

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

## 2 ПОТОК

Лектор А. В. Овчинников

### Список вопросов к первой части экзамена

#### 1.1. Векторы.

1. Сформулируйте определение линейных операций над векторами. Перечислите свойства линейных операций над векторами.
2. Сформулируйте определение коллинеарных (компланарных) векторов. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие коллинеарности (компланарности) векторов.
3. Сформулируйте определения базиса на плоскости (в пространстве), разложения вектора по базису, координат вектора в базисе. Сформулируйте и докажите теорему о единственности разложения по базису.
4. Сформулируйте определение матрицы перехода от одного базиса к другому. Какие базисы называются одноимёнными? разноимёнными?
5. Найдите радиус-вектор точки  $A_2$ , симметричной точке  $A_1(\mathbf{r}_1)$  относительно точки  $C(\mathbf{r}_0)$ .
6. Пусть  $A_1(\mathbf{r}_1)$  и  $A_2(\mathbf{r}_2)$  — две данные точки. Докажите, что точка  $B(\mathbf{r})$  лежит на отрезке  $[A_1A_2]$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{r}_1 + \beta\mathbf{r}_2$ , где  $\alpha, \beta \in [0; 1]$  и  $\alpha + \beta = 1$ .
7. Точки  $A_1(\mathbf{r}_1)$ ,  $A_2(\mathbf{r}_2)$ ,  $A_3(\mathbf{r}_3)$ , не лежащие на одной прямой, являются последовательными вершинами параллелограмма. Найдите радиус-вектор  $\mathbf{r}_4$  четвёртой вершины  $A_4$  этого параллелограмма.
8. Даны три точки  $A_1(\mathbf{r}_1)$ ,  $A_2(\mathbf{r}_2)$ ,  $A_3(\mathbf{r}_3)$ , не лежащие на одной прямой. Найдите радиус-вектор точки пересечения медиан треугольника  $A_1A_2A_3$ .

9. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $[AD]$ . Найдите координаты вектора  $\overrightarrow{AD}$  в базисе, образованном векторами  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ .
10. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов. Сформулируйте и докажите его свойства.
11. Выведите формулу для проекции вектора  $\mathbf{a}$  на прямую, параллельную вектору  $\mathbf{b}$ .
12. Выведите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
13. Сформулируйте определение векторного произведения векторов. Запишите формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
14. Сформулируйте и докажите свойства векторного произведения.
15. Запишите формулу для двойного векторного произведения. Запишите и докажите тождество Якоби.
16. Упростите выражения: (а)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ ; (б)  $\mathbf{a} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$ .
17. Сформулируйте определение смешанного произведения векторов. Каков геометрический смысл смешанного произведения векторов? Сформулируйте и докажите свойства смешанного произведения.
18. Выведите формулу для вычисления смешанного произведения векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе.
19. Что такое правая (левая) тройка векторов? Как определить ориентацию тройки векторов, заданных своими координатами?
20. Докажите тождество

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}.$$

## 1.2. Матрицы.

1. Сформулируйте определение линейных операций над матрицами. Перечислите свойства линейных операций над матрицами.
2. Сформулируйте определение линейной комбинации столбцов и линейной оболочки столбцов. Приведите примеры.
3. Сформулируйте определение линейно зависимых и линейно независимых столбцов. Приведите примеры.
4. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах линейно зависимых столбцов.

5. Сформулируйте определение следа матрицы. Докажите равенство  $\text{tr}(A + B) = \text{tr} A + \text{tr} B$ .
6. Сформулируйте определение произведения матриц. Приведите примеры.
7. Известно, что произведение двух матриц равно нулевой матрице. Следует ли отсюда, что один из сомножителей представляет собой нулевую матрицу? Ответ обоснуйте.
8. На какую матрицу нужно умножить матрицу  $A$ , чтобы в результате получить (а) первый столбец  $A$ ; (б) первую строку  $A$ ?
9. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах произведения матриц.
10. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -й столбец матрицы  $C$  представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы  $A$  с коэффициентами, равными элементам  $i$ -го столбца матрицы  $B$ .
11. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -й столбец матрицы  $C$  представляет собой произведение матрицы  $A$  на  $i$ -й столбец матрицы  $B$ .
12. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -я строка матрицы  $C$  представляет собой линейную комбинацию строк матрицы  $B$  с коэффициентами, равными элементам  $i$ -й строки матрицы  $A$ .
13. Пусть  $A, B$  — матрицы, для которых определено произведение  $C = AB$ . Докажите, что  $i$ -я строка матрицы  $C$  представляет собой произведение  $i$ -й строки матрицы  $A$  на матрицу  $B$ .
14. Сформулируйте определение операции транспонирования матриц. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах операции транспонирования.
15. Сформулируйте определение симметричной и кососимметричной матриц. Докажите, что произвольная квадратная матрица может быть единственным образом разложена в сумму симметричной и кососимметричной матриц.
16. Сформулируйте определение симметричной и кососимметричной матриц. Докажите, что любая линейная комбинация симметричных (кососимметричных) матриц является симметричной (кососимметричной) матрицей.
17. Сформулируйте определение обратной матрицы. Всегда ли существует обратная матрица? Докажите, что если обратная матрица существует, то она единственна.
18. Запишите и докажите формулу вычисления обратной матрицы для  $(2 \times)$ -матрицы.

