

ВАРИАНТ 4.

1. Укажите, при каких значениях  $p$  интеграл  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{\ln(1+x^p)} dx$  а) сходится абсолютно; б) сходится условно.

**Решение.** Сделаем замену переменных  $x^p \Big|_0^{\infty} = t \Big|_0^{\infty}$ ;  $x = t^{1/p}$ ;  $dx = \frac{1}{p} t^{\frac{1}{p}-1} dt$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{\ln(1+x^p)} dx &= \frac{1}{p} \int_0^{\infty} \frac{\sin t dt}{\ln(1+t) t^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{p} \left( \int_0^1 \frac{\sin t dt}{\ln(1+t) t^{\frac{1}{p}}} + \int_1^{\infty} \frac{\sin t dt}{\ln(1+t) t^{\frac{1}{p}}} \right) = \\ &= \frac{1}{p} \left( \int_0^1 \frac{(t + o(t)) dt}{t^{\frac{1}{p}}} + \int_1^{\infty} \frac{\sin t dt}{\ln(1+t) t^{\frac{1}{p}}} \right). \end{aligned}$$

Первый интеграл является несобственным интегралом 2 рода. Это интеграл от знакоопределенной функции, поэтому область его условной сходимости совпадает с областью абсолютной сходимости. Согласно признаку сравнения, он сходится абсолютно

$$\text{при } -1 - \frac{1}{p} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} p > 0 \\ p < -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Второй интеграл является несобственным интегралом 1 рода и, согласно признаку

$$\text{сравнения, сходится абсолютно при } 1 - \frac{1}{p} > 1 \Leftrightarrow p < 0.$$

Исходный интеграл сходится абсолютно при  $p < -\frac{1}{2}$ .

$$\text{Второй интеграл, согласно признаку Дирихле, сходится условно при } 1 - \frac{1}{p} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} p < 0; \\ p \geq 1. \end{cases}$$

Исходный интеграл сходится условно при  $p \geq 1$ .

2. Исследуйте интеграл  $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$  на равномерную сходимость на множестве  $p \in (0; 1)$ .

**Решение.** Для того, чтобы применить практический критерий, сведем несобственный интеграл 2 рода к несобственному интегралу 1 рода при помощи замены

$$x = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{dt}{t^2}; \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \int_1^{\infty} \frac{t^p dt}{t^2} = \int_1^{\infty} t^{p-2} dt. \quad \text{Применим практический критерий:}$$

$$\limsup_{R \rightarrow +\infty} \sup_{p \in (0;1)} \left( \int_R^{+\infty} t^{p-2} dt \right) = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \sup_{p \in (0;1)} \frac{t^{p-1}}{p-1} \Big|_R^{+\infty} = \limsup_{R \rightarrow +\infty} \sup_{p \in (0;1)} \frac{R^{p-1}}{1-p} = \infty \quad (p = 1).$$

Нет равномерной сходимости.

3. Покажите, что при  $\alpha \in [0; A_0]$  выполнены условия теоремы о дифференцировании

$$\text{интеграла } I(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{-e^{-x} \cos \alpha x + e^{-x}}{x} dx \text{ по параметру и вычислите интеграл}$$

$\int_0^{\infty} \frac{-e^{-x} \cos x + e^{-x}}{x} dx$  при помощи дифференцирования по параметру. **Совет:**

используйте условие  $I(0) = 0$ .

**Решение.** Проверим выполнение условий теоремы.

1) Подынтегральная функция может быть доопределена до непрерывности в точке  $x = 0$ ,

поскольку  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} \cos \alpha x + e^{-x}}{x} = 0$ .

2) Интеграл  $I(\alpha)$  является несобственным интегралом 1 рода (поскольку

подынтегральная функция не имеет особенностей в нуле) и равномерно сходится при

$\alpha \in [0; A_0]$ , поскольку  $\int_a^{\infty} \frac{-e^{-x} \cos \alpha x + e^{-x}}{x} dx$ ,  $a > 0$  мажорируется сходящимся

интегралом  $\int_a^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$ , а  $\int_0^a \frac{-e^{-x} \cos \alpha x + e^{-x}}{x} dx$  - собственный, определенный.

3)  $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha} = e^{-x} \sin \alpha x$  непрерывна при  $x \in [0; +\infty)$ .

4)  $\frac{\partial I}{\partial \alpha} = I_{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \alpha x dx$  сходится равномерно при  $\alpha \in [0; A_0]$ , поскольку

$\int_a^{\infty} e^{-x} \sin \alpha x dx$ ,  $a > 0$  мажорируется сходящимся интегралом  $\int_a^{\infty} e^{-x} dx$ , а  $\int_0^a e^{-x} \sin \alpha x dx$  -

собственный, определенный.

$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = I_{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin \alpha x dx = \text{Im} \int_0^{\infty} e^{(-1+i\alpha)x} dx = \text{Im} \frac{-1}{-1+i\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ ;  $I(\alpha) = \ln(1+\alpha^2)$

(мы учли условие  $I(0) = 0$ ). В задаче требуется найти  $I(1) = \ln 2$ .

4. Вычислите интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sh } x e^{-x^2-x} dx$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sh } x e^{-x^2-x} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^x - e^{-x}) e^{-x^2-x} dx = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\pi} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-2x} dx \right) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\pi} - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-1)^2+1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{\pi} - e\sqrt{\pi}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (e-1). \end{aligned}$$

5. Вычислите интеграл  $\int_0^1 \sqrt[4]{1-x^4} x^6 dx$ . **Совет:** сведите к интегралу Эйлера.

**Решение.**

$$\begin{aligned} x^4 = t; x = t^{\frac{1}{4}}; dx = \frac{1}{4} t^{\frac{1}{4}-1} dt; \int_0^1 \sqrt[4]{1-x^4} x^6 dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 (1-t)^{\frac{5}{4}-1} t^{\frac{7}{4}-1} dt = \frac{1}{4} B\left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right) = \\ &= \frac{\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3}{128} \frac{\pi}{\sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{128}. \end{aligned}$$