Теоретический зачет, часть 1. Поверхностные интегралы и теория поля.

Поверхность, касательная плоскость, площадь поверхности.

1. Сформулируйте определение двусторонней поверхности.
2. Приведите пример поверхности, не являющейся двусторонней.
3. Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной параметрически.
4. Запишите выражение для координат вектора нормали к поверхности, заданной параметрически.
5. Запишите уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной в форме $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$.
6. Запишите выражение для координат вектора нормали к поверхности, заданной в форме $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$.
7. Сформулируйте определение площади поверхности.
8. Запишите формулу для площади поверхности, заданной в форме $z = f\left(x,y\right)$, $\left(x,y\right) \in D$.
9. Запишите формулу для площади поверхности, заданной параметрически.
10. Сформулируйте теорему о вычислении площади поверхности, заданной уравнением $z = f(x,y)$, $\left(x,y\right) \in D$.

Поверхностные интегралы

11. Сформулируйте определение поверхностного интеграла первого рода.
12. Сформулируйте теорему о существовании поверхностного интеграла первого рода.
13. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода, если поверхность задана в параметрической форме.
14. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла первого рода, если поверхность S задана в виде $z = f(x,y)$, $\left(x,y\right) \in D$.
15. Сформулируйте определение поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S P\left(x,y,z\right)dydz$.
16. Сформулируйте определение поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S Q\left(x,y,z\right)dzdx$.
17. Сформулируйте определение поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S R\left(x,y,z\right)dxdy$.
18. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S P\left(x,y,z\right)dydz$, если поверхность S задана в параметрической форме.
19. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S Q\left(x,y,z\right)dzdx$, если поверхность S задана в параметрической форме.
20. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S R\left(x,y,z\right)dxdy$, если поверхность S задана в параметрической форме.
21. Запишите формулу для вычисления поверхностного интеграла второго рода $\iint\limits_S R\left(x,y,z\right)\cos\gamma d\sigma$, если поверхность S задана в виде $z = f\left(x,y\right)$, $\left(x,y\right) \in D$ γ – угол между нормалью к верхней (нижней) стороне поверхности и осью Oz.

Вычисление поверхностных интегралов

22. Вычислите площадь поверхности S: $\{ z = 3x + 4y,\ x^2 + y^2 \le 1 \}$.
23. Вычислите площадь поверхности S: $\{ z = \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 \le 1 \}$.
24. Вычислите площадь поверхности S: $\{ 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \le 1 \}$.
25. Вычислите площадь поверхности S: $\{ z = xy,\ x^2 + y^2 \le 1 \}$
26. Найдите $\iint_S dS$, если $S:\ x + y + z = 1,\ x \in [-1;1],\ y \in [-1;1]$.
27. Найдите $\iint_S (x + y + z)dS$, если $S:\ x + y + z = 1,\ x \in [-1;1],\ y \in [-1;1]$.
28. Найдите $\iint_S (x + y + z)dS$, если $S:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cap z \ge 0$.
29. Найдите $\iint\limits_S (x^2 + y^2)ds$, если S – граница тела $V=\{(x,y,z): \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 1\}$.
30. Найдите $\iint\limits_\Phi dxdy$, если Φ – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.
31. Найдите $\iint\limits_\Phi dydz$, если Φ – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.
32. Найдите $\iint\limits_\Phi dzdx$, если Φ – часть конической поверхности $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 1$, $x \ge 0$, нормаль к которой образует острый угол с осью Oz.
33. Найдите $\iint\limits_\Phi dxdy$, если Φ – поверхность $x + y + z = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль образует острый угол с осью Oz.
34. Найдите $\iint\limits_\Phi dydz$, если Φ – поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль образует острый угол с осью Oz.
35. Найдите $\iint\limits_\Phi dxdz$, если Φ – поверхность $x^2 + y^2 = 1 - z$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, нормаль образует острый угол с осью Oz.

Приложения поверхностных интегралов

36. Запишите формулу для вычисления массы гладкой ограниченной поверхности S, заданной уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$.
37. Запишите формулу для вычисления массы гладкой ограниченной поверхности S, заданной в параметрической форме, с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$.
38. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс гладкой ограниченной поверхности S, заданной уравнением $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$, с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$.
39. Запишите формулу для вычисления x – координаты центра масс гладкой ограниченной поверхности S, заданной в параметрической форме, с поверхностной плотностью $\rho(x,y,z)$.
40. Найдите координаты центра масс части однородной сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0$, поверхностная плотность ρ_0.

41. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox гладкой ограниченной поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$.
42. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Ox гладкой ограниченной поверхности S, заданной в параметрической форме, с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$.
43. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy гладкой ограниченной поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$.
44. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oy гладкой ограниченной поверхности S, заданной в параметрической форме, с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$.
45. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oz гладкой ограниченной поверхности S, заданной уравнением $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$.
46. Запишите формулу для вычисления момента инерции относительно оси Oz гладкой ограниченной поверхности S, заданной в параметрической форме, с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$.

