Список вопросов и задач к экзамену по аналитической геометрии

1 курс, 1 поток, лектор В.В. Колыбасова

2014–2015 г.

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ К ПЕРВОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА

1. Определения

1.1. Сформулируйте определение вектора. Что такое начало и конец вектора? Сформулируйте определение длины вектора.

1.2. Сформулируйте определение нулевого вектора. Какую длину и направление имеет нулевой вектор?

1.3. Сформулируйте определение коллинеарных векторов. Каким векторам коллинеарен нулевой вектор?

1.4. Сформулируйте определение равных векторов. Каким векторам равен нулевой вектор?

1.5. Сформулируйте два определения суммы векторов (правило треугольника и правило параллелограмма). Для сложения каких векторов применимо каждое из них?

1.6. Сформулируйте определение разности векторов.

1.7. Сформулируйте определение произведения вектора на число.

1.8. Сформулируйте определение линейной комбинации векторов. Что такое коэффициенты линейной комбинации?

1.9. Сформулируйте определение линейно зависимых векторов.

1.10. Сформулируйте определение линейно независимых векторов.

1.11. Сформулируйте определение компланарных векторов.

1.12. Сформулируйте определение упорядоченной пары векторов. Сформулируйте определение базиса на плоскости. Что такое координаты вектора относительно данного базиса?

1.13. Сформулируйте определение упорядоченной тройки векторов. Сформулируйте определение базиса в пространстве. Что такое координаты вектора относительно данного базиса?

1.14. Сформулируйте определение оси. Сформулируйте определение проекции вектора на ось.

1.15. Сформулируйте определение декартовой системы координат на плоскости. Что такое начало отсчёта, координатные оси, радиус-вектор и координаты точки?

1.16. Сформулируйте определение аффинной системы координат на плоскости. Что такое начало отсчёта, координатные оси, радиус-вектор и координаты точки?

1.17. Сформулируйте определение декартовой системы координат в пространстве. Что такое начало отсчёта, координатные оси, радиус-вектор и координаты точки?

1.18. Сформулируйте определение аффинной системы координат в пространстве. Что такое начало отсчёта, координатные оси, радиус-вектор и координаты точки?

1.19. Сформулируйте определение направляющих косинусов вектора в пространстве.

1.20. Сформулируйте определение полярной системы координат.

1.21. Сформулируйте определение цилиндрической системы координат.

1.22. Сформулируйте определение сферической системы координат.

1.23. Сформулируйте определение угла между векторами.

1.24. Сформулируйте определение скалярного произведения векторов. Чему равно скалярное произведение векторов, один из которых нулевой? Чему равно скалярное произведение вектора самого на себя? Как выражается угол между векторами через их скалярное произведение?

1.25. Сформулируйте определение ортогональных векторов. Каким векторам ортогонален нулевой вектор?

1.26. Сформулируйте определение правой тройки векторов. Приведите пример.

1.27. Сформулируйте определение левой тройки векторов. Приведите пример.

1.28. Сформулируйте определение векторного произведения векторов. Чему равно векторное произведение векторов, один из которых нулевой? Чему равно векторное произведение вектора самого на себя?

1.29. Сформулируйте определение левой аффинной системы координат в пространстве.

1.30. Сформулируйте определение левой декартовой системы координат в пространстве.

1.31. Сформулируйте определение правой аффинной системы координат в пространстве.

1.32. Сформулируйте определение правой декартовой системы координат в пространстве.

1.33. Сформулируйте определение смешанного произведения векторов.

1.34. Сформулируйте определение двойного векторного произведения векторов.

1.35. Сформулируйте определение левой аффинной системы координат на плоскости.

1.36. Сформулируйте определение правой аффинной системы координат на плоскости.

1.37. Сформулируйте определение левой декартовой системы координат на плоскости.

1.38. Сформулируйте определение правой декартовой системы координат на плоскости.

1.39. Сформулируйте определение упорядоченной пары вещественных чисел. Сформулируйте определение комплексного числа. Что такое вещественная и мнимая части комплексного числа? Какие комплексные числа называются чисто мнимыми?

1.40. Сформулируйте определение равных комплексных чисел.

1.41. Сформулируйте определение суммы комплексных чисел.

