Достаточные условия существования решения задачи об условном экстремуме методом Лагранжа

В.В. Колыбасова, Н.Ч. Крутицкая

В. В. Колыбасова, Н. Ч. Крутицкая

Достаточные условия существования решения задачи об условном экстремуме методом Лагранжа

Пособие предназначено для студентов 1 курса физического факультета МГУ, изучающих математический анализ. Предполагается, что они знакомы с теорией квадратичных форм, изучаемой в курсе линейной алгебры. Сформулирована и доказана теорема о достаточных условиях условного экстремума функций нескольких переменных в матричной форме. Рассмотрены примеры применения этих условий. Приведены задачи для самостоятельной работы.

Пусть требуется исследовать, пользуясь методом Лагранжа, функцию $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ на условный экстремум при условиях связи

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m, \qquad m < n. \tag{1}$$

Обозначим точку n-мерного евклидова пространства $(x_1, \ldots, x_n)$ через M и точку $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ — через M_0.

Пусть функция $f(M)$ и функции $g_k(M)$ $(k = 1, \ldots, m)$ определены в окрестности точки M_0, и пусть координаты точки M_0 удовлетворяют условиям связи (1):

$$g_k(M_0) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Напомним определение *условного экстремума* (минимума или максимума) [1, § 3].

Определение. *Функция $f(M)$ имеет в точке M_0 условный минимум (максимум) при условиях связи* (1), *если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки $M \neq M_0$ этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям* (1), *выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ $(f(M) < f(M_0))$.*

Рассмотрим *функцию Лагранжа*

$$L(M) = f(M) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(M), \tag{3}$$

где λ_k — некоторые константы.

Напомним *необходимое* условие Лагранжа условного экстремума [1, § 3], [2].

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). *Пусть функция $f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи* (1). *Пусть функции $g_k(M)$ $(k = 1, \ldots, m)$ дифференцируемы в некоторой окрестности точки M_0, их частные производные непрерывны в точке M_0, и пусть якобиан $\frac{D(g_1, \ldots, g_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)}$ отличен от нуля в точке M_0. Тогда существуют числа $\lambda_k = \lambda_k^0$, $k = 1, \ldots, m$, при которых выполняются равенства*

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(M_0) = 0, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

В дальнейшем будем считать, что в точке M_0 выполнено необходимое условие Лагранжа условного экстремума и $\lambda_k = \lambda_k^0$, $k = 1, \ldots, m$. Предположим также, что функции $f(M)$ и $g_k(M)$ $(k = 1, \ldots, m)$ дважды дифференцируемы в самой точке M_0 (откуда следует непрерывность в точке M_0 частных производных функций $g_k(M)$).

Рассмотрим квадратную матрицу порядка $m+n$

$$H = \begin{pmatrix} O & G \\ G^T & \mathcal{L} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где O — $m \times m$-матрица из нулей,

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(M_0) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(M_0) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(M_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(M_0) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(M_0) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(M_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(M_0) & \frac{\partial g_m}{\partial x_2}(M_0) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(M_0) \end{pmatrix}, \qquad \dim G = m \times n,$$

G^T — транспонированная по отношению к G матрица, $\dim G^T = n \times m$,

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(M_0) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(M_0) \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(M_0) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(M_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1}(M_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_2}(M_0) & \ldots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(M_0) \end{pmatrix}, \qquad \dim \mathcal{L} = n \times n.$$

Заметим, что определитель матрицы $\mathcal{L}$ называется *гессианом* функции Лагранжа $L(x_1, \ldots, x_n)$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ в точке M_0. Обозначим угловые миноры матрицы (5) через $H_1, H_2, \ldots, H_{m+n}$. Сформулируем теорему о *достаточных* условиях условного экстремума.

Теорема 2 (достаточные условия экстремума). *Пусть выполнены указанные выше условия. Тогда*

1) *если знаки угловых миноров $H_{2m+1}, H_{2m+2}, \ldots, H_{m+n}$ совпадают со знаком числа $(-1)^m$, то точка M_0 является точкой условного минимума функции $f(M)$ при условиях связи* (1);

2) *если знаки угловых миноров $H_{2m+1}, H_{2m+2}, \ldots, H_{m+n}$ чередуются, причём знак минора H_{2m+1} совпадает со знаком числа $(-1)^{m+1}$, то точка M_0 является точкой условного максимума функции $f(M)$ при условиях связи* (1).

Доказательство этого утверждения приведено в конце пособия.

Примеры

Заметим, что указанные в теореме 2 условия являются *достаточными* условиями условного экстремума, но не *необходимыми*. Если они не выполняются, функция $f(M)$ может как не иметь условного экстремума в данной точке, так и иметь его. В этом случае функцию надо исследовать на условный экстремум другими способами, например, описанными в [1, § 3].

Пример 1.