19. Сформулируйте и докажите теорему о свойствах обратной матрицы.
20. Докажите формулу  $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$ , где  $A, P$  — квадратные матрицы.

### 1.3. Определители второго и третьего порядков.

1. Сформулируйте определение определителя второго порядка. Сформулируйте и докажите основные свойства определителя второго порядка.
2. Докажите формулы Крамера для системы двух уравнений с двумя неизвестными.
3. Сформулируйте и докажите критерий равенства нулю определителя второго порядка.
4. Сформулируйте определение определителя третьего порядка. Запишите формулы разложения определителя третьего порядка по любому столбцу. Запишите полное разложение определителя третьего порядка.
5. Что такое минор элемента определителя? Что такое алгебраическое дополнение элемента определителя? В чём различие между этими понятиями?
6. Сформулируйте и докажите теорему о фальшивом разложении определителя третьего порядка.
7. Сформулируйте и докажите критерий равенства нулю определителя третьего порядка.
8. Сформулируйте и докажите теорему об определителе произведения матриц для определителей третьего порядка.
9. Сформулируйте и докажите теорему о существовании обратной матрицы для  $(3 \times 3)$ -матриц.

### 1.4. Уравнения прямых и плоскостей.

1. Запишите векторное параметрическое уравнение прямой на плоскости; параметрическое уравнение прямой на плоскости в координатном виде; каноническое уравнение прямой на плоскости в виде пропорции; каноническое уравнение прямой на плоскости с помощью определителя. Опишите геометрический смысл всех входящих в эти уравнения постоянных величин.
2. Запишите векторное нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку. Запишите нормальное уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку, в прямоугольных координатах. Запишите нормированное уравнение прямой на плоскости. Опишите геометрический смысл всех входящих в эти уравнения постоянных величин.

3. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой.
4. Выведите формулу для нахождения точки, являющейся проекцией данной точки на данную прямую (на плоскости).
5. Выведите формулу для нахождения точки, симметричной данной точке относительно данной прямой (на плоскости).
6. Запишите векторное параметрическое уравнение плоскости; параметрическое уравнение плоскости в координатном виде; каноническое уравнение плоскости (с помощью определителя). Опишите геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.
7. Запишите векторное нормальное уравнение плоскости; нормальное уравнение плоскости в прямоугольных координатах; нормированное уравнение плоскости; уравнение плоскости в отрезках. Опишите геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.
8. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости.
9. Выведите формулу для нахождения точки, являющейся проекцией данной точки на данную плоскость.
10. Выведите формулу для нахождения точки, симметричной данной точке относительно данной плоскости.
11. Запишите векторное параметрическое уравнение прямой в пространстве; параметрическое уравнение прямой в пространстве в координатном виде; каноническое уравнение прямой в пространстве. Опишите геометрический смысл всех входящих в уравнение постоянных величин.

### 1.5. Составление уравнений прямых и плоскостей.

1. Составьте векторное параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$  перпендикулярно плоскости  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ .
2. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  перпендикулярно плоскости  $Ax + By + Cz = D$ .
3. Составьте векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1(\mathbf{r}_1)$  перпендикулярно прямой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ .
4. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  перпендикулярно прямой  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ .
5. Составьте векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$  и точку  $M_1(\mathbf{r}_1)$ , не лежащую на этой прямой.

6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ , и точку  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , не лежащую на этой прямой.
7. Составьте векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$  перпендикулярно плоскости  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ .
8. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ , перпендикулярно плоскости  $Ax + By + Cz = D$ .
9. Составьте векторное нормальное уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$  параллельно прямой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + s\mathbf{b}$  при условии, что прямые не параллельны (т.е.  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}$ ).
10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую, заданную каноническим уравнением  $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$ , параллельно прямой  $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3}$  при условии, что прямые не параллельны.

