ОБЩИЙ ЗАЧЕТ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (3 СЕМЕСТР)

1. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого рода. Приложения.

2.1. Найдите поверхностные интегралы I рода.

2.2.1. $\iint_S dS$, где поверхность $S:\ x+y+z=1$, $x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$.

2.2.2. $\iint_S (x+y+z)dS$, где поверхность $S:\ x+y+z=1$, $x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$.

2.2.3. $\iint_S (x+y+z)dS$, где поверхность $S:\ x^2+y^2+z^2=1\bigcap z\geq 0$.

2.2.4. $\iint\limits_S (x^2+y^2)ds$, где S – граница тела V={(x,y,z):$\sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 1$}.

2.2.5. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z-\frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z=2-x^2-y^2$, $z\geq 0$.

2.3. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$ с помощью поверхностного интеграла.

2.4. Найдите момент инерции относительно оси *Oz* части конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2x$. Поверхностная плотность $\rho=x$.

2.5. Найдите момент инерции относительно оси *Oz* части сферы $x^2+y^2+z^2=1$, $z\geq 0$, $y\geq 0$, вырезанной цилиндром $x^2+y^2=2x$. Поверхностная плотность $\rho=zy$.

3. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения.

3.1. Найдите поверхностные интегралы:

3.1.1. $\iint_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x+y+z=1$, $x\in[-1;1]$, $y\in[-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью *Oz*.

3.1.2. $\iint\limits_S (y^2+z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны цилиндрической поверхности $z=\sqrt{a^2-x^2}$, $0\leq y\leq b$

3.1.3. $\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)dxdy$, где S - часть внешней стороны конической поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\leq z\leq c$ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью *Oz*).

3.1.4. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S - часть внутренней стороны гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1, 0\leq z\leq 3$.

3.1.5. $\iint_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=1$.

3.2. Найдите поток векторного поля $\vec{F}$ через поверхность S в направлении внешней нормали к S.

3.2.1. $\vec{F}=\left\{-x^3,-y^3,-z^3\right\}$, S - поверхность куба $0\le x\le a,\ \ 0\le y\le a,\ \ 0\le z\le a$.

3.2.2. $\vec{F}=\left\{0,y^3,z\right\}$, S - часть параболоида $z=x^2+y^2,\ 0\le z\le 2.$

4. Формула Остроградского - Гаусса.

4.1. Найдите интегралы, используя формулу Остроградского-Гаусса:

4.1.1. $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, где S - внутренняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

4.1.2. $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где S - внешняя сторона поверхности тела $x^2+y^2\le z\le H$.

4.1.3. $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, где S – внешняя сторона поверхности куба $x\in[-1;1],\ y\in[-1;1],\ z\in[-1;1]$.

5. Формула Стокса.

5.1. Пользуясь формулой Стокса, вычислите интегралы:

5.1.1. $\int\limits_{AB}\left(x^2-yz\right)dx+\left(y^2-xz\right)dy+\left(z^2-xy\right)dz$, где AB есть отрезок винтовой линии $x=a\cos\varphi$, $y=a\sin\varphi$, $z=\dfrac{h}{2\pi}\varphi$ от точки $A\left(a,0,0\right)$ до точки $B\left(a,0,h\right)$.

5.1.2. $\oint\limits_L y^2dx+xydy+\left(x^2+y^2\right)dz$, где L – замкнутый контур, образованный при пересечении трех плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=a$ с эллиптическим параболоидом $x^2+y^2=az$, причем $x\ge 0$, $y\ge 0$ ($a>0$). Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $\left(0,0,2a\right)$.

5.1.3. $\oint\limits_L xdx+xdy+zdz$, где L – окружность, образованная при пересечении сферы $x^2+y^2+z^2=8$ и плоскости $x=z$. Обход окружности совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $\left(0,0,5\right)$.