Исследовать функцию $f(x,\, y) = x^2 - y^2$ на условный экстремум при условии связи $2x - y = 3$.

В данном случае $g_1(x,\, y) = 2x - y - 3$, $n = 2$, $m = 1$. Функции $f(x,\, y)$ и $g_1(x,\, y)$ дважды дифференцируемы при всех значениях аргументов, и $\frac{D(g_1)}{D(x)} = \frac{\partial g_1}{\partial x} = 2 \neq 0$.

Запишем функцию Лагранжа (3):

$$L(x,\, y) = x^2 - y^2 + \lambda_1(2x - y - 3).$$

Необходимые условия условного экстремума (2), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2\lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2y - \lambda_1 = 0, \\ g_1 &= 2x - y - 3 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем $x = 2$, $y = 1$, $\lambda_1 = -2$. Итак, есть одна точка возможного условного экстремума $M_0(2;\, 1)$. В этой точке: $\frac{\partial g_1}{\partial x}(M_0) = 2$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(M_0) = -1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0) = 2$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0) = -2$. Матрица (5) принимает вид:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $2m + 1 = m + n = 3$. Поэтому, согласно теореме 2, нужно рассмотреть только один минор H_3. Имеем: $H_3 = \det H = 6 > 0$. Его знак совпадает со знаком числа $(-1)^{m+1} = (-1)^2 = 1$, поэтому, согласно пункту 2) теоремы 2, функция $f(x,\, y)$ имеет в точке M_0 условный максимум, и значение функции в этой точке $f(M_0) = 3$.

Пример 2.

Исследовать функцию $f(x,\, y,\, z) = x + y + z$ на условный экстремум при условии связи $xyz = 1$.

В данном случае $g_1(x,\, y,\, z) = xyz - 1$, $n = 3$, $m = 1$. Функции $f(x,\, y,\, z)$ и $g_1(x,\, y,\, z)$ дважды дифференцируемы при всех значениях аргументов, и $\frac{D(g_1)}{D(x)} = \frac{\partial g_1}{\partial x} = yz$.

Запишем функцию Лагранжа (3):

$$L(x,\, y,\, z) = x + y + z + \lambda_1(xyz - 1).$$

Необходимые условия условного экстремума (2), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \lambda_1 yz = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + \lambda_1 xz = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 1 + \lambda_1 xy = 0, \\ g_1 &= xyz - 1 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем $x = y = z = 1$, $\lambda_1 = -1$. Итак, есть одна точка возможного условного экстремума $M_0(1;\, 1;\, 1)$. Заметим, что $\left.\frac{D(g_1)}{D(x)}\right|_{M_0} = \frac{\partial g_1}{\partial x}(M_0) = 1 \neq 0$. Кроме того, в этой точке $\frac{\partial g_1}{\partial y}(M_0) = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial z}(M_0) = 1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0) = -1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(M_0) = -1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(M_0) = -1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(M_0) = 0$. Матрица (5) принимает вид:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $2m + 1 = 3$, $m + n = 4$. Поэтому, согласно теореме 2, нужно рассмотреть угловые миноры H_3, H_4. Имеем:

$$H_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

и $H_4 = \det H = -3 < 0$. Поскольку знак числа $(-1)^m = (-1)^1 = -1$ совпадает со знаками миноров H_3 и H_4, то, согласно пункту 1) теоремы 2, функция $f(x,\, y,\, z)$ имеет в точке M_0 условный минимум, и значение функции в этой точке $f(M_0) = 3$.

Пример 3.

Исследовать функцию $f(x, y, z) = xy + yz$ на условный экстремум при условиях связи $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$ в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

В данном случае $g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2$, $g_2(x, y, z) = y + z - 2$, $n = 3$, $m = 2$. Функции $f(x, y, z)$, $g_1(x, y, z)$ и $g_2(x, y, z)$ дважды дифференцируемы при всех значениях аргументов, и

$$\frac{D(g_1, g_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x \neq 0,$$

т. к. $x > 0$.

Запишем функцию Лагранжа (3):

$$L(x, y, z) = xy + yz + \lambda_1(x^2 + y^2 - 2) + \lambda_2(y + z - 2).$$

Необходимые условия условного экстремума (2), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y + 2\lambda_1 x = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= y + \lambda_2 = 0, \\ g_1 &= x^2 + y^2 - 2 = 0, \\ g_2 &= y + z - 2 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему с учётом условий $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, получаем $x = y = z = 1$, $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -1$. Итак, есть одна точка возможного условного экстремума $M_0(1; 1; 1)$. В этой точке: $\frac{\partial g_1}{\partial x}(M_0) = 2$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(M_0) = 2$, $\frac{\partial g_1}{\partial z}(M_0) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}(M_0) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial y}(M_0) = 1$, $\frac{\partial g_2}{\partial z}(M_0) = 1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0) = -1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0) = 1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0) = -1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(M_0) = 1$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(M_0) = 0$. Матрица (5) принимает вид:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $2m+1 = m+n = 5$. Поэтому, согласно теореме 2, нужно рассмотреть только один минор H_5. Имеем: $H_5 = \det H = -24 < 0$.