1.42. Сформулируйте определение разности комплексных чисел.

1.43. Сформулируйте определение произведения комплексных чисел.

1.44. Сформулируйте определение мнимой единицы.

1.45. Сформулируйте определение алгебраической формы комплексного числа.

1.46. Сформулируйте определение комплексно сопряжённого комплексного числа.

1.47. Сформулируйте определение частного комплексных чисел. При каком условии частное комплексных чисел существует?

1.48. Сформулируйте определение операции возведения комплексного числа в целую степень.

1.49. Что такое комплексная плоскость? Что такое вещественная ось, мнимая ось? Как на комплексной плоскости расположены комплексно сопряжённые числа?

1.50. Сформулируйте определение модуля и аргумента комплексного числа. Что такое главное значение аргумента?

1.51. Сформулируйте определение тригонометрической формы комплексного числа. Какие комплексные числа можно представить в тригонометрической форме?

1.52. Запишите формулу Эйлера.

1.53. Сформулируйте определение показательной формы комплексного числа. Какие комплексные числа можно представить в показательной форме?

1.54. Сформулируйте определение корня n-й степени из комплексного числа.

1.55. Сформулируйте определение вектора нормали к прямой.

1.56. Сформулируйте определение направляющего вектора прямой.

1.57. Сформулируйте определение угла между прямыми на плоскости. Чему равен угол между параллельными прямыми?

1.58. Сформулируйте определение вектора нормали к плоскости.

1.59. Сформулируйте определение направляющих векторов плоскости.

1.60. Сформулируйте определение угла между плоскостями. Чему равен угол между параллельными плоскостями?

1.61. Сформулируйте определение эллипса. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат, полуоси, вершины, центр, фокусы, директрисы, эксцентриситет эллипса? Какие значения может принимать эксцентриситет эллипса? Изобразите эллипс в канонической системе координат. В каком случае эллипс является окружностью? Что можно сказать об эксцентриситете, фокусах, директрисах окружности?

1.62. Сформулируйте инвариантное определение эллипса, вытекающее из его фокального свойства. Как построить эллипс с помощью карандаша и нитки?

1.63. Сформулируйте инвариантное определение эллипса, вытекающее из его директориального свойства.

1.64. Сформулируйте определение гиперболы. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат, полуоси, вершины, центр, фокусы, директрисы, эксцентриситет гиперболы? Какие значения может принимать эксцентриситет гиперболы? Изобразите гиперболу в канонической системе координат. Какая гипербола называется равносторонней? Чему равен её эксцентриситет? Что такое сопряжённая гипербола, каким уравнением она описывается?

1.65. Сформулируйте инвариантное определение гиперболы, вытекающее из её фокального свойства.

1.66. Сформулируйте инвариантное определение гиперболы, вытекающее из её директориального свойства.

1.67. Сформулируйте определение параболы. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат, фокальный параметр, ось, вершина, фокус, директриса параболы? Изобразите параболу в канонической системе координат.

1.68. Сформулируйте инвариантное определение параболы.

1.69. Сформулируйте определение кривой второго порядка.

1.70. Сформулируйте определение инварианта уравнения кривой второго порядка.

1.71. Сформулируйте определение эллиптического цилиндра. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат эллиптического цилиндра? Изобразите эллиптический цилиндр в канонической системе координат.

1.72. Сформулируйте определение гиперболического цилиндра. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат гиперболического цилиндра? Изобразите гиперболический цилиндр в канонической системе координат.

1.73. Сформулируйте определение параболического цилиндра. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат параболического цилиндра? Изобразите параболический цилиндр в канонической системе координат.

1.74. Сформулируйте определение эллипсоида. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат, полуоси эллипсоида? Изобразите эллипсоид в канонической системе координат. Какой эллипсоид называется эллипсоидом вращения; сферой?

1.75. Сформулируйте определение однополостного гиперболоида. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат однополостного гиперболоида? Изобразите однополостный гиперболоид в канонической системе координат.

1.76. Сформулируйте определение двуполостного гиперболоида. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат двуполостного гиперболоида? Изобразите двуполостный гиперболоид в канонической системе координат.