5.1.4. $\oint\limits_L\left(y-z\right)dx+\left(z-x\right)dy+\left(x-y\right)dz$, где L – эллипс, образованный при пересечении цилиндрической поверхности $x^2+y^2=a^2$ и плоскости $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{h}=1$ ($a>0$, $h>0$), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки $\left(2a,0,0\right)$

5.2. Пользуясь формулой Стокса, найдите циркуляцию векторного поля $\vec{F}=\left\{z^3,x^3,y^3\right\}$ вдоль контура, образованного при пересечении гиперболоида $2x^2+z^2-y^2=a^2$ и плоскости $x+y=0$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $\left(0,2a,0\right)$.

5.3. Найдите работу силового поля $\vec{F} = \{x + 3y + 2z, 2x + z, x - y\}$ вдоль замкнутого контура *MNPM*, где *MNP* – треугольник с вершинами в точках $M(1,0,0)$, $N(0,1,0)$, $P(0,0,1)$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(5,5,5)$.

6. Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях. Оператор Гамильтона. Инвариантные определения дивергенции и ротора

6.1. Найдите угол между:

6.1.1. Градиентами функций $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ и $v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$ в точке $M(3,5,4)$.

6.1.2. Градиентами скалярного поля $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках $M_1(1,2,2)$ и $M_2(-3,1,0)$.

6.2. Дифференциальные операции

6.2.1. Найдите $\mathrm{grad}\left(\dfrac{1}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6.2.2. Найдите $\mathrm{div}\vec{r}$, $\mathrm{div}(r\vec{r})$, $\mathrm{div}(r^2\vec{r})$, $\mathrm{div}(r^{-1}\vec{r})$, $\mathrm{div}(r^{-2}\vec{r})$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6.2.3. Найдите $\mathrm{grad}(uv)$, $\mathrm{grad}(u^2)$, $\mathrm{grad}\, f(u)$, $\mathrm{grad}(\sin u)$, $\mathrm{grad}\dfrac{1}{u}$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля.

6.2.4. Вычислите $\mathrm{grad}(\vec{c}, \vec{r})$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c}$ - постоянный вектор.

6.2.5. Найдите $\mathrm{div}(r\vec{c})$, $\mathrm{div}(\vec{b}(\vec{r}, \vec{c}))$ где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. а векторы $\vec{b}$, $\vec{c}$ - постоянные векторы.

6.2.6. Найдите $\mathrm{rot}\,\vec{r}$ $\mathrm{rot}(r\vec{r})$, $\mathrm{rot}\left(\dfrac{\vec{r}}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6.2.7. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\mathrm{div}(u\vec{a}) = (\mathrm{grad}\, u \cdot \vec{a}) + u\,\mathrm{div}\,\vec{a}$, где u – дифференцируемое скалярное поле, $\vec{a}$ – дифференцируемое векторное поле.

6.2.8. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\mathrm{rot}(u\vec{a}) = [\mathrm{grad}\, u \cdot \vec{a}] + u\,\mathrm{rot}\,\vec{a}$, где u – дифференцируемое скалярное поле, $\vec{a}$ – дифференцируемое векторное поле.

6.2.9. Докажите, что $\mathrm{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} - \vec{a}\,\mathrm{rot}\,\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - дифференцируемые векторные поля.

6.3. Повторные операции.

6.3.1. Докажите, что $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}\, v) = (\mathrm{grad}\, u \cdot \mathrm{grad}\, v) + u\Delta v$, где u, v - дважды дифференцируемые скалярные поля; Δ - оператор Лапласа.

6.3.2. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{a}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \Delta\vec{a}$ где $\vec{a}$ - дважды дифференцируемое векторное поле; Δ - оператор Лапласа.

6.3.3. Вычислите $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\, u$, где u – дважды дифференцируемое скалярное поле.

6.3.4. Вычислите $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{a}$, где $\vec{a}$ – дважды дифференцируемое векторное поле.