Его знак совпадает со знаком числа $(-1)^{m+1} = (-1)^3 = -1$, поэтому, согласно пункту 2) теоремы 2, функция $f(x,\, y,\, z)$ имеет в точке M_0 условный максимум, и значение функции в этой точке $f(M_0) = 2$.

Пример 4.

Исследовать функцию $f(x,\, y,\, z,\, t) = x+y+z+t$ на условный экстремум при условии связи $xyzt = c^4$ в области $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$, если $c > 0$ — известная постоянная.

В данном случае $g_1(x,\, y,\, z,\, t) = xyzt - c^4$, $n = 4$, $m = 1$. Функции $f(x,\, y,\, z,\, t)$ и $g_1(x,\, y,\, z,\, t)$ дважды дифференцируемы при всех значениях аргументов, и $\frac{D(g_1)}{D(x)} = \frac{\partial g_1}{\partial x} = yzt \neq 0$, т. к. $y > 0$, $z > 0$ и $t > 0$.

Запишем функцию Лагранжа (3):

$$L(x,\, y,\, z,\, t) = x + y + z + t + \lambda_1 \left(xyzt - c^4 \right).$$

Необходимые условия условного экстремума (2), (4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 + \lambda_1 yzt = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 + \lambda_1 xzt = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= 1 + \lambda_1 xyt = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial t} &= 1 + \lambda_1 xyz = 0, \\ g_1 &= xyzt - c^4 = 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему с учётом условий $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $t > 0$, получаем $x = y = z = t = c$, $\lambda_1 = -1/c^3$. Итак, есть одна точка возможного условного экстремума $M_0(c,\, c,\, c,\, c)$. В этой точке: $\frac{\partial g_1}{\partial x}(M_0) = c^3$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(M_0) = c^3$, $\frac{\partial g_1}{\partial z}(M_0) = c^3$, $\frac{\partial g_1}{\partial t}(M_0) = c^3$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(M_0) = -1/c$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z}(M_0) = -1/c$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial t}(M_0) = -1/c$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z}(M_0) = -1/c$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial t}(M_0) = -1/c$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}(M_0) = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z \partial t}(M_0) = -1/c$, $\frac{\partial^2 L}{\partial t^2}(M_0) = 0$. Матрица (5) принимает вид:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & c^3 & c^3 & c^3 & c^3 \\ c^3 & 0 & -1/c & -1/c & -1/c \\ c^3 & -1/c & 0 & -1/c & -1/c \\ c^3 & -1/c & -1/c & 0 & -1/c \\ c^3 & -1/c & -1/c & -1/c & 0 \end{pmatrix}.$$

В нашем случае $2m+1=3$, $m+n=5$. Поэтому, согласно теореме 2, нужно рассмотреть миноры H_3, H_4, H_5. Имеем: $H_5=\det H=-4c^3<0$,

$$H_4=\begin{vmatrix} 0 & c^3 & c^3 & c^3 \\ c^3 & 0 & -1/c & -1/c \\ c^3 & -1/c & 0 & -1/c \\ c^3 & -1/c & -1/c & 0 \end{vmatrix}=-3c^4<0,$$

$$H_3=\begin{vmatrix} 0 & c^3 & c^3 \\ c^3 & 0 & -1/c \\ c^3 & -1/c & 0 \end{vmatrix}=-2c^5<0.$$

Мы видим, что знаки миноров H_3, H_4, H_5 совпадают со знаком числа $(-1)^m=(-1)^1=-1$, поэтому, согласно пункту 1) теоремы 2, функция $f(x,\,y,\,z,\,t)$ имеет в точке M_0 условный минимум, и значение функции в этой точке $f(M_0)=4c$.

Задачи для самостоятельного решения

Исследовать на условный экстремум функцию f при данных условиях связи.

1) $f(x,\,y)=x^2+8xy+2y^2$, $x+y=5$.

2) $f(x,\,y)=x^2+8xy+3y^2$, $9x+10y=29$.

3) $f(x,\,y)=x^2+10xy+2y^2$, $17x+16y=82$.

4) $f(x,\,y)=2x^2+10xy+3y^2$, $9x+13y=31$.

5) $f(x,\,y)=3x^2-8xy+y^2$, $10y-x=17$.

6) $f(x,\,y)=y+16x^3y$, $8x^3y^2+y=2$, в точке $M_0\left(\frac{1}{2},\,-2\right)$.

7) $f(x,\,y)=x+y$, $xy=1$.