### 1.6. Линии второго порядка. Часть 1.

1. Сформулируйте определение эллипса и выведите его каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет эллипса?
2. Выведите формулы, выражающие фокальные радиусы произвольной точки эллипса через её абсциссу. Сформулируйте и докажите директориальное свойство эллипса.
3. Выведите уравнение касательной к эллипсу.
4. Сформулируйте и докажите оптическое свойство эллипса.
5. Сформулируйте фокальное определение гиперболы и выведите её каноническое уравнение. Что такое эксцентриситет гиперболы?
6. Выведите формулы, выражающие фокальные радиусы произвольной точки гиперболы через её абсциссу. Сформулируйте и докажите директориальное свойство гиперболы.
7. Выведите уравнение касательной к гиперболе.
8. Сформулируйте и докажите оптическое свойство гиперболы.
9. Что такое взаимно сопряжённые гиперболы? Найдите соотношение, связывающее эксцентриситеты  $\varepsilon$  и  $\varepsilon'$  двух взаимно сопряжённых гипербол.
10. Сформулируйте определение параболы и выведите её каноническое уравнение.
11. Выведите уравнение касательной к параболе.

12. Сформулируйте и докажите оптическое свойство параболы.
13. Запишите уравнение эллипса, гиперболы, параболы в полярной системе координат и сформулируйте условия, при которых это уравнение имеет место.

### 1.7. Поверхности второго порядка.

1. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
2. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
3. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
4. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
5. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
6. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda x^2 + y^2 = z$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
7. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $\lambda(x^2 + y^2) = z$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
8. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 + y^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
9. Семейство поверхностей задано в прямоугольной системе координат уравнением  $x^2 - y^2 = \lambda$ , содержащим параметр  $\lambda$ . Определите тип поверхности при всевозможных значениях  $\lambda$ .
10. Сечения поверхности  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 1 = 0$  плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
11. Сечения поверхности  $x^2 + 2y^2 - 3z^2 = 0$  плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
12. Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  спроектированы на плоскость  $Oyz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.

13. Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$  спроектированы на плоскость  $Oxz$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
14. Сечения поверхности  $2x^2 - y^2 = 2z$  плоскостями  $z = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$  спроектированы на плоскость  $Oxy$ . Как называется поверхность? Изобразите поверхность и указанные проекции.
15. Как называется поверхность, заданная уравнением  $x^2 - y^2 = 1$ ? Изобразите поверхность и найдите уравнения ее прямолинейных образующих, проходящих через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  поверхности.
16. Как называется поверхность, заданная уравнением  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ? Изобразите поверхность и найдите уравнения ее прямолинейных образующих, проходящих через точку  $(x_0, y_0, z_0)$  поверхности.
17. Сформулируйте определение прямолинейной образующей поверхности второго порядка. Перечислите и изобразите поверхности второго порядка, являющиеся (а) 1-линейчатыми; (б) 2-линейчатыми. Запишите канонические уравнения этих поверхностей.

### 1.8. Системы линейных уравнений. Ранг матрицы.

1. Докажите, что однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда столбцы её основной матрицы линейно зависимы.
2. Докажите, что если  $X_1, X_2$  — два решения однородной системы линейных уравнений  $AX = 0$ , то любая их линейная комбинация также является решением этой системы.
3. Сформулируйте определение фундаментальной совокупности решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Найдите ФСР системы  $x^1 + x^2 + x^3 = 0$  и запишите общее решение системы с помощью ФСР.
4. Докажите следующее утверждение: если  $X_1, X_2$  — решения неоднородной системы линейных уравнений  $AX = B$ , то  $X_1 - X_2$  — решение соответствующей однородной системы  $AX = 0$ .
5. Найдите общее решение неоднородной системы  $x^1 + x^2 + x^3 = 1$ . Ответ представьте в виде суммы частного решения неоднородной системы и общего решения соответствующей однородной системы.
6. Опишите алгоритм Гаусса—Жордана.
7. Докажите, что выполнение элементарных преобразований строк матрицы эквивалентно умножению этой матрицы слева на квадратную матрицу, полученную из единичной матрицы тем же самым элементарным преобразованием строк.