6.4. Вычислите дивергенцию электрического поля $\vec{E}$ точечного заряда e, помещенного в точку $\left(x_0, y_0, z_0\right)$.

6.5. Вычислите ротор векторного поля $\vec{a} = x\mathbf{i} + \dfrac{y}{y^2+z^2}\mathbf{j} - \dfrac{z}{y^2+z^2}\mathbf{k}$ в точках, где $y^2+z^2 \neq 0$ и циркуляцию этого поля вдоль окружности $L:\left\{y^2+z^2=1,\ x=x_0\right\}$.

6.6. Найдите поток векторного поля $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$: а) через внешнюю сторону боковой поверхности конуса $x^2+y^2 \le z^2$ ($0 \le z \le h$); б) через внутреннюю сторону основания этого конуса.

6.7. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ в направлении внешней нормали к поверхности: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2+y^2 \le a^2$ ($0 \le z \le h$); б) через полную поверхность этого цилиндра.

6.8. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через сферу $x^2+y^2+z^2 = x$ в направлении внешней нормали к поверхности.

7. Потенциальные векторные поля.

7.1. Проверьте, что векторное поле $\vec{a}$ является потенциальным и найдите его скалярный потенциал.

7.1.1. $\vec{a} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$

7.1.2. $\vec{a} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ ($x^2+y^2 \neq 0$)

7.1.3. $\vec{a} = yz\left(2x+y+z\right)\mathbf{i} + xz\left(x+2y+z\right)\mathbf{j} + xy\left(x+y+2z\right)\mathbf{k}$

7.2. Убедитесь, что векторное поле $\vec{a} = \dfrac{2}{\left(y+z\right)^{1/2}}\mathbf{i} - \dfrac{x}{\left(y+z\right)^{3/2}}\mathbf{j} - \dfrac{y}{\left(y+z\right)^{3/2}}\mathbf{k}$ является потенциальным и найдите работу этого поля вдоль пути, соединяющего точки $M\left(1,1,3\right)$ и $N\left(2,4,5\right)$ и расположенного в октанте $x>0, y>0, z>0$.

8. Соленоидальные векторные поля.

8.1. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = ye^{x^2}\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - \left(2xyze^{x^2} + z^2\right)\mathbf{k}$ является соленоидальным.

8.2. Разложите векторное поле $\vec{a} = (x+y)\mathbf{i} + (x-y)\mathbf{j} + \left(z+1\right)\mathbf{k}$ на сумму потенциального и соленоидального полей.

8.3. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ является соленоидальным и найдите его векторный потенциал.

9. Числовые ряды

9.1. Найдите сумму ряда:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;

б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^k$; в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$;

г) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

д) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$.

9.2. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos x^n}{n^2}$.

9.3. Пользуясь критерием Коши, докажите, что ряд расходится:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

9.4. Исследуйте ряды на сходимость:

9.4.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}e^{-n}$;

9.4.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin n$;

9.4.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2\sin\frac{1}{n^2+n+1}\right)$;

9.4.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos\left(n^2\right)$;

9.4.5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$;

9.4.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n!}$;

9.4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

9.4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

9.4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

9.4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$;

9.4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-n}$;

9.4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

9.4.13. $\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cos^2\frac{n\pi}{3}$;

9.4.14. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$;

9.4.15. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p}\quad p>1$;

9.4.16. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln n},\ p\le 1$;

9.4.17. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^p n}$;

9.4.18. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)}$;

9.4.19. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p\ln\frac{n-1}{n+1}$.

9.5. Исследуйте ряды на сходимость и абсолютную сходимость:

9.5.1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n}$,

9.5.2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}}$;

9.5.3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$;

9.5.4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^P}$;

9.5.5. $\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

9.5.6. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)$;

9.5.7. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n}{4}}{\ln n}$;

9.5.8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}}$;

9.5.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

+

10. . Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признаки сходимости.

10.1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном промежутке:

10.1.1. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$.

10.1.2. $f_n(x) = e^{-nx}$ а) $x \in (0,1)$; б) $x \in [1,\infty)$.