8) $f(x,\,y)=x+y$, $x^2+y^2=2$.

9) $f(x,\,y)=x+y$, $2x^2+y^2=6$.

10) $f(x,\,y)=x+y$, $3x^2+y^2=12$.

11) $f(x,\,y)=x-y$, $\operatorname{tg}x-3\operatorname{tg}y=0$, $|x|<\pi/2$, $|y|<\pi/2$.

12) $f(x,\,y)=x+2y$, $x+2y+xy=30$.

13) $f(x,\, y) = x + 2y,\ x^2 + y^2 = 5.$

14) $f(x,\, y) = x + 9y,\ xy = 1.$

15) $f(x,\, y) = 2x + 16y,\ xy + y^2 = 7.$

16) $f(x,\, y) = 3x - 6y,\ y^2 - xy = 1.$

17) $f(x,\, y) = 4x - y,\ x^2 - y^2 = 15.$

18) $f(x,\, y) = 4x - 2y,\ x^2 + xy = -3.$

19) $f(x,\, y) = -12x + 7y,\ x^2 - xy = 35.$

20) $f(x,\, y) = 2y - 4x - 5xy,\ x^2y + x = 2.$

21) $f(x,\, y) = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 - xy = 1.$

22) $f(x,\, y,\, z) = xy + yz + xz,\ x + y + 2z + 2 = 0.$

23) $f(x,\, y,\, z) = 2xy + 2xz + yz,\ 2x + y + z = 3.$

24) $f(x,\, y,\, z) = xy + xz + yz,\ 2x^3y^2z + 4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 17$, в точке $M_0(1;\, 1;\, 1)$.

25) $f(x,\, y,\, z) = x^3 + y^2 - z^3,\ 2x + 2y - 2z = -1$, в точке $M_0\left(-1;\, \frac{3}{2};\, 1\right)$.

26) $f(x,\, y,\, z) = 27x^3 + y^3 - z^3,\ xyz = 9.$

27) $f(x,\, y,\, z) = x^3 + 27y^3 - z^3,\ xyz = -9.$

28) $f(x,\, y,\, z) = x^3 + y^3 - z^3,\ xyz = 27.$

29) $f(x,\, y,\, z) = xy^2z^3,\ x + my^2 + nz^3 = 1,\ m > 0,\ n > 0,\ y > 0,\ z > 0.$

30) $f(x,\, y,\, z) = x^2y^3z^4,\ 2x + 3y + 4z = a,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ a > 0.$

31) $f(x,\, y,\, z) = 4\ln(xz) - y + z,\ yz = 12 + x$, в точке $M_0(-24;\, 2;\, -6)$.

32) $f(x,\, y,\, z) = 8\ln(xyz) - x - y + 2z,\ yz + xz = 6$, в точке $M_0(3;\, 3;\, 1)$.

33) $f(x,\, y,\, z) = x - 2y + 2z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

34) $f(x,\, y,\, z) = x + 2y + 3z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

35) $f(x,\, y,\, z) = 2x + y - z + 1,\ x^2 + y^2 + 2z^2 = 22.$

36) $f(x,\, y,\, z) = xyz,\ xy + xz + yz = a^2,\ a > 0.$

37) $f(x,\, y,\, z) = xyz,\ x + y + z = 5,\ xy + yz + xz = 8.$

38) $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x_k} = 1$ ($\alpha_k > 0$, $c_k > 0$, $x_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$).

39) $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 = m^2$, $m > 0$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2 > 0$.

40) Доказать, что из всех четырёхугольников, описанных вокруг круга радиуса R, наименьшую площадь имеет квадрат.

Ответы

1) $f_{\max} = f(2;\,3) = 70$.

2) $f_{\max} = f(1;\,2) = 29$.

3) $f_{\max} = f(2;\,3) = 82$.

4) $f_{\max} = f(2;\,1) = 31$.

5) $f_{\min} = f(3;\,2) = -17$.

6) $f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}, -2\right) = -6$.

7) $f_{\min} = f(1;\,1) = 2$, $f_{\max} = f(-1;\,-1) = -2$.

8) $f_{\min} = f(-1;\,-1) = -2$, $f_{\max} = f(1;\,1) = 2$.

9) $f_{\min} = f(-1;\,-2) = -3$, $f_{\max} = f(1;\,2) = 3$.

10) $f_{\min} = f(-1;\,-3) = -4$, $f_{\max} = f(1;\,3) = 4$.

11) $f_{\min} = f\left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$, $f_{\max} = f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

12) $f_{\min} = f(6;\,3) = 12$, $f_{\max} = f(-10;\,-5) = -20$.

13) $f_{\min} = f(-1;\,-2) = -5$, $f_{\max} = f(1;\,2) = 5$.

14) $f_{\min} = f\left(3, \frac{1}{3}\right) = 6$, $f_{\max} = f\left(-3, -\frac{1}{3}\right) = -6$.