8. Опишите алгоритм вычисления обратной матрицы при помощи алгоритма Гаусса—Жордана. Обоснуйте этот алгоритм.
9. Сформулируйте определение подпространства  $P$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , определение базиса подпространства  $P$ , размерности подпространства  $P$ .
10. Докажите, что размерность линейной оболочки строк матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.
11. Докажите, что размерность линейной оболочки столбцов матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.
12. Сформулируйте определение ранга матрицы. Сформулируйте и докажите теорему Кронекера—Капелли.
13. На плоскости заданы две прямые  $A_1x + B_1y = C_1$ ,  $A_2x + B_2y = C_2$ . Сформулируйте в терминах рангов условия на коэффициенты уравнений прямых, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые 1) совпадали; 2) были параллельны, но не совпадали; 3) пересекались в единственной точке.
14. В пространстве заданы две плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ ,  $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ . Сформулируйте в терминах рангов условия на коэффициенты уравнений плоскостей, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости 1) совпадали; 2) были параллельны, но не совпадали; 3) имели единственную общую прямую.

### 1.9. Линии второго порядка. Часть 2.

1. Выведите формулы преобразования коэффициентов уравнения линии второго порядка при повороте системы координат и переносе начала координат.
2. Что такое центральная линия второго порядка? Перечислите типы центральных линий. При каком условии линия второго порядка  $X^TAX + 2BX + c = 0$  является центральной? Запишите уравнения центра линии второго порядка.
3. Что такое нецентральная линия второго порядка? Перечислите типы нецентральных линий. При каком условии кривая второго порядка  $X^TAX + 2BX + c = 0$  является нецентральной?
4. Перечислите основные ортогональные инварианты линий второго порядка и докажите их инвариантность.
5. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
6. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.

7. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
8. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
9. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $xy + 2x + y = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
10. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
11. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
12. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
13. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
14. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
15. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $5x^2 - 6xy + 5y^2 + 2x - 14y + 13 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
16. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $x^2 - 2xy + y^2 + 8x - 8y + 22 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
17. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $15x^2 + 24xy + 15y^2 + 30x - 24y + 20 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.
18. Используя ортогональные инварианты, определите тип кривой, заданной уравнением  $15x^2 - 16xy + 15y^2 - 62x - 44y - 13 = 0$ . Каноническое уравнение кривой находить не требуется.

**Список вопросов и задач  
ко второй части экзамена**

**2.1. Векторы.**

1. Выведите формулу для вычисления векторного произведения векторов в ортонормированном базисе.
2. Выведите формулу двойного векторного произведения.
3. На сторонах треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $|AM| : |BM| = m_1 : n_1$ ,  $|AN| : |CN| = m_2 : n_2$ . Найдите отношения  $|BO| : |ON|$  и  $|CO| : |OM|$ , где  $O$  — точка пересечения отрезков  $[BN]$  и  $[CM]$ .
4. Пусть  $A_1(\mathbf{r}_1)$ ,  $A_2(\mathbf{r}_2)$ ,  $A_3(\mathbf{r}_3)$  — точки, не лежащие на одной прямой. Докажите, что точка  $B(\mathbf{r})$  лежит внутри треугольника  $A_1A_2A_3$  тогда и только тогда, когда  $\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 + \alpha_3\mathbf{r}_3$ , где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0; 1]$  и  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ .
5. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
6. Однородная пластинка  $OADEC$  получена из прямоугольника  $OACB$  со сторонами, равными  $2a$  и  $2b$ , от которого отрезан треугольник  $ECD$ , где  $D$  и  $E$  — середины сторон  $[AC]$  и  $[BC]$  соответственно. Найдите координаты центра масс пластинки в системе координат с началом  $O$  и осями, направленными вдоль сторон  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ .
7. Разложите вектор  $\mathbf{a}$  на две составляющие, одна из которых лежит в плоскости, перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}$ , а другая перпендикулярна этой плоскости.
8. Решите векторное уравнение  $[\mathbf{x}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$  (здесь  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{b}$  — заданные векторы) и укажите необходимое и достаточное условие существования решения.
9. Дан трёхгранный угол  $OABC$  с вершиной  $O$ , известны его плоские углы  $\angle BOC = \alpha$ ,  $\angle COA = \beta$ ,  $\angle AOB = \gamma$ . Обозначим через  $A$ ,  $B$ ,  $C$  его внутренние двугранные углы, противолежащие граням  $BOC$ ,  $COA$ ,  $AOB$  соответственно. Докажите, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}.$$

10. Рассматривается система уравнений

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_1, \quad [\mathbf{a}_2, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_2,$$

где  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  не коллинеарны. Покажите, что условия

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = 0, \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) = 0, \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 0$$

необходимы для разрешимости этой системы. Найдите общее решение этой системы при выполнении этих условий и дополнительного условия  $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \neq 0$ .