1.77. Сформулируйте определение конуса второго порядка. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат, вершина конуса второго порядка? Изобразите конус второго порядка в канонической системе координат.

1.78. Сформулируйте определение эллиптического параболоида. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат эллиптического параболоида? Изобразите эллиптический параболоид в канонической системе координат.

1.79. Сформулируйте определение гиперболического параболоида. Что такое каноническое уравнение, каноническая система координат гиперболического параболоида? Изобразите гиперболический параболоид в канонической системе координат.

1.80. Сформулируйте определение поверхности второго порядка.

1.81. Сформулируйте определение матрицы. Что такое размер матрицы, элементы матрицы? Приведите пример. Какая матрица называется нулевой?

1.82. Сформулируйте определение квадратной матрицы. Что такое порядок квадратной матрицы, главная диагональ, побочная диагональ? Приведите пример.

1.83. Что такое определитель матрицы? Что такое элементы определителя? Запишите выражения определителя первого и второго порядка через его элементы.

1.84. Запишите выражение определителя третьего порядка через его элементы.

1.85. Сформулируйте определение равных матриц. Приведите пример.

1.86. Сформулируйте определение суммы матриц. Приведите пример.

1.87. Сформулируйте определение произведения матрицы на число. Приведите пример. Чему равно произведение нулевой матрицы на любое число?

1.88. Сформулируйте определение разности матриц. Приведите пример.

1.89. Сформулируйте определение транспонированной матрицы. Приведите пример.

1.90. Сформулируйте определение симметричной матрицы. Приведите пример.

1.91. Сформулируйте определение кососимметричной матрицы. Приведите пример.

1.92. Сформулируйте определение матрицы-строки и матрицы-столбца. Сформулируйте определение произведения строки на столбец. Приведите пример.

1.93. Сформулируйте определение произведения матриц. Приведите пример.

1.94. Сформулируйте определение коммутирующих матриц. Приведите пример.

1.95. Сформулируйте определение единичной матрицы. Что такое символ Кронекера? Как выражаются элементы единичной матрицы через символ Кронекера?

1.96. Сформулируйте определение минора определителя n-го порядка. Приведите пример.

1.97. Сформулируйте определение определителя n-го порядка, использующее понятие минора.

1.98. Сформулируйте определение перестановки n чисел. Чему равно количество различных перестановок n чисел? Сформулируйте определение беспорядка.

Приведите пример. Сформулируйте определение определителя n-го порядка, использующее понятия перестановок и беспорядков.

1.99. Сформулируйте определение алгебраического дополнения к элементу определителя n-го порядка. Приведите пример.

1.100. Сформулируйте определение верхней треугольной матрицы. Приведите пример.

1.101. Сформулируйте определение нижней треугольной матрицы. Приведите пример.

1.102. Сформулируйте определение диагональной матрицы. Приведите пример.

1.103. Сформулируйте определение вырожденной квадратной матрицы.

1.104. Сформулируйте определение невырожденной квадратной матрицы.

1.105. Сформулируйте определение обратной матрицы. При каком условии она существует и единственна?

1.106. Сформулируйте определение линейной комбинации строк.

1.107. Сформулируйте определение линейной комбинации столбцов.

1.108. Сформулируйте определение линейно зависимых строк.

1.109. Сформулируйте определение линейно зависимых столбцов.

1.110. Сформулируйте определение линейно независимых строк.

1.111. Сформулируйте определение линейно независимых столбцов.

1.112. Сформулируйте определение минора матрицы. Приведите пример.

1.113. Сформулируйте определение базисного минора матрицы. У всякой ли матрицы существует базисный минор? Какие строки и столбцы матрицы называются базисными? Что такое ранг матрицы? Чему равен ранг нулевой матрицы?

1.114. Запишите систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Как её записать в матричном виде? Что такое основная матрица системы; расширенная матрица системы? Какая система называется однородной; неоднородной? Какое решение однородной системы линейных алгебраических уравнений называется тривиальным; нетривиальным?

1.115. Запишите систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Какие переменные называются базисными; свободными? Сформулируйте определение фундаментальной совокупности решений однородной системы линейных алгебраических уравнений.