15) $f_{\min} = f(6;\,1) = 28$, $f_{\max} = f(-6;\,-1) = -28$.

16) $f_{\min} = f(0;\,-1) = 6$, $f_{\max} = f(0;\,1) = -6$.

17) $f_{\min} = f(4;\,1) = 15$, $f_{\max} = f(-4;\,-1) = -15$.

18) $f_{\min} = f(1;\,-4) = 12$, $f_{\max} = f(-1;\,4) = -12$.

19) $f_{\min} = f(7;\, 2) = -70,\ f_{\max} = f(-7;\, -2) = 70.$

20) $f_{\min} = f(1;\, 1) = -7,\ f_{\min} = f(-2;\, 1) = 20.$

21) $f_{\min} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{3},$
$f_{\max} = f(1;\, 1) = f(-1;\, -1) = 2.$

22) $f_{\max} = f(-1;\, -1;\, 0) = 1.$

23) $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2};\, 1;\, 1\right) = 3.$

24) $f_{\max} = f(1;\, 1;\, 1) = 3.$

25) $f_{\max} = f\left(-1;\, \frac{3}{2};\, 1\right) = \frac{1}{4}.$

26) $f_{\max} = f(-1;\, -3;\, 3) = -81.$

27) $f_{\min} = f(3;\, 1;\, -3) = 81.$

28) $f_{\max} = f(-3;\, -3;\, 3) = -81.$

29) $f_{\max} = f\left(\frac{1}{3},\, \frac{1}{\sqrt{3m}},\, \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}\right) = \frac{1}{27mn}.$

30) $f_{\max} = f\left(\frac{a}{9},\, \frac{a}{9},\, \frac{a}{9}\right) = \left(\frac{a}{9}\right)^9.$

31) $f_{\max} = f(-24;\, 2;\, -6) = 8\ln 12 - 8.$

32) $f_{\max} = f(3;\, 3;\, 1) = 16\ln 3 - 4.$

33) $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{9},\, \frac{2}{9},\, -\frac{2}{9}\right) = -1,\ f_{\max} = f\left(\frac{1}{9},\, -\frac{2}{9},\, \frac{2}{9}\right) = 1.$

34) $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{14}},\, -\frac{2}{\sqrt{14}},\, -\frac{3}{\sqrt{14}}\right) = -\sqrt{14},$
$f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\, \frac{2}{\sqrt{14}},\, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \sqrt{14}.$

35) $f_{\min} = f(-4;\, -2;\, 1) = -10,\ f_{\max} = f(4;\, 2;\, -1) = 12.$

36) $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\, -\frac{1}{\sqrt{3}},\, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{a^3}{3\sqrt{3}},\ f_{\max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\, \frac{1}{\sqrt{3}},\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{a^3}{3\sqrt{3}}.$

37) $f_{\min} = f(1;\, 2;\, 2) = f(2;\, 1;\, 2) = f(2;\, 2;\, 1) = 4,$
$f_{\max} = f\left(\frac{7}{3},\, \frac{4}{3},\, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3},\, \frac{7}{3},\, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3},\, \frac{4}{3},\, \frac{7}{3}\right) = \frac{112}{27}.$

38) $f_{\min} = f\left(\sqrt{\frac{c_1}{\alpha_1}}s,\, \ldots,\, \sqrt{\frac{c_n}{\alpha_n}}s\right) = s^2,\ s = \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{c_k\alpha_k}.$

39) $f_{\min} = f\left(-\frac{m}{s}\alpha_1,\, \ldots,\, -\frac{m}{s}\alpha_n\right) = -s,\ f_{\max} = f\left(\frac{m}{s}\alpha_1,\, \ldots,\, \frac{m}{s}\alpha_n\right) = s,$
$s = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^2}.$

Доказательство теоремы 2

Докажем сначала утверждение пункта 1).

Отметим, что согласно теореме о существовании неявных функций, заданных системой уравнений [1, § 1, теорема 2], в некоторой окрестности точки M_0 система (1) определяет единственную совокупность неявных функций:

$$\begin{gathered} x_1 = \varphi_1(x_{m+1}, \, \dots, \, x_n), \\ \vdots \\ x_m = \varphi_m(x_{m+1}, \, \dots, \, x_n). \end{gathered} \tag{6}$$

Подставив в систему (1) функции (6), мы получим тождества. Возьмём дифференциалы от левых и правых частей полученных тождеств в точке M_0, воспользовавшись свойством инвариантности первого дифференциала, и придём к равенствам:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(M_0)\, dx_i = 0, \qquad k = 1, \, \dots, \, m. \tag{7}$$

В [2] показано, что достаточным условием существования условного минимума функции $f(M)$ в точке M_0 при условиях связи (1) является выполнение неравенства $d^2L(M_0) > 0$, где

$$d^2L(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)\, dx_i \, dx_j, \tag{8}$$