Связные множества

47. Сформулируйте определение связного множества точек в пространстве.
48. Сформулируйте определение объемно–односвязной области в пространстве. Приведите пример области, не являющейся объемно-односвязной.
49. Сформулируйте определение поверхностно–односвязной области в пространстве. Приведите пример области, не являющейся поверхностно-односвязной.

Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса

50. Сформулируйте теорему о формуле Стокса.
51. Запишите формулу Стокса в векторной форме.
52. Сформулируйте теорему об условиях независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования в пространстве.
53. Сформулируйте теорему о формуле Остроградского-Гаусса.
54. Запишите формулу Остроградского-Гаусса в векторной форме.
55. Докажите, что циркуляция постоянного векторного поля $\vec{a}$ вдоль любого замкнутого кусочно-гладкого контура равна нулю.
56. Докажите, что поток постоянного векторного поля $\vec{a}$ через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность равен нулю.
57. Докажите, что объём V тела, ограниченного гладкой поверхностью S, равен $V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,ds$, где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.
58. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найдите интеграл $\iint\limits_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos\gamma \right) ds$, где S –гладкая поверхность, ограничивающая область D, $\cos\alpha$, $\cos\beta$ $\cos\gamma$ – направляющие косинусы внешней

нормали к поверхности S, функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеют в области D непрерывные частные производные второго порядка.

59. Докажите, что $\iint\limits_S P\cos\alpha ds = \iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x} dV$, если $P(M)$ – непрерывно дифференцируемое скалярное поле в простой области G, ограниченной поверхностью S, α - угол между внешней нормалью к поверхности и осью Ox.

60. Докажите, что $\iint\limits_S Q\cos\beta ds = \iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x} dV$, если $Q(M)$ – непрерывно дифференцируемое скалярное поле в простой области G, ограниченной поверхностью S, β - угол между внешней нормалью к поверхности и осью Oy.

61. Докажите, что $\iint\limits_S R\cos\gamma ds = \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z} dV$, если $R(M)$ – непрерывно дифференцируемое скалярное поле в простой области G, γ - угол между внешней нормалью к поверхности и осью Oz.

62. Докажите, что если S – гладкая поверхность, ограничивающая замкнутую область V, и $u(x,y,z)$ имеет в V непрерывные частные производные второго порядка, то $\iint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint\limits_V \Delta u dx dy dz$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к поверхности S, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа.

63. Докажите, что если S – гладкая поверхность, ограничивающая замкнутую область V, и $u(x,y,z)$ имеет в V непрерывные частные производные второго порядка, .то $\iint\limits_S u\frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint\limits_V \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right) dx dy dz + \iiint\limits_V u\Delta u dx dy dz$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к поверхности S, Δ − оператор Лапласа.

64. Докажите, что если S – гладкая поверхность, ограничивающая замкнутую область V и функции $u(x,y,z)$ и $v(x,y,z)$ имеют в V непрерывные частные производные второго порядка, .то $\iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n} ds = \iiint\limits_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) dx dy dz + \iiint\limits_V v\Delta u dx dy dz$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к поверхности S, Δ − оператор Лапласа.

Элементы теории поля

65. Сформулируйте определение градиента скалярного поля в декартовой системе координат.
66. Сформулируйте определение дивергенции векторного поля в декартовой системе координат.
67. Сформулируйте определение ротора векторного поля в декартовой системе координат.
68. Сформулируйте определение потенциального поля.
69. Сформулируйте определение циркуляции векторного поля вдоль кривой.
70. Сформулируйте необходимое и достаточное условие потенциальности поля, использующее понятие циркуляции.