1.116. Сформулируйте определение совместной системы уравнений. В каком случае однородная система линейных алгебраических уравнений является совместной? Ответ обоснуйте.

2. Формулировки теорем

2.1. Перечислите свойства операции сложения векторов.

2.2. Перечислите свойства операции умножения вектора на число.

2.3. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$. Запишите необходимое и достаточное условие того, что вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$.

2.4. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n векторов.

2.5. Сформулируйте теорему о связи линейной зависимости и компланарности трёх векторов.

2.6. Сформулируйте теорему о том, какие векторы образуют базис в пространстве.

2.7. Сформулируйте теорему о связи декартовых координат вектора на плоскости и его проекций на координатные оси.

2.8. Сформулируйте теорему о связи декартовых координат вектора в пространстве и его проекций на координатные оси.

2.9. Перечислите свойства скалярного произведения.

2.10. Запишите выражение скалярного произведения векторов через их декартовы координаты на плоскости.

2.11. Запишите выражение скалярного произведения векторов через их декартовы координаты в пространстве.

2.12. Перечислите свойства векторного произведения.

2.13. Запишите выражение векторного произведения векторов через их правые декартовы координаты в пространстве.

2.14. Сформулируйте необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов, связанное с их координатами.

2.15. Сформулируйте теорему о связи смешанного произведения векторов и объёма параллелепипеда.

2.16. Перечислите свойства смешанного произведения векторов.

2.17. Запишите выражение смешанного произведения векторов через их правые декартовы координаты в пространстве.

2.18. Запишите формулу, выражающую двойное векторное произведение через скалярные произведения.

2.19. Запишите формулы преобразования декартовых координат на плоскости при повороте и сдвиге системы координат.

2.20. Перечислите свойства операций сложения и умножения комплексных чисел.

2.21. Перечислите свойства операции комплексного сопряжения комплексных чисел.

2.22. Как преобразуются модули и аргументы комплексных чисел при их умножении?

2.23. Как преобразуются модули и аргументы комплексных чисел при их делении?

2.24. Как преобразуется модуль и аргумент комплексного числа при возведении этого числа в целую степень?

2.25. Запишите выражение для корня n-й степени из комплексного числа. Сколько различных значений имеет корень n-й степени из данного комплексного числа? Как эти значения расположены на комплексной плоскости? Чему равен корень n-й степени из нуля?

2.26. Запишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку и имеющей заданный вектор нормали.

2.27. Запишите общее уравнение прямой на плоскости, имеющей заданный вектор нормали.

2.28. Запишите уравнение прямой на плоскости в отрезках. Объясните геометрический смысл входящих в него коэффициентов.

2.29. Запишите уравнение прямой на плоскости с угловым коэффициентом. Объясните геометрический смысл входящих в него величин.

2.30. Запишите уравнение прямой на плоскости с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку.

2.31. Запишите параметрическое уравнение прямой на плоскости в векторном виде. Объясните геометрический смысл входящих в него величин. Какова его механическая интерпретация? В каком случае уравнение будет описывать полупрямую; отрезок прямой?

2.32. Запишите параметрические уравнения прямой на плоскости в координатном виде. Объясните геометрический смысл входящих в них величин. Какова механическая интерпретация этих уравнений? В каком случае уравнения будут описывать полупрямую; отрезок прямой?

2.33. Запишите каноническое уравнение прямой на плоскости. Объясните геометрический смысл входящих в него величин.

2.34. Запишите формулу для расстояния от точки до прямой на плоскости.

2.35. Сформулируйте теорему о расположении точек относительно прямой на плоскости. При каком условии точки будут находиться по одну сторону от прямой; по разные стороны от прямой?

2.36. Запишите уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и имеющей заданный вектор нормали.

2.37. Запишите общее уравнение плоскости, имеющей заданный вектор нормали.

2.38. Запишите уравнение плоскости в отрезках. Объясните геометрический смысл входящих в него коэффициентов.

2.39. Запишите параметрическое уравнение плоскости в векторном виде. Объясните геометрический смысл входящих в него величин.

2.40. Запишите параметрические уравнения плоскости в координатном виде. Объясните геометрический смысл входящих в них величин.

2.41. Запишите формулу для расстояния от точки до плоскости.

