

Дополнительные вопросы для проведения  
экзамена по математическому анализу на  
экспериментальном потоке  
Третий семестр

1. Сформулировать определение первой квадратичной формы гладкой поверхности и вычислить ее для поверхности вращения.
2. Сформулировать определение изометричных гладких поверхностей и привести примеры (локально) изометричных гладких поверхностей.
3. Дать определение нормальной кривизны поверхности, второй квадратичной формы поверхности и индикатрисы кривизны поверхности.
4. Дать качественную классификацию точек гладкой поверхности в зависимости от типа индикатрисы кривизны.
5. Вывести формулу Эйлера для нормальной кривизны гладкой поверхности в данной точке. Дать определение главных кривизн поверхности в данной точке и классифицировать точки гладкой поверхности в зависимости от значений главных кривизн.
6. Получить формулу для главных кривизн гладкой поверхности в данной точке через коэффициенты первой и второй квадратичных форм, а также формулы для полной и средней кривизны.
7. Дать определение линий кривизны и канонического репера гладкой поверхности. Вывести дериационные формулы для канонического репера гладкой поверхности.
8. Сформулировать и доказать «блистательную» теорему Гаусса.
9. Вывести уравнения Петерсона-Майнарди-Кодацци для канонического репера.
10. Вывести формулу для дивергенции векторного поля в ортогональных криволинейных координатах.
11. Вывести формулу для ротора векторного поля в ортогональных криволинейных координатах.
12. Сформулировать и доказать теорему Коши о перестановке членов абсолютно сходящегося числового ряда.

13. Сформулировать и доказать теорему Римана о перестановке членов условно сходящегося числового ряда.
14. Сформулировать и доказать критерий сходимости бесконечного произведения в терминах сходимости бесконечного ряда.
15. Сформулировать и доказать критерий сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k), \quad a_k > 0.$$

16. Сформулировать и доказать признак сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$

при произвольных знаках чисел  $a_k$ .

17. Сформулировать и доказать признаки расходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$$

к нулю.

18. Сформулировать и доказать критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k).$$

19. Вывести бесконечное произведение Эйлера для  $\Gamma$ -функции.
20. Вывести бесконечное произведение Вейерштрасса для  $\Gamma$ -функции.
21. Доказать формулу Эйлера для дзета-функции Римана.
22. Привести пример Ван-дер-Вардена непрерывной на вещественной прямой нигде не дифференцируемой функции.
23. Сформулировать и доказать критерий существования в нормированном пространстве скалярного произведения, согласованного с нормой.
24. Доказать, что в пространстве  $C[a, b]$  не существует скалярного произведения, согласованного с нормой.
25. Доказать неравенство Гельдера.
26. Доказать интегральное неравенство Минковского.
27. Доказать соотношения между поточечной сходимостью, сходимостью по норме пространства  $Q^{(p)}[a, b]$  и равномерной сходимостью функциональных последовательностей.

28. Сформулировать и доказать теорему Арцела.
29. Сформулировать и доказать критерий сходимости несобственного интеграла от неотрицательной неограниченной функции по ограниченной области евклидовой плоскости (теорема 5.9 курса лекций).
30. Сформулировать и доказать теорему о сходимости абсолютно сходящегося несобственного интеграла по ограниченной области евклидовой плоскости.
31. Сформулировать и доказать общий признак сравнения для несобственных интегралов по ограниченной области евклидовой плоскости.
32. Сформулировать и доказать частный признак сравнения для несобственных интегралов по ограниченной области евклидовой плоскости.
33. Сформулировать и доказать теорему об абсолютной сходимости сходящегося несобственного интеграла по ограниченной области евклидовой плоскости.
34. Дать определение гильбертова пространства и проверить его для пространства  $\ell_2$ .
35. Сформулировать и доказать теорему Фейера.
36. Привести пример соленоидального векторного поля, не имеющего векторного потенциала.
37. Привести пример безвихревого векторного поля, не имеющего скалярного потенциала.
38. Сформулировать и доказать закон сохранения интенсивности векторной трубки соленоидального векторного поля.
39. Доказать, что декартовы компоненты соленоидального и безвихревого векторного поля являются гармоническими функциями.
40. Дать определение фундаментальной последовательности в метрическом пространстве. Привести примеры сходящихся и несходящихся фундаментальных последовательностей в метрических пространствах.
41. Дать определение полного метрического пространства. Привести примеры полных и неполных метрических пространств.
42. Сформулировать определение сходимости несобственного интеграла от неограниченной функции по ограниченной области евклидовой плоскости.