$,
34. $u(x,y) = \sqrt[3]{yx^4 + xy^4}$

IV. *Формула Тейлора*

Запишите формулу Тейлора порядка n с центром разложения в точке M_0 и с остаточным членом в форме Пеано, если

35. $u = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \quad M_0(2,3), \quad n = 2$

,

36. $u = x^y, \quad M_0(e,e), \quad n = 2$,

37. $u = e^x \sin y, \quad M_0(0,0), \quad n = 3$

38. $u = \ln(1+x+y), M_0(0,0), n = 3$

39. $u = x^3 + y^3 - 3xy, \quad M_0(1;1), n = 2$

40. $u = x^3 + x + y + xyz, M_0(0;0), n = 3.$

Найдите все точки локального экстремума функций

41. $u(x,y) = x^2 + xy + y^2$,

42. $u(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

43. $u(x,y) = xy + \dfrac{8}{x} + \dfrac{8}{y}$,

44. $u(x,y) = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y}$,

45. $u(x,y,z) = xy + xz + yz$,

46. $u(x,y,z) = xyz(4 - x - y - z)$ в области $x > 0 \bigcap y > 0 \bigcap z > 0$,

47. $u(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z}.$

48. $u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

49. Исследуйте на экстремум функцию $u = x\cos y + z\cos x$ в точке $M\left(\dfrac{\pi}{2};0;1\right)$.

V. *Неявные функции*

Найдите первую и вторую производные, найдите все точки возможного экстремума, проверьте выполнение достаточных условий экстремума для дифференцируемой неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $F(x,y) = 0$, если

50. $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$,

51. $F(x,y) = 8x^2y - x^4 - y^4 = 0, \quad x > 0, \quad y > 0$,

52. $F(x,y) = y^2 - ay - \sin x = 0, \quad 0 \le x \le 2\pi$.

Найдите частные производные первого порядка и первый дифференциал дифференцируемой функции $z = z(x,y)$, заданной неявно уравнением

53. $xyz = x^2 + y^2 + z^2$;

54. $x^2 + zx + z^2 + y = 0$.

55. $z\cos x + y\cos z + x\cos y = 3$;

Функция $z = f(x,y)$ задана неявно уравнением $F(x,y,z) = 0$. Найдите указанные частные производные.

56. $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

57. $F(x,y,z) = \operatorname{arctg}\dfrac{z}{x} - (z + x + y)$, найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

58. $F\left(x,y,z\right)=\ln(xy+yz)-\left(z^2+x^2+y^2-2\right)$, найдите $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

59. Найдите первый и второй дифференциалы функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} xu+yv=1, \\ x+y+u+v=0. \end{cases}$

Преобразуйте уравнение, введя новые переменные.

60. $y^2+(x^2-xy)\dfrac{dy}{dx}=0,\quad y=tx,\quad y=y(t)$;

61. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+3x\dfrac{dy}{dx}+y=0,\quad x=e^t,\quad y=y(t)$.

Приняв v за новую функцию $v(x,y)$, преобразуйте уравнение

62. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}=-u,\quad u=ve^{-x-y}$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, а w за новую функцию от u и v, преобразуйте уравнение

63. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=4x,\quad u=x,\quad v=x-y,\quad w=x-y+z$;

64. $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{2}x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y},\quad u=\dfrac{y}{x},\quad v=y,\quad w=zy-x$.

Приняв u и v за новые независимые переменные, преобразуйте уравнение

65. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\qquad u=x,\quad v=2\sqrt{y},\ (y>0)$.

VI. *Условный экстремум*

Используя метод Лагранжа, найдите все точки экстремума указанной функции при заданных условиях.

66. $u(x,y)=x^2+y^2$ при условии $x+y=2$,
67. $u(x,y)=x+y$ при условии $x^2+y^2=2$,
68. $u(x,y)=x+y$ при условии $xy=1$,
69. $u(x,y)=xy$ при условии $x^3+y^3-2xy=0$ в области $x>0\bigcap y>0$.
70. $u(x,y,z)=x+y+z$ при условии $xyz=1$,
71. $u(x,y,z)=x^2y^3z^4$ при условии $2x+3y+4z=9$,
72. $u(x,y,z)=xyz$ при условиях $x^2+y^2+z^2=1,\quad x+y+z=0$.