2.42. Сформулируйте теорему о расположении точек относительно плоскости. При каком условии точки будут находиться по одну сторону от плоскости; по разные стороны от плоскости?

2.43. Запишите параметрическое уравнение прямой в пространстве в векторном виде. Объясните геометрический смысл входящих в него величин. Какова его механическая интерпретация? В каком случае уравнение будет описывать полупрямую; отрезок прямой?

2.44. Запишите параметрические уравнения прямой в пространстве в координатном виде. Объясните геометрический смысл входящих в них величин. Какова механическая интерпретация этих уравнений? В каком случае уравнения будут описывать полупрямую; отрезок прямой?

2.45. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве. Объясните геометрический смысл входящих в них величин.

2.46. Запишите уравнения прямой, являющейся линией пересечения двух плоскостей.

2.47. Запишите формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

2.48. Запишите формулу для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

2.49. Сформулируйте фокальное свойство эллипса.

2.50. Сформулируйте директориальное свойство эллипса.

2.51. Запишите параметрические уравнения эллипса.

2.52. Запишите уравнение касательной к эллипсу.

2.53. Сформулируйте оптическое свойство эллипса.

2.54. Запишите полярное уравнение эллипса. Объясните смысл входящих в него величин.

2.55. Запишите уравнения наклонных асимптот гиперболы.

2.56. Сформулируйте фокальное свойство гиперболы.

2.57. Сформулируйте директориальное свойство гиперболы.

2.58. Запишите параметрические уравнения гиперболы.

2.59. Запишите уравнение касательной к гиперболе.

2.60. Сформулируйте оптическое свойство гиперболы.

2.61. Запишите полярное уравнение гиперболы. Объясните смысл входящих в него величин.

2.62. Сформулируйте директориальное свойство параболы.

2.63. Запишите уравнение касательной к параболе.

2.64. Сформулируйте оптическое свойство параболы.

2.65. Запишите полярное уравнение параболы. Объясните смысл входящих в него величин.

2.66. Объясните, почему эллипс, гиперболу и параболу называют коническими сечениями.

2.67. Перечислите, какие множества точек на плоскости являются кривыми второго порядка.

2.68. Перечислите инварианты уравнения кривой второго порядка.

2.69. Перечислите все невырожденные поверхности второго порядка.

2.70. Сформулируйте определение линейчатой поверхности. Перечислите невырожденные линейчатые поверхности второго порядка.

2.71. Перечислите свойства операции сложения матриц.

2.72. Перечислите свойства операции умножения матрицы на число.

2.73. Перечислите свойства операции транспонирования матриц.

2.74. Перечислите свойства операции умножения матриц.

2.75. Можно ли переставлять множители в произведении матриц? Почему?

2.76. Чему равно произведение произвольной матрицы на единичную матрицу; единичной матрицы на произвольную матрицу?

2.77. Перечислите свойства определителей n-го порядка.

2.78. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя n-го порядка.

2.79. Запишите формулу разложения определителя n-го порядка по его строке; по его столбцу.

2.80. Чему равен определитель произведения квадратных матриц?

2.81. Опишите метод Гаусса вычисления определителя. Приведите пример.

2.82. Запишите формулу для вычисления обратной матрицы.

2.83. Перечислите свойства обратной матрицы.

2.84. Сформулируйте теорему о формулах Крамера для системы из двух уравнений с двумя неизвестными.

2.85. Сформулируйте теорему о формулах Крамера для системы из трёх уравнений с тремя неизвестными.

2.86. Сформулируйте теорему о формулах Крамера для системы из n уравнений с n неизвестными.

2.87. Опишите метод Гаусса нахождения обратной матрицы. Приведите пример.

2.88. Сформулируйте теорему о базисном миноре.

2.89. Сформулируйте необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя.

2.90. Перечислите элементарные преобразования строк матрицы, не меняющие её ранг.

2.91. Опишите метод Гаусса—Жордана нахождения ранга матрицы. Приведите пример.

2.92. В каком случае однородная система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет тривиальное решение; нетривиальное решение?

2.93. В каком случае однородная система из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет тривиальное решение; нетривиальное решение?