при всех значениях дифференциалов $dx_1, \, \dots, \, dx_n$, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих уравнениям (7). В силу того, что $\left.\frac{D(g_1, \dots, g_m)}{D(x_1, \dots, x_m)}\right|_{M_0} \neq 0$, из линейной системы (7) можно однозначно выразить $dx_1, \, \dots, \, dx_m$ через $dx_{m+1}, \, \dots, \, dx_n$ и подставить в (8). Тогда $d^2L(M_0)$ превращается в квадратичную форму от $n - m$ независимых переменных $dx_{m+1}, \, \dots, \, dx_n$, из положительной определённости которой следует наличие условного минимума функции $f(M)$ в точке M_0.

Покажем, что при выполнении условий пункта 1) теоремы 2 неравенство $d^2L(M_0) > 0$ будет выполнено при всех $dx_1, \dots, dx_n$, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих уравнениям (7). При доказательстве будем использовать подход, изложенный в [3].

Введём обозначение: $\frac{\partial g_k}{\partial x_i}(M_0) = b_{ki}$. Теперь запишем m уравнений (7) в виде одного эквивалентного уравнения

$$\sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} b_{ki} dx_i \right]^2 = 0.$$

Левая часть полученного равенства является неотрицательно определённой квадратичной формой $B(dx_1, \ldots, dx_n)$ с коэффициентами

$$\tilde{b}_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ki} b_{kj}, \qquad \tilde{b}_{ij} = \tilde{b}_{ji}.$$

Обозначим через $A(dx_1, \ldots, dx_n)$ квадратичную форму (8) с коэффициентами $a_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(M_0)$, $a_{ij} = a_{ji}$.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если квадратичная форма*

$$C(dx_1, \ldots, dx_n) = A(dx_1, \ldots, dx_n) + \mu B(dx_1, \ldots, dx_n),$$

где $\mu = \mathrm{const}$*, при некотором значении* μ *является положительно определённой, то* $A(dx_1, \ldots, dx_n) > 0$ *при всех* $dx_1, \ldots, dx_n$*, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих условиям* (7)*.*

Доказательство. В самом деле, пусть квадратичная форма $C(dx_1, \ldots, dx_n)$ при некотором значении μ положительно определена. Если дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ не все равны нулю и удовлетворяют уравнениям (7), то $B(dx_1, \ldots, dx_n) = 0$, а поскольку $C(dx_1, \ldots, dx_n) > 0$, то выполняется неравенство $A(dx_1, \ldots, dx_n) > 0$. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *При выполнении условий п.* 1) *теоремы* 2 *квадратичная форма* $C(dx_1, \ldots, dx_n)$ *будет положительно определённой для всех достаточно больших положительных* μ*.*

Доказательство. Согласно критерию Сильвестра [4, гл. 7, § 4, п. 3], квадратичная форма $C(dx_1, \ldots, dx_n)$ является положительно определённой, если все угловые миноры её матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{k1} & a_{12} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{k2} & \ldots & a_{1n} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{kn} \\ a_{21} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{k1} & a_{22} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{k2} & \ldots & a_{2n} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{kn} b_{k1} & a_{n2} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{kn} b_{k2} & \ldots & a_{nn} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{kn} b_{kn} \end{pmatrix} \tag{9}$$

положительны.

Введём матрицы

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1i} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2i} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mi} \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Тогда i-й угловой минор матрицы (9) можно записать в виде:

$$\Delta_i = \det\left(A_i + \mu B_i^T B_i\right).$$

Рассмотрим следующее произведение квадратных блочных матриц $(m+i)$-го порядка:

$$\begin{pmatrix} -I_m & B_i \\ \mu B_i^T & A_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_m & B_i \\ O & I_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_m & O \\ \mu B_i^T & A_i + \mu B_i^T B_i \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где через I_k обозначена единичная матрица порядка k, O — нулевые матрицы соответствующей размерности.

Определитель матрицы в правой части равенства (10) равен $(-1)^m \Delta_i$, а определитель матрицы в левой части этого равенства равен произведению определителей матриц-сомножителей, и, следовательно, равен $\begin{vmatrix} -I_m & B_i \\ \mu B_i^T & A_i \end{vmatrix}$. Таким образом, из равенства (10) получаем

$$\Delta_i = (-1)^m \begin{vmatrix} -I_m & B_i \\ \mu B_i^T & A_i \end{vmatrix} = (-1)^m \begin{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{matrix} & B_i \\ \begin{matrix} \mu b_{11} & \mu b_{21} & \dots & \mu b_{m1} \\ \mu b_{12} & \mu b_{22} & \dots & \mu b_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu b_{1i} & \mu b_{2i} & \dots & \mu b_{mi} \end{matrix} & A_i \end{vmatrix}. \tag{11}$$