10.1.3. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0;1]$.

10.1.4. $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $x \in [1;+\infty)$; б) $x \in [0;1]$.

10.1.5. $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$, $x \in [0;+\infty)$.

10.1.6. $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^4x^4}$, $x \in (-\infty;+\infty)$.

10.2. Определите область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{x^n}$.

10.3. Определите области абсолютной и условной сходимости функциональных рядов:

10.3.1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k}{k^x}$.

10.3.2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{2k^x + (-1)^k}$

10.4. Исследуйте ряды на равномерную сходимость.

10.4.1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$, $x \in (0;+\infty)$.

10.4.2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(2kx)}{k\sqrt{k}}$, $x \in (-\infty;+\infty)$

10.4.3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$, $x \in (-\infty;+\infty)$

10.4.4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\sqrt{x}}$, $x \in [0;+\infty)$

10.4.5. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin kx}{k}$, $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$.

10.5. Определите радиус и интервал сходимости степенных рядов.

10.5.1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$

10.5.2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$

10.5.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3+(-1)^n\right)^n}{n} x^n$

11. Дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Предельный переход. Непрерывность.

11.1.Укажите область определения функции $f(x)$ и исследуйте функцию на непрерывность:

11.1.1. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, где $x \in [\varepsilon, 2\pi-\varepsilon], 0<\varepsilon<2\pi$.

11.1.2. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$,

11.1.3. $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^x}$,

11.2. Докажите, что функция $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на всей прямой $(-\infty;\infty)$.

11.3. Укажите область сходимости и найдите сумму степенного ряда:

11.3.1. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$,

11.3.2. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$,

11.3.3. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$,

11.3.4. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$,

11.3.5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$,

11.3.6. .$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$,

11.3.7. $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$.

11.4. Получите разложение в степенной ряд функции $f(x)=\operatorname{arctg} x$. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Указание: сначала разложите в степенной ряд производную $f(x)=\operatorname{arctg} x$, а потом примените почленное интегрирование.

12. Сходимость в среднем.

12.1. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=x^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке и в среднем на сегменте $[0;1]$ к функции $f(x)=0$.

12.2. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x)=nx^n\sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке сегмента $[0;1]$ к функции $f(x)=0$ и не сходится в среднем на сегменте $[0;1]$ к этой функции.

13. Несобственные интегралы.

13.1. Исследуйте сходимость интегралов:

13.1.1. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$;

13.1.2. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4+1} dx$;

13.1.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^3\sqrt{x}} dx$;

13.1.4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^3)}{x^4\sqrt{x}} dx$;

13.1.5. $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) dx$;

13.1.6. $\int_1^{+\infty} \left(\sqrt{x^3+1}-\sqrt{x^3-1}\right) dx$;

13.1.7. $\int_0^{+\infty} x\sin(x^3) dx$.

13.2. Докажите, что следующие интегралы сходятся:

13.2.1. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$;

13.2.2. $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$, $n > -1$.

13.3. Докажите, что следующие интегралы сходятся, и вычислите их:

13.3.1. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$;

13.3.2. $\int_0^{1} \ln x dx$;

13.3.3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

13.3.4. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx$.

13.4. Исследуйте интегралы на сходимость и вычислите в случае сходимости.

13.4.1. $\int_1^{+\infty} \sin(\ln x) dx$;

13.4.2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$;

13.4.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx$.

13.5. Найдите, при каких значениях параметра p сходятся интегралы:

13.5.1. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^p}$, $p > 0$;

13.5.2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$;

13.5.3. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$;

13.5.4. $\int_0^{+\infty} \frac{arctg(ax)\, dx}{x^p}$, $a > 0$.

13.6. Определите, при каких значениях параметра p интегралы сходятся абсолютно и при каких p − условно:

13.6.1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$;

13.6.2. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p}\, dx$.