2.94. Запишите однородную систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Из скольких столбцов состоит её фундаментальная совокупность решений? Какой вид имеет общее решение однородной системы?

2.95. Сформулируйте теорему Кронекера—Капелли.

2.96. Запишите неоднородную систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Какой вид имеет общее решение неоднородной системы?

3. Простые доказательства теорем и выводы формул

3.1. Докажите, что для любой точки M и для любого вектора $\vec{a}$ в пространстве найдётся такая точка N, что $\overrightarrow{MN} = \vec{a}$.

3.2. Докажите эквивалентность правила треугольника и правила параллелограмма сложения неколлинеарных векторов.

3.3. Сформулируйте и докажите переместительное свойство сложения векторов.

3.4. Сформулируйте и докажите сочетательное свойство сложения векторов.

3.5. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ выполняется $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

3.6. Докажите, что для каждого вектора $\vec{a}$ существует вектор $\vec{a}'$ такой, что $\vec{a} + \vec{a}' = \vec{0}$.

3.7. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и для любого вещественного числа λ выполняется $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$.

3.8. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ и для любых вещественных чисел λ, μ выполняется $(\lambda+\mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

3.9. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ и для любых вещественных чисел λ, μ выполняется $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}$.

3.10. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ выполняется $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

3.11. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ выполняется $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

3.12. Докажите, что для любого вещественного числа λ выполняется $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

3.13. Докажите, что для любого вектора $\vec{a}$ выполняется $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

3.14. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ выполняется $\vec{a} + (-1) \cdot \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$.

3.15. Докажите, что если хотя бы один из векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, …, $\vec{a}_n$ является нулевым, то эти векторы являются линейно зависимыми.

3.16. Докажите, что если среди n векторов какие-либо $m < n$ векторов являются линейно зависимыми, то и все n векторов линейно зависимы.

3.17. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n векторов. Докажите необходимость.

3.18. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n векторов. Докажите достаточность.

3.19. Сформулируйте и докажите теорему о связи линейной зависимости и коллинеарности двух векторов.

3.20. Сформулируйте и докажите теорему о том, какие векторы образуют базис на плоскости.

3.21. Сформулируйте и докажите теорему о единственности разложения вектора по данному базису на плоскости.

3.22. Сформулируйте и докажите теорему о единственности разложения вектора по данному базису в пространстве.

3.23. Сформулируйте и докажите теорему о том, как преобразуются координаты векторов на плоскости при сложении векторов.

3.24. Сформулируйте и докажите теорему о том, как преобразуются координаты вектора на плоскости при умножении вектора на число.

3.25. Сформулируйте и докажите теорему о том, как преобразуются координаты векторов в пространстве при сложении векторов.

3.26. Сформулируйте и докажите теорему о том, как преобразуются координаты вектора в пространстве при умножении вектора на число.

3.27. Сформулируйте и докажите теорему о величине проекции вектора на ось.

3.28. Сформулируйте и докажите свойства проекций векторов на ось.

3.29. Запишите и докажите формулу, выражающую длину вектора на плоскости через его декартовы координаты.

3.30. Запишите и докажите формулу, выражающую длину вектора в пространстве через его декартовы координаты.

3.31. Запишите и докажите формулу, связывающую между собой направляющие косинусы вектора в пространстве.

3.32. Запишите и докажите выражение для декартовых координат вектора с заданным началом и концом на плоскости. Получите формулу для расстояния между двумя точками.

3.33. Запишите и докажите выражение для декартовых координат вектора с заданным началом и концом в пространстве. Запишите и докажите формулу для расстояния между двумя точками.

3.34. Запишите и докажите формулы, связывающие декартовы и полярные координаты точки на плоскости.

3.35. Запишите и докажите формулы, связывающие декартовы и цилиндрические координаты точки в пространстве.

3.36. Запишите и докажите формулы, связывающие декартовы и сферические координаты точки в пространстве.

3.37. Выведите формулу, выражающую скалярное произведение векторов через проекции.

3.38. Сформулируйте и докажите теорему о величине угла между векторами в зависимости от знака их скалярного произведения.

3.39. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ выполняется $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

3.40. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого вещественного числа λ выполняется $(\lambda\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$.

3.41. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выполняется $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$, $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c})$.