71. Сформулируйте необходимое и достаточное условие потенциальности поля, использующее понятие ротора.
72. Пусть $\vec{a}$ – потенциальное поле. Докажите, что $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$.
73. Пусть $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ в поверхностно–односвязной области. Докажите, что поле $\vec{a}$ – потенциальное.
74. Сформулируйте определение соленоидального векторного поля.
75. Сформулируйте необходимое и достаточное условие соленоидальности векторного поля.
76. Сформулируйте определение потока векторного поля через заданную сторону поверхности.
77. Сформулируйте инвариантное определение дивергенции.
78. Сформулируйте инвариантное определение ротора.
79. Запишите формулу для $\operatorname{grad} u$ в полярных координатах.
80. Запишите формулу для $\operatorname{grad} u$ в цилиндрических координатах.
81. Запишите формулу для $\operatorname{grad} u$ в сферических координатах.
82. Запишите формулу для $\operatorname{div}\vec{a}$ в цилиндрических координатах.
83. Запишите формулу для $\operatorname{div}\vec{a}$ в сферических координатах.
84. Запишите формулу для $\operatorname{rot}\vec{a}$ в сферических координатах.
85. Запишите формулу для $\operatorname{rot}\vec{a}$ в цилиндрических координатах.
86. Сформулируйте определение оператора Лапласа Δ и запишите его в декартовых координатах.
87. Сформулируйте определение оператора Лапласа Δ, используя оператор Гамильтона ∇.
88. Запишите формулу для оператора Лапласа в цилиндрических координатах.
89. Запишите формулу для оператора Лапласа в сферических координатах.
90. Запишите формулу для оператора Лапласа в полярных координатах.
91. Используя оператор ∇, докажите, что $\operatorname{div}[\vec{a},\vec{b}] = \vec{b}\operatorname{rot}\vec{a} - \vec{a}\operatorname{rot}\vec{b}$.
92. Используя оператор ∇, докажите, что $\operatorname{rot}(u\vec{a}) = [\operatorname{grad} u \cdot \vec{a}] + u\operatorname{rot}\vec{a}$.
93. Используя оператор ∇, докажите, что $\operatorname{div}(u\vec{a}) = (\operatorname{grad} u \cdot \vec{a}) + u\operatorname{div}\vec{a}$.
94. Используя оператор ∇, докажите, что $\operatorname{div}(u \cdot \operatorname{grad} v) = (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v) + u\Delta v$.
95. Используя оператор ∇, докажите тождество $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{a}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}$.
96. Используя оператор ∇, докажите тождество $\operatorname{rot}\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a} - \left(\vec{a},\nabla\right)\vec{b} + \vec{a}\operatorname{div}\vec{b} - \vec{b}\operatorname{div}\vec{a}$.
97. Используя оператор ∇, докажите тождество $\operatorname{grad}\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\nabla\right)\vec{b} + \left(\vec{b},\nabla\right)\vec{a} + \left[\vec{a},\operatorname{rot}\vec{b}\right] + \left[\vec{b},\operatorname{rot}\vec{a}\right]$.
98. Найдите $\left(\vec{b},\vec{\nabla}\right)\vec{r}$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ - постоянный вектор.
99. Найдите $\operatorname{grad}(\vec{c},\vec{r})$, если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянный вектор.
100. Найдите $\operatorname{rot}\left[\vec{c},\vec{r}\right]$, если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянный вектор.
101. Найдите $\operatorname{div}(\vec{b}(\vec{r},\vec{c}))$, если $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянные векторы, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
102. Найдите $\operatorname{div}\left[\vec{c},\vec{r}\right]$, если $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянный вектор.
103. Найдите $\operatorname{div}(r\vec{c})$, если; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ – постоянный вектор.

104. Найдите $\operatorname{grad}\left(r\cdot(\vec{a},\vec{r})\right)$, если
$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\quad \vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ – постоянный вектор.
105. Преобразуйте выражение $\operatorname{grad}(uv)$, где u , v – дифференцируемые скалярные поля.
106. Преобразуйте выражение $\operatorname{div}\left(u\operatorname{grad}v\right)$, где u , v – дважды дифференцируемые скалярные поля.
107. Преобразуйте выражение $\operatorname{rot}\left(u\operatorname{grad}v\right)$, где u , v – дважды дифференцируемые скалярные поля.
108. Преобразуйте выражение $\operatorname{div}\left(u\operatorname{grad}v\right)$, где u , v – дважды дифференцируемые скалярные поля.
109. Найдите $\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}f\left(r\right)\right)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ и f – дважды дифференцируемая функция.
110. Найдите $\operatorname{div}\left(r^5\left(\vec{a},\vec{r}\right)\vec{r}\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

111. Найдите $\operatorname{rot}\left(r^5\left(\vec{a},\vec{r}\right)\vec{r}\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

112. Найдите $\operatorname{rot}\left(r\left(\vec{a},\vec{r}\right)\vec{r}\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

113. Найдите $\operatorname{grad}\left(r\cdot\left(\vec{a},\vec{r}\right)^7\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

114. Найдите $\operatorname{grad}\left(r^7\left(\vec{a},\vec{r}\right)\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

115. Найдите $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(r^4\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

116. Найдите $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\left(\vec{a},\vec{r}\right)^5\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

117. Найдите $\operatorname{grad}\left(r\cdot\left(\vec{a},\vec{r}\right)^4\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

118. Найдите $\operatorname{div}\operatorname{grad}\left(r^2\left(\vec{a},\vec{r}\right)\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.

119. Найдите $\operatorname{div}\left(r^2\left(\vec{a},\vec{r}\right)\cdot\vec{r}\right)$, где $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ - постоянный вектор.
120. При каком значении n верно равенство $\operatorname{div}\left(\vec{r}\cdot r^n\right)=0$, где
$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}, r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$