11. Докажите тождество  $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{b}, \mathbf{c}], [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})^2$ .  
 12. Докажите тождество

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ (\mathbf{a}, \mathbf{x}) & (\mathbf{b}, \mathbf{x}) & (\mathbf{c}, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{y}) & (\mathbf{b}, \mathbf{y}) & (\mathbf{c}, \mathbf{y}) \end{vmatrix}.$$

13. Докажите тождество

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}.$$

14. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  делит сторону  $[AB]$  в отношении  $\lambda$  (т.е.  $|AD| : |DB| = \lambda$ ). Выразите длину отрезка  $[CD]$  через длины сторон треугольника ( $a = |BC|$ ,  $b = |AC|$ ,  $c = |AB|$ ) и число  $\lambda$ .  
 15. В прямоугольном треугольнике  $ABC$  опущен перпендикуляр  $[CH]$  на гипотенузу  $[AB]$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{CH}$  через векторы  $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$ .  
 16. В треугольнике  $ABC$  проведена высота  $[AH]$ . Выразите вектор  $\overrightarrow{AH}$  через векторы  $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$  и  $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ .

## 2.2. Матрицы.

- Пусть матрицы  $A$  и  $B$  таковы, что оба произведения  $AB$  и  $BA$  существуют, т.е.  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Докажите, что  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
- Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны (а) нулевой матрице; (б) единичной матрице.
- Пусть  $A^k = O$ . Докажите, что  $(\mathbb{I} - A)^{-1} = \mathbb{I} + A + A^2 + \dots + A^{k-1}$ .
- Матрица  $A$  такова, что  $A^2 + A + \mathbb{I} = O$ . Докажите, что  $A$  обратима, и найдите  $A^{-1}$ .
- Известно, что матрицы  $A$  и  $B$  обратимы и коммутируют. Докажите, что  $A^{-1}$  и  $B^{-1}$  также коммутируют.
- Пусть  $X, Y$  — столбцы одинаковой высоты и  $A = XY^T$ . Докажите, что существует такое число  $p$ , что  $A^2 = pA$ .
- Матрицы  $A$  и  $B$  симметричны. Докажите, что матрица  $AB$  симметрична тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  коммутируют.
- Матрицы  $A$  и  $B$  кососимметричны. Докажите, что матрица  $AB$  симметрична тогда и только тогда, когда  $A$  и  $B$  коммутируют.

9. Матрицы  $A$  и  $B$  кососимметричны. Найдите необходимое и достаточное условие кососимметричности произведения  $AB$ .
10. Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  (т.е.  $A$  — вещественная квадратная матрица). Докажите, что из равенства  $\operatorname{tr}(A^T A) = 0$  вытекает, что  $A = O$ .
11. Докажите, что равенство  $AB - BA = \mathbb{I}$  невозможно.

### 2.3. Определители второго и третьего порядка.

1. Докажите, что площадь параллелограмма, сторонами которого являются векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  с координатами  $(a_1, a_2)$  и  $(b_1, b_2)$  (относительно некоторого ортонормированного базиса) соответственно, равна

$$S = \pm \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

2. Докажите, что площадь треугольника с вершинами в точках  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,  $C(x_3, y_3)$  равна

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Пусть все элементы матрицы  $A$  второго порядка являются дифференцируемыми функциями одной переменной  $x$ , так что определитель  $\det A$  этой матрицы также является функцией от  $x$ . Докажите, что  $\det A$  — дифференцируемая функция, причём имеет место формула

$$\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}.$$

4. Для всех значений параметра  $p$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} (p+3)x + 15y = p, \\ px + (p+4)y = p-2. \end{cases}$$

5. Для всех значений параметра  $p$  решите систему уравнений

$$\begin{cases} (p+2)x + 2py = 4, \\ 5x + (p+3)y = 5. \end{cases}$$

6. Пусть  $A$  — квадратная матрица порядка 3,  $B = \operatorname{adj} A$  — её присоединённая матрица. Выразите  $\det B$  через  $\det A$ .