3.42. Докажите, что $(\vec{a}, \vec{a}) > 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$; $(\vec{a}, \vec{a}) = 0$, если $\vec{a} = \vec{0}$.

3.43. Сформулируйте и докажите теорему о связи коллинеарности векторов и величины их векторного произведения.

3.44. Запишите и докажите формулу, выражающую площадь параллелограмма через векторное произведение.

3.45. Сформулируйте и докажите перестановочное свойство векторного произведения.

3.46. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любого вещественного числа λ выполняется $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \lambda\vec{b}]$.

3.47. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов, связанное с их координатами.

3.48. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняется $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$.

3.49. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ выполняется $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}) = (\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}])$.

3.50. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие компланарности векторов, связанное с величиной их смешанного произведения.

3.51. Сформулируйте и докажите переместительное свойство сложения комплексных чисел.

3.52. Сформулируйте и докажите сочетательное свойство сложения комплексных чисел.

3.53. Докажите, что для любого комплексного числа z выполняется $z + (0, 0) = z$.

3.54. Сформулируйте и докажите переместительное свойство умножения комплексных чисел.

3.55. Сформулируйте и докажите сочетательное свойство умножения комплексных чисел.

3.56. Докажите, что для любого комплексного числа z выполняется $z \cdot (1, 0) = z$.

3.57. Докажите, что для любого комплексного числа z выполняется $z \cdot (0, 0) = (0, 0)$.

3.58. Сформулируйте и докажите распределительное свойство умножения комплексных чисел.

3.59. Докажите, что множество вещественных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

3.60. Докажите, что любое комплексное число можно представить в алгебраической форме.

3.61. Докажите, что для любого комплексного числа z выполняется $\bar{\bar{z}} = z$.

3.62. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 выполняется $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.

3.63. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 выполняется $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.

3.64. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 выполняется $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$.

3.65. Докажите, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 выполняется $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

3.66. Запишите и докажите формулу, выражающую модуль комплексного числа через его вещественную и мнимую части.

3.67. Докажите, что любое комплексное число, кроме нуля, можно представить в тригонометрической форме.

3.68. Докажите, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

3.69. Докажите, что при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

3.70. Запишите формулу Муавра и докажите её.

3.71. Докажите, что любое комплексное число, кроме нуля, можно представить в показательной форме.

3.72. Докажите, что $\overline{\rho e^{i\varphi}} = \rho e^{-i\varphi}$.

3.73. Докажите, что прямая на плоскости, проходящая через точку (x_0, y_0) и имеющая вектор нормали $\{A, B\}$, описывается уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

3.74. Выведите общее уравнение прямой на плоскости.

3.75. Докажите, что любое уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где $A, B, C \in \mathbb{R}$, $|A| + |B| \neq 0$, задаёт в декартовой системе координат на плоскости некоторую прямую.

3.76. Выведите уравнение прямой в отрезках из общего уравнения прямой на плоскости.

3.77. Выведите уравнение прямой с угловым коэффициентом из общего уравнения прямой на плоскости.

3.78. Докажите, что уравнение $y = k(x - x_0) + y_0$ описывает прямую на плоскости, проходящую через точку (x_0, y_0) под углом $\operatorname{arctg} k$ к оси Ox.

3.79. Выведите параметрические уравнения прямой на плоскости.

3.80. Выведите каноническое уравнение прямой на плоскости.

3.81. Запишите и докажите формулу, выражающую угол между прямыми на плоскости через векторы нормали к ним.

3.82. Запишите и докажите формулу, выражающую угол между прямыми на плоскости через их направляющие векторы.

3.83. Докажите, что плоскость, проходящая через точку (x_0, y_0, z_0) и имеющая вектор нормали $\{A, B, C\}$, описывается уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

3.84. Выведите общее уравнение плоскости.

3.85. Докажите, что любое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A, B, C, D \in \mathbb{R}$, $|A| + |B| + |C| \neq 0$, задаёт в декартовой системе координат в пространстве некоторую плоскость.

3.86. Выведите уравнение плоскости в отрезках из общего уравнения плоскости.

3.87. Выведите параметрические уравнения плоскости.

3.88. Запишите и докажите формулу, выражающую угол между плоскостями через векторы нормали к ним.