VII. *Кратные интегралы*

Измените порядок интегрирования в повторных интегралах. Вычислите повторный интеграл.

73. $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} 2y dy$,

74. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 2y dy$,

75. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{\arcsin x}^{\pi/2} \cos y dy$,

76. $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{y}^{1} xy dx$.

Сведите двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ к повторному двумя способами:

77. $D = \{(x,y) : |x| + |y| \le 1\}$;

78. $D = \left\{(x,y) : y^2 \le x + 2,\ y \ge x\right\}$

Вычислите

79. $\iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)dxdy,\quad D = \left\{x^2 + y^2 \le 6\right\}$;

80. $\iint\limits_G \left(x^2 - y^2\right)dxdy,\quad D = \left\{1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\} \cap \left\{\frac{\pi}{6} \le \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{4}\right\} \cap x > 0$.

81. Найдите замену переменных $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $y^2 = 16x,\quad y^2 = 9x,\quad x = 2y,\quad x = 4y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D, используя замену переменных в двойном интеграле.

82. Найдите замену переменных $(u,v) \leftrightarrow (x,y)$, при которой область D на плоскости (x,y), ограниченная линиями $xe^y = 1,\quad xe^y = 2,\quad x = e^y,\quad x = 2e^y$, переходит в прямоугольник на плоскости (u,v). Вычислите площадь области D, используя замену переменных в двойном интеграле.

Вычислите массу $m = \iint\limits_G dxdy$, статические моменты $M_x = \iint\limits_G ydxdy$, $M_y = \iint\limits_G xdxdy$ и моменты инерции $I_x = \iint\limits_G y^2dxdy$, $I_y = \iint\limits_G x^2dxdy$ однородной пластинки с плотностью $\rho = 1$, ограниченной линиями:

83. $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x$;

84. $0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le x(4 - x)$;

85. $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x$;

86. $10^{-3} \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^{-1}$.

87. Изобразите на плоскости (x,y) область D, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y}^{3-2y} f(x,y)\,dx$. Измените порядок интегрирования.

88. Изобразите на плоскости (x,y) область D, для которой верна формула сведения двойного интеграла к повторному: $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-2y}^{1-y} f(x,y)\,dx$. Вычислите указанный интеграл для $f(x,y) = y$.

89. Вычислите координаты центра масс и моменты инерции плоской фигуры относительно осей координат, если фигура ограничена линиями $x = 1,\quad x = 2,\quad y = 0,\quad y = x$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

90. Вычислите координаты центра масс плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = \cos x, \quad y = \sin x \quad (\pi / 4 \le x \le 5\pi / 4)$; поверхностная плотность $\rho \equiv 1$.

91. Вычислите момент инерции относительно оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = \arcsin x$; поверхностная плотность $\rho(x) \equiv 1$.

92. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_G (x^2 + y^2) dxdydz$, где область G ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 2z, \quad z = 2$.

93. Сведите тройной интеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)\, dxdydz$ к повторному, если G - область, ограниченная поверхностями $x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad x + y + z = 2$.

94. Вычислите координаты центра масс и момент инерции относительно начала координат тела с плотностью $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad (z \ge 0)$.

95. Пусть G – однородное тело с единичной плотностью, ограниченное поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z = 1 \quad (z \ge 1)$. Найдите силу притяжения этим телом материальной точки массы m_0, находящейся в начале координат.

VIII. *Криволинейные интегралы первого рода*

96. $\int\limits_L ds$, где L – кривая $y = \dfrac{x^2}{2}$, $0 \le x \le 1$,

97. $\int\limits_L yds$, где L – кривая $y = e^x$, $0 \le x \le 2$,

98. $\int\limits_L xydl,$ где L – часть ломаной линии $x + y = 1, \quad x - y = -1, \quad -1 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$.

99. $\int\limits_L x^2 ydl,$ где $L = \left\{ (x,y) : x = 4\cos t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

100. Вычислите длину кривой $y = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$.