14. **Несобственные интегралы, зависящие от параметра.**

14.1. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра p, используя определение равномерной сходимости несобственного интеграла.

14.1.1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$, $p \in (1;+\infty)$. $\int\limits_0^{1} \frac{dx}{x^p}$, $p \in (0;1)$;

14.1.2. $\int\limits_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx$, а) $p \in (0;+\infty)$, б) $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$;

14.1.3. $\int_0^{+\infty} e^{-px} dx$ а) $p \in (0;+\infty)$; б) $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$.

14.2. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра p, используя признаки равномерной сходимости интеграла.

14.2.1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$, $p \in [a;+\infty)$, $a > 0$;

14.2.2. $\int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x}} dx \quad p \in [0;+\infty)$;

14.2.3. $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-px} dx \quad p \in [0;+\infty)$.

14.3. Докажите, что функция $f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px)}{1+x^2} dx$ непрерывна на промежутке $p \in (-\infty;+\infty)$.

14.4. Для каких значений p сходится интеграл $\int_0^1 x^p (\ln x)^2\, dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int\limits_0^1 x^p dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.5. Для каких значений q сходится интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin qx dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos qx dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.6. Вычислите:

14.6.1. $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$, дифференцируя по параметру интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx$;

14.6.2. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, дважды дифференцируя по параметру интеграл $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx$.

14.6.3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-px} dx$, $p > 0$, дифференцируя по параметру.

14.7. Укажите область сходимости следующих интегралов и выразите их через интегралы Эйлера:

14.7.1. $\int_0^{+\infty} t^{p-1}e^{-t^2}dt$;

14.7.2. $\int_0^{+\infty} e^{-x^p}dx$;

14.7.3. $\int_0^1 (-\ln t)^p\, dt$;

14.7.4. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx$;

14.7.5. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^q}dx$;

14.7.6. $\int_0^1 (1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)}dx$, $p>0$.

15. Ряды Фурье.

15.1. Найдите ряд Фурье функций $f(x)$, нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.1.1. $f(x)=\cos^2 x$;

15.1.2. $f(x)=1$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, $f(x)=-1$, $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$, $f(x+2\pi)=f(x)$;

15.1.3. $f(x)=x$, $x\in[-\pi;\pi)$, $f(x+2\pi)=f(x)$;

15.1.4. $f(x)=\frac{\pi}{2}+x$, $x\in[-\pi;0)$, $f(x)=\frac{\pi}{2}-x$, $x\in[0;\pi)$, $f(x+2\pi)=f(x)$.

15.2. Найдите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.2.1. $f(x)=x$, $x\in[0;\pi]$;

15.2.2. $f(x)=\sin x$, $x\in[0;\pi]$.

15.3. Найдите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.3.1. $f(x)=1$, $x\in[0;\pi]$;

15.3.2. $f(x)=x$, $x\in[0;\pi]$;

15.3.3. $f(x)=\cos x$, $x\in[0;\pi]$.

15.4. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k\varphi_k$ – ряд Фурье функции $f(x)$, $x\in[0;\pi]$, по ортогональной системе функций $\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$, $x\in[0;\pi]$, $n\geq 1$. Найдите $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^2$ для следующих функций:

15.4.1. $f(x)=x$;

15.4.2. $f(x)=x(\pi-x)$.

16. Интеграл Фурье.

16.1. Представьте интегралом Фурье функцию $f(x)$:

16.1.1. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & |x|\leq\frac{\pi}{2};\\ 0, & |x|\geq\frac{\pi}{2}\end{cases}$;

16.1.2. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}.$

16.2. Найдите преобразование Фурье функций $f(x)$:

16.2.1. $f(x) = e^{-p|x|}$, $p > 0$;

16.2.2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$;

16.2.3. $f(x) = e^{-p|x|} \sin \beta x$, $p > 0$;

16.2.4. $f(x) = 1$, $x \in [-p; p]$, $f(x) = 0$, $x \notin [-p; p]$.