### 2.4. Прямые и плоскости.

1. Найдите площадь треугольника  $ABC$ , стороны которого заданы уравнениями

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= D_1 && \text{(сторона [BC]),} \\ A_2x + B_2y &= D_2 && \text{(сторона [AC]),} \\ A_3x + B_3y &= D_3 && \text{(сторона [AB]).} \end{aligned}$$

2. Докажите, что если три прямые  $A_1x + B_1y = D_1$ ,  $A_2x + B_2y = D_2$ ,  $A_3x + B_3y = D_3$  пересекаются в одной точке, то

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3. Составьте полярное уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1(r_1, \varphi_1)$  и  $M_2(r_2, \varphi_2)$ .
4. Найдите необходимое и достаточное условие, при котором прямые в пространстве  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2$ : (а) скрещиваются; (б) пересекаются в единственной точке; (в) параллельны, но не совпадают; (г) совпадают.
5. Прямая задана как пересечение двух плоскостей  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$  и  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$ . Запишите уравнение этой прямой в виде  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$  (т.е. выразите  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  через  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$ ,  $D_1$ ,  $D_2$ ).
6. Составьте уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2$  и проходящей через точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$ , не лежащую ни на одной из этих прямых.
7. Составьте уравнение прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s\mathbf{a}_2$  под прямыми углами (т.е. уравнение общего перпендикуляра к этим прямым).
8. Найдите необходимое и достаточное условие, при котором плоскости  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$  и  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$ : (а) пересекаются по прямой линии; (б) параллельны, но не совпадают; (в) совпадают.
9. Даны прямая  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$  и плоскость  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ . Найдите необходимое и достаточное условие того, что: (а) прямая и плоскость пересекаются (имеют единственную общую точку), и в этом случае найдите радиус-вектор точки пересечения; (б) прямая и плоскость параллельны (не имеют общих точек); (в) прямая лежит в плоскости.
10. Прямая задана как пересечение двух плоскостей  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$  и  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$ . Запишите векторное параметрическое уравнение этой прямой, т.е. уравнение вида  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}$ .

11. Найдите радиус-вектор точки пересечения прямой  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$  с плоскостью  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ .
12. Найдите проекцию точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  на плоскость  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$  параллельно прямой  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$  при условии  $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$ .
13. Найдите проекцию точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  на прямую  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$  параллельно плоскости  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$  при условии  $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$ .
14. Найдите ортогональную проекцию точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  на прямую  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ .
15. Найдите ортогональную проекцию точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  на плоскость  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ .
16. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$ .
17. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_1$  и  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D_2$ .
18. Найдите расстояние от точки  $M_0(\mathbf{r}_0)$  до прямой  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ .
19. Составьте уравнение плоскости, содержащей параллельные прямые  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}$ .
20. Найдите расстояние между параллельными прямыми  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{a}$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t\mathbf{a}$ .
21. Найдите расстояние между параллельными прямыми  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_1$  и  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}_2$ .
22. Составьте уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$  и  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$  перпендикулярно плоскости  $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_3) = D_3$ .
23. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(\mathbf{r}_0)$  и прямую  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{b}$ .
24. Найдите расстояние между скрещивающимися прямыми  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_1] = \mathbf{b}_1$  и  $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_2] = \mathbf{b}_2$ .

### 2.5. Линии второго порядка.

1. Докажите, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему есть величина постоянная, и найдите её.
2. Докажите, что касательные к эллипсу отсекают на двух касательных к нему, проведённых в концах большой оси, отрезки, произведение которых равно квадрату малой полуоси эллипса.
3. Получите параметрические уравнения гиперболы.
4. Составьте уравнение гиперболы в системе координат, осями которой являются асимптоты гиперболы.
5. Докажите, что эллипс и гипербола, имеющие общие фокусы, пересекаются под прямым углом (т.е. их касательные в точке пересечения перпендикулярны).

6. Докажите, что если оси двух парабол взаимно перпендикулярны, то четыре точки их пересечения лежат на одной окружности.
7. Докажите, что отрезок любой касательной к эллипсу, заключённый между касательными, проведёнными в концах большой оси, виден из любого фокуса под прямым углом.
8. Докажите, что для данной гиперболы произведение расстояний от любой точки гиперболы до её асимптот есть величина постоянная, и найдите эту величину.
9. Докажите, что отрезок касательной к гиперболе, заключённый между её асимптотами, делится точкой касания пополам.
10. Докажите, что две параболы с общим фокусом и противоположно направленными осями пересекаются под прямым углом (т.е. касательные в точке пересечения взаимно перпендикулярны).
11. Докажите, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, постоянна. Докажите, что отношение произведения длин этих отрезков к длине хорды также постоянно.