101. Вычислите массу кривой $y = \dfrac{2}{3} x\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$ с линейной плотностью $\rho(x) = 2\sqrt{1+x}$.

102. Вычислите x-координату центра масс кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если линейная плотность постоянна.

103. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, если линейная плотность $\rho \equiv 1$.

104. Вычислите момент инерции относительно оси Ox кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$; линейная плотность $\rho(t) = \sin t$.

105. Найдите координаты силы притяжения материальной точки массы m однородной полуокружностью массой M и радиусом R; точка помещена в центре соответствующей окружности.

IX. *Криволинейные интегралы второго рода:*

106. $\int\limits_{AB} xdx + ydy$, где кривая AB задана уравнением $y = x^2, \quad A(0,0), \quad B(1,1)$.
107. $\int\limits_{L} (2 - y)dx + xdy$, где кривая L задана уравнениями $x = t - \sin t, \; y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$ и пробегается в направлении возрастания параметра t.
108. $\oint\limits_{L} xdy + 2ydx$, где кривая L задана соотношениями $y = 0, \quad y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = x, \qquad 0 \le y \le x$.
109. $\int\limits_{L} xydx - x^3y^3dy$, где L – замкнутый контур, заданный уравнением $|x - y| + |x + y| = 1$.
110. $\int\limits_{L} ydx + zdy + xdz$, где L – кривая $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \; 0 \le t \le 2\pi$, пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

С помощью криволинейного интеграла найдите площадь области, ограниченной:

111. эллипсом $x = a\sin t, \; y = b\cos t, \; 0 \le t \le 2\pi, \; a > 0, \; b > 0$;
112. параболой $(x + y)^2 = 2ax \quad (a > 0)$ и осью Ox.
113. астроидой $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.
114. Вычислите моменты инерции относительно осей координат кривой, заданной как пересечение поверхности $2x^2 + y^2 - z^2 = -1$ и плоскости $z = x + 1$.
115. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{x - y, 2x + y^2\}$ вдоль части параболы $x = y^2$, пробегаемой от точки $A(1, -1)$ до точки $B(1, 1)$.
116. Вычислите работу силы $\mathbf{F} = \{y, x\}$ вдоль контура, заданного как пересечение эллипсоида $3x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и плоскости $z = x - 2$, пробегаемого против часовой стрелки, если смотреть из точки (0,0,-3).

X. *Касательная плоскость и нормаль к поверхности.*

Найдите вектор нормали и запишите уравнение касательной плоскости к поверхности S в заданной точке М:

114. $S: \; z = x^2 + y^2$; $M(3,4,25)$.
115. $S: \; x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 2$; $M(1,1,0)$.
116. $S: \; x = 2uv, \; y = u + v, \; z = u^2 + v^2$, $M(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0)),\; где\; u_0 = 1, v_0 = -1$.

XI. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого рода. Приложения.

Найдите площадь поверхности с помощью двойного интеграла:

114. $z = 3x + 4y$, $x^2 + y^2 \le 1$.
115. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \le 1$.
116. $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$.
117. $z = xy$, $x^2 + y^2 \le a^2$.
118. $z = x^2 + y^2$, $\left(x^2 + y^2\right)^2 \le xy$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.
119. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, $x^2 + y^2 \le 1$.
120. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = v, 0 \le u \le a, 0 \le v \le 2\pi$.

XII. Найдите поверхностные интегралы I рода.

121. $\iint_S dS$, где поверхность S: $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.
122. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность S: $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.
123. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \bigcap z \ge 0$.
124. $\iint_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$.
125. $\iint_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2$, $z \ge 0$.

126. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$ с помощью поверхностного интеграла.
127. Найдите момент инерции относительно оси *Oz* части конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = x$.
128. Найдите момент инерции относительно оси *Oz* части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$, $y \ge 0$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 2x$. Поверхностная плотность $\rho = zy$.

XIII. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения.

129. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью *Oz*.
130. $\iint_S (y^2 + z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \le y \le b$
131. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны конической поверхности

$z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью Oz).

132. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S - часть внутренней стороны гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1,\ 0\le z\le 3$.

133. $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$.