Пусть сначала $i \geq m$. Тогда определитель Δ_i является многочленом от μ степени не выше m, поскольку определитель порядка $m+i$ является суммой всех возможных произведений $m+i$ элементов, стоящих в разных строках и столбцах, взятых с определённым знаком [4, гл. 1, § 2, п. 2], а всего у определителя в правой части (11) имеется m столбцов, элементы которых содержат множитель μ (и не менее m строк). Найдём коэффициент при старшей степени этого многочлена. Для этого воспользуемся линейным свойством определителя [4, гл. 1, § 2, п. 4] по первому столбцу:

$$\Delta_i = (-1)^m \begin{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ \mu b_{11} & \mu b_{21} & \ldots & \mu b_{m1} \\ \mu b_{12} & \mu b_{22} & \ldots & \mu b_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu b_{1i} & \mu b_{2i} & \ldots & \mu b_{mi} \end{matrix} & \begin{matrix} B_i \\ \\ \\ A_i \end{matrix} \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)^m \begin{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ 0 & \mu b_{21} & \ldots & \mu b_{m1} \\ 0 & \mu b_{22} & \ldots & \mu b_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \mu b_{2i} & \ldots & \mu b_{mi} \end{matrix} & \begin{matrix} B_i \\ \\ \\ A_i \end{matrix} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^m \mu \begin{vmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \\ b_{11} & \mu b_{21} & \ldots & \mu b_{m1} \\ b_{12} & \mu b_{22} & \ldots & \mu b_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{1i} & \mu b_{2i} & \ldots & \mu b_{mi} \end{matrix} & \begin{matrix} B_i \\ \\ \\ A_i \end{matrix} \end{vmatrix} + P_{m-1}(\mu),$$

где $P_{m-1}(\mu)$ — многочлен степени не выше $m-1$. Применив этот приём последовательно ко второму столбцу полученного определителя, к третьему и т. д., придём к следующему равенству:

$$\Delta_i = (-1)^m \mu^m \begin{vmatrix} O & B_i \\ B_i^T & A_i \end{vmatrix} + Q_{m-1}(\mu),$$

где $Q_{m-1}(\mu)$ — также многочлен степени не выше $m-1$. Определитель, стоящий в правой части последнего равенства, совпадает с угловым минором H_{m+i} матрицы (5). Поэтому, согласно условию п. 1) теоремы 2, для $i = m+1, \ldots, n$ коэффициент при старшей степени μ в Δ_i положителен, и, следовательно, при всех достаточно больших положительных μ выполняются неравенства $\Delta_i > 0$ для $i = m+1, \ldots, n$.

Для $i = m$ имеем:

$$(-1)^m \begin{vmatrix} O & B_m \\ B_m^T & A_m \end{vmatrix} = (-1)^m \det\left(-B_m B_m^T\right) = (-1)^m \det(-B_m) \det B_m^T =$$
$$= (\det B_m)^2 = \left[\left. \frac{D(g_1, \ldots, g_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \right|_{M_0} \right]^2 > 0,$$

т. к. по условию теоремы 2: $\left. \frac{D(g_1, \ldots, g_m)}{D(x_1, \ldots, x_m)} \right|_{M_0} \neq 0$, откуда следует, что $\Delta_m > 0$ при всех достаточно больших положительных μ. Мы использовали здесь правила вычисления блочных определителей (см. [5]), а также то, что общий множитель всех элементов некоторого столбца определителя можно вынести за знак этого определителя [4, гл. 1, § 2, п. 4]: $\det(-B_m) = (-1)^m \det B_m$.

Осталось доказать, что $\Delta_i > 0$ при $i = 1, \ldots, m-1$. Рассмотрим выражение

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{k1} & a_{12} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{k2} & \ldots & a_{1i} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{ki} \\ a_{21} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{k1} & a_{22} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{k2} & \ldots & a_{2i} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{ki} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki} b_{k1} & a_{i2} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki} b_{k2} & \ldots & a_{ii} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki} b_{ki} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель является многочленом от μ степени не выше i. Найдём коэффициент при μ^i. Используя линейное свойство определителя, получаем

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{k1} & a_{12} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{k2} & \ldots & a_{1i} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1} b_{ki} \\ \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{k1} & a_{22} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{k2} & \ldots & a_{2i} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2} b_{ki} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki} b_{k1} & a_{i2} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki} b_{k2} & \ldots & a_{ii} + \mu \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki} b_{ki} \end{vmatrix} +$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{k2} & \dots & a_{1i}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{ki} \\ a_{21} & a_{22}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{k2} & \dots & a_{2i}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{ki} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{k2} & \dots & a_{ii}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{ki} \end{vmatrix} =
$$

$$
=\mu\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{k1} & a_{12}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{k2} & \dots & a_{1i}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{ki} \\ \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{k1} & a_{22}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{k2} & \dots & a_{2i}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{ki} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{k1} & a_{i2}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{k2} & \dots & a_{ii}+\mu\sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{ki} \end{vmatrix} + R_{i-1}(\mu),
$$