3.89. Выведите параметрические уравнения прямой в пространстве.

3.90. Выведите канонические уравнения прямой в пространстве.

3.91. Запишите и докажите формулу, выражающую угол между прямыми в пространстве через их направляющие векторы.

3.92. Докажите, что эллипс симметричен относительно своего центра, симметричен относительно своих осей, заключён внутри некоторого прямоугольника и содержит свои вершины.

3.93. Докажите, что эллипс может быть получен из окружности с помощью её сжатия вдоль одной из координатных осей.

3.94. Докажите, что гипербола симметрична относительно своего центра, симметрична относительно своих осей, лежит вне некоторой полосы и содержит свои вершины.

3.95. Докажите, что гипербола в канонической системе координат имеет наклонные асимптоты.

3.96. Докажите, что парабола симметрична относительно своей оси, заключена в некоторой полуплоскости и содержит свою вершину.

3.97. Докажите, что любые две параболы подобны.

3.98. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя второго порядка.

3.99. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу первой строки и первого столбца определителя третьего порядка.

3.100. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу первой строки и второго столбца определителя третьего порядка.

3.101. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу первой строки и третьего столбца определителя третьего порядка.

3.102. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу второй строки и первого столбца определителя третьего порядка.

3.103. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу второй строки и второго столбца определителя третьего порядка.

3.104. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу второй строки и третьего столбца определителя третьего порядка.

3.105. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу третьей строки и первого столбца определителя третьего порядка.

3.106. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу третьей строки и второго столбца определителя третьего порядка.

3.107. Пользуясь определением алгебраического дополнения, получите выражение для алгебраического дополнения к элементу третьей строки и третьего столбца определителя третьего порядка.

3.108. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по первой строке и докажите её.

3.109. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по второй строке и докажите её.

3.110. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по третьей строке и докажите её.

3.111. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по первому столбцу и докажите её.

3.112. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по второму столбцу и докажите её.

3.113. Запишите формулу разложения определителя третьего порядка по третьему столбцу и докажите её.

3.114. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая первой строки и первого столбца определителя.

3.115. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая первой строки и второго столбца определителя.

3.116. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая первой строки и третьего столбца определителя.

3.117. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая второй строки и первого столбца определителя.

3.118. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая второй строки и второго столбца определителя.

3.119. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая второй строки и третьего столбца определителя.

3.120. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая третьей строки и первого столбца определителя.

3.121. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая третьей строки и второго столбца определителя.

3.122. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая третьей строки и третьего столбца определителя.

3.123. Докажите, что определитель второго порядка не изменяется при транспонировании.

3.124. Докажите, что определитель третьего порядка не изменяется при транспонировании.

3.125. Докажите, что перестановка строк определителя второго порядка равносильна умножению определителя на число -1.

3.126. Докажите, что перестановка столбцов определителя второго порядка равносильна умножению определителя на число -1.

3.127. Докажите, что перестановка двух строк определителя третьего порядка равносильна умножению определителя на число -1.

3.128. Докажите, что перестановка двух столбцов определителя третьего порядка равносильна умножению определителя на число -1.

3.129. Докажите, что если определитель второго порядка имеет две одинаковых строки, то он равен нулю.

3.130. Докажите, что если определитель второго порядка имеет два одинаковых столбца, то он равен нулю.

3.131. Докажите, что если определитель третьего порядка имеет две одинаковых строки, то он равен нулю.

3.132. Докажите, что если определитель третьего порядка имеет два одинаковых столбца, то он равен нулю.

3.133. Докажите, что если все элементы некоторой строки определителя второго порядка равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

3.134. Докажите, что если все элементы некоторого столбца определителя второго порядка равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

3.135. Докажите, что если все элементы некоторой строки определителя третьего порядка равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

3.136. Докажите, что если все элементы некоторого столбца определителя третьего порядка равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

3.137. Докажите, что умножение всех элементов некоторой строки определителя второго порядка на число λ равносильно умножению определителя на λ.

3.138. Докажите, что умножение всех элементов некоторого столбца определителя второго порядка на число λ равносильно умножению определителя на λ.

3.139. Докажите, что умножение