Семинар №11

Пусть $f(x)$ определена в нек окр-ти точки a

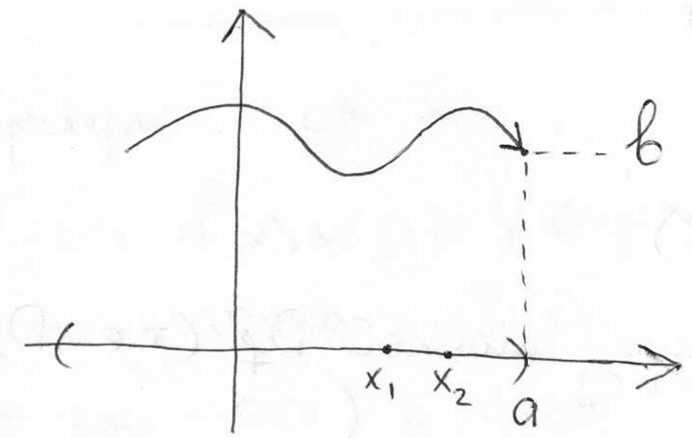
(т.е. симм.)

$\Leftrightarrow$ определена в нек ε окр-ти точки a

$\exists \varepsilon > 0 : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset D_f$

$\Rightarrow$ Утв. $f(a+0) = f(a-0) = b \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

($\exists$-ие подразум-ся) $\quad (\neq f(a))$



$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

$\exists \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$

$\nexists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \varnothing$

По Гейне: $\forall \{x_n\}$: –״– $\Rightarrow$ –״–

Но у нас $\nexists$ ни одной $\{x_n\}$: –״–. Поэтому $\Rightarrow$?

По договорённости считают, что $\lim \nexists$

Предел на ∞-ти

Пусть задана $f(x)$ и пусть ∞ явл-ся пред т-й обл D_f (т.е. D_f неогр) $\}$ неогр значит неогр хотя бы снизу или сверху

Опр 1 Число b наз пределом $f(x)$ при $x \to \infty$, если

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists A = A(\varepsilon) > 0 : \forall x :$

1) $x \in D_f$

2) $|x| > A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > A \\ x < -A \end{array}\right.$

$\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$

~~Опр 2 Число b наз пределом f(x) при x → ∞, если~~

Обозн $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$

$f(x) \to b,\ x \to \infty$

Опр 2 $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если $\forall \{x_n\}$:

1) $x_n \in D_f$

2) $x_n \to \infty$ (б.б.)

$\Rightarrow f(x_n) \to b$

Зам $A \geq A_0$ $A = A(\cancel{\varepsilon})$

Пусть $+\infty$ явл-ся пред точкой D_f (т.е. D_f неогр сверху)

Опр Если в опр 1 вып

2) $x > A$ - более сильное усл-ие

или в опр 2 вып

2) $x_n \to +\infty$,

то говорят, что число b есть предел f(x) при $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$

Пусть $-\infty$ явл-ся пред точкой D_f (т.е. D_f неогр снизу)

Опр Если в опр 1 вып

2) $x < -A$

или в опр 2 вып

2) $x_n \to -\infty$,

то говорят, что число b есть предел $f(x)$ при $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b$$

Св-ва пределов

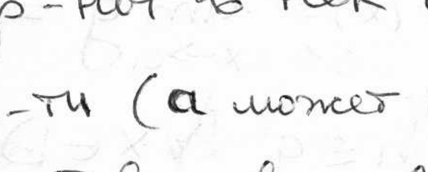
Арифм-ие св-ва

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ опр-ны в нек обл-ти D и a пред точка этой обл-ти (a может р-ся ∞, $+\infty$ или $-\infty$) и пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$

$\Rightarrow$ 1) $\lim\limits_{x\to a}(f \pm g) = \lim\limits_{x\to a} f \pm \lim\limits_{x\to a} g$

2) $\lim\limits_{x\to a} fg = \lim\limits_{x\to a} f \lim\limits_{x\to a} g$

3) $c \neq 0 \Rightarrow \exists$ такая выкол окр т. a, в кот $g(x) \neq 0$ $\forall x \in D$



$\Rightarrow$ в этой окр-ти опред-но отн f/g и $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f}{\lim\limits_{x\to a} g}$

Зам Если $\exists$ предел в левой части и один из пределов в правой, то $\exists$ и другой предел в правой части

След Пусть задана нек рац ф-я 11.4

$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, причём $Q_m(a) \neq 0$, где

a - конечное число $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} R(x) = R(a) = \frac{P_n(a)}{Q_m(a)}$

Зам Рац ф-ю наз-т также рац дробью

Лемма о двух милиционерах

Пусть $f(x)$, $h(x)$ и $g(x)$ опр-ны в нек обл D и a пред точка этой обл. Пусть, кроме того,

1) $\lim\limits_{x \to a} f = \lim\limits_{x \to a} g = b$

2) $f \leq h \leq g \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} h = b$

Утв Пусть $f(x)$ и $g(x)$ опр в D и a её пр т..
Пусть, кроме того,

1) $\lim\limits_{x \to a} f = b$, $\lim\limits_{x \to a} g = c$

2) $f \leq g \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow b \leq c$

Зам 1 Даже если бы было 2) $f < g$, то $\not\Rightarrow b < c$

Зам 2 В кач-ве a в посл-х 2-х утв-х могла выступать ∞-но удал-я точка

- перерыв

К/р №1 (англ) - 60 мин