где $R_{i-1}(\mu)$ — многочлен степени не выше $i-1$. Применив этот приём последовательно к остальным столбцам, получим, что коэффициент при μ^i равен

$$
\begin{vmatrix} \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k1}b_{ki} \\ \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} b_{k2}b_{ki} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{k1} & \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{k2} & \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} b_{ki}b_{ki} \end{vmatrix}.
$$

Обозначим столбцы матрицы B_m через $b_1, \dots, b_m$. Поскольку $\det B_m \neq 0$, эти столбцы линейно независимы. С другой стороны, $\sum\limits_{k=1}^{m} b_{kj}b_{ks} = (b_j, b_s)$ — скалярное произведение столбцов, и последний определитель можно записать в виде

$$
\begin{vmatrix} (b_1, b_1) & (b_1, b_2) & \dots & (b_1, b_i) \\ (b_2, b_1) & (b_2, b_2) & \dots & (b_2, b_i) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (b_i, b_1) & (b_i, b_2) & \dots & (b_i, b_i) \end{vmatrix}.
$$

Это определитель Грама, построенный на столбцах $b_1, \dots, b_i$. В [4, гл. 8, § 1, п. 1] показано, что он положителен, если столбцы $b_1, \dots, b_i$ линейно независимы, а они линейно независимы как подсистема линейно независимых столбцов $b_1, \ldots, b_m$. Значит, при всех достаточно больших положительных μ выполняются неравенства $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, m-1$.

Итак, мы доказали, что при всех достаточно больших положительных μ все угловые миноры Δ_i матрицы (9) положительны, и значит, по критерию Сильвестра квадратичная форма $C(dx_1, \ldots, dx_n)$ при всех достаточно больших положительных μ является положительно определённой. Лемма 2 доказана. $\square$

Из лемм 1 и 2 следует выполнение неравенства $A(dx_1, \ldots, dx_n) > 0$ при всех $dx_1, \ldots, dx_n$, не равных одновременно нулю и удовлетворяющих условиям (7). Тем самым, утверждение пункта 1) теоремы 2 доказано.

Докажем утверждение пункта 2). Если функция $\tilde{f}(M) = -f(M)$ имеет условный минимум в точке M_0 при условиях связи (1), то функция $f(M)$ имеет в этой точке условный максимум при этих же условиях связи. Покажем, что при выполнении условий пункта 2) теоремы 2 функция $\tilde{f}(M)$ будет иметь в точке M_0 условный минимум. Для этого изменим знак также у всех функций $g_k(M)$ из условий связи (1): $\tilde{g}_k(M) = -g_k(M)$, $k = 1, \ldots, m$. Для функций $\tilde{g}_k(M)$ получим из (1), что

$$\tilde{g}_k(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad k = 1, \ldots, m.$$

Для функции $\tilde{f}(M)$ и новых условий связи функция Лагранжа будет отличаться знаком от функции Лагранжа (3), построенной для $f(M)$:

$$\tilde{L}(M) = \tilde{f}(M) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \tilde{g}_k(M) = -L(M).$$

Если для функции $L(M)$ выполнены необходимые условия экстремума (2), (4) в точке M_0 при $\lambda_k = \lambda_k^0$, $k = 1, \ldots, m$, то и для функции $\tilde{L}(M)$ при этих значениях λ_k они будут выполнены в точке M_0. Но для $\tilde{L}(M)$ изменятся знаки всех элементов матрицы H из (5). Тогда, если выполнены условия пункта 2) теоремы 2 для функции $L(M)$, то для функции $\tilde{L}(M)$ будут выполнены условия пункта 1), поскольку знаки миноров изменятся соответствующим образом (каждый минор H_{2m+i} умножится на $(-1)^{2m+i}$, $i = 1, \ldots, n-m$). Поскольку пункт 1) теоремы 2 уже доказан, то функция $\tilde{f}(M)$ должна иметь в точке M_0 условный минимум, откуда следует утверждение пункта 2) для функции $f(M)$. Пункт 2) теоремы 2 доказан. $\square$

Список литературы

[1] *В.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин.* Математический анализ в вопросах и задачах. М.: Физматлит, 2000. Гл. XI.

[2] *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* Основы математического анализа. М.: Физматлит, 2005. Ч. 1, гл. 15, § 5.

[3] *Р. Беллман.* Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. Гл. 5.

[4] *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* Линейная алгебра. М.: Физматлит, 2005.

[5] *Ф.Р. Гантмахер.* Теория матриц. М.: Наука, 1966. Гл. II, § 5, п. 3.