

### Утверждения с доказательством.

1. Сформулируйте и докажите теорему о представлении функции интегралом Фурье.
2. Сформулируйте и докажите принцип локализации (Римана) для ряда Фурье.\*)
3. Сформулируйте и докажите теорему о равенстве Парсеваля (необходимое и достаточное условие замкнутости ортогональной системы).
4. Сформулируйте и докажите теорему о поточечной сходимости ряда Фурье по тригонометрической системе.
5. Сформулируйте и докажите теорему об экстремальном свойстве конечной суммы ряда Фурье по произвольной ортогональной системе и ее следствия.
6. Докажите полноту замкнутой ортогональной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
7. Докажите замкнутость полной ортогональной системы в полном бесконечномерном евклидовом пространстве.
8. Докажите теорему о равномерной сходимости ряда Фурье.
9. Докажите теорему о почленном дифференцировании ряда Фурье.
10. Докажите теорему Вейерштрасса о равномерной аппроксимации функции тригонометрическим многочленом.
11. Докажите теорему Вейерштрасса о равномерной аппроксимации функции многочленом.
12. Докажите теорему о замкнутости тригонометрической системы и ее следствия.
13. Докажите ортогональность системы полиномов Лежандра в пространстве  $Q[-1, 1]$ .\*)
14. Вычислите нормы полиномов Лежандра в пространстве  $Q[-1, 1]$ .\*)
15. Докажите существование замкнутой ортогональной системы в гильбертовом пространстве.\*)
16. Докажите полноту пространства  $\ell_2$ .\*)
17. Докажите сепарабельность пространства  $\ell_2$ .\*)

\*) - только для 1 потока.

### Утверждения без доказательства.

1. Запишите формулы прямого и обратного преобразования Фурье. Для каких функций они справедливы ?
2. Запишите формулы для косинус-преобразования Фурье и обратного косинус-преобразования Фурье функции. Для каких функций они справедливы ?
3. Запишите формулы для синус-преобразования Фурье и обратного синус-преобразования Фурье функции. Для каких функций они справедливы ?
4. Запишите формулу для вычисления коэффициентов ряда Фурье четной функции по основной тригонометрической системе. Запишите ряд Фурье четной функции.
5. Запишите формулу для вычисления коэффициентов ряда Фурье нечетной функции по основной тригонометрической системе. Запишите ряд Фурье нечетной функции.

6. Сформулируйте теорему о представлении функции интегралом Фурье.
7. Запишите ряд Фурье функции из пространства  $Q[a, b]$  по произвольной ортогональной системе функций в пространстве  $Q[a, b]$  и выражения для коэффициентов этого ряда.
8. Запишите равенство Парсеваля. Сформулируйте теорему о равенстве Парсеваля (необходимое и достаточное условие замкнутости ортогональной системы).
9. Дайте определение кусочно-гладкой на сегменте  $[a, b]$  функции. Приведите пример непрерывной, но не кусочно-гладкой на сегменте  $[a, b]$  функции.
10. Сформулируйте теорему о поточечной сходимости ряда Фурье.
11. Сформулируйте принцип локализации (Римана) для ряда Фурье.
12. Сформулируйте теорему об экстремальном свойстве конечной суммы ряда Фурье по произвольной ортогональной системе.
13. Запишите тождество и неравенство Бесселя.
14. Дайте определение замкнутой ортогональной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
15. Дайте определение полной ортогональной системы в бесконечномерном евклидовом пространстве.
16. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости ряда Фурье.
17. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании ряда Фурье.
18. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о равномерной аппроксимации функции тригонометрическим многочленом.
19. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о равномерной аппроксимации функции многочленом.
20. Сформулируйте теорему о замкнутости тригонометрической системы и ее следствия.
21. Дайте определение сепарабельного метрического пространства.\*)
22. Дайте определение гильбертова пространства.\*)
23. Дайте определение пространства  $l_2$ .\*)

\*) - только для первого потока.

### **Задачи**

Задачи приведены в пособии "Вопросы и задачи к экзамену по математическому анализу" в разделах Темы 8 (раздел 4-5) и Темы 9 (раздел 4), размещенном на сайте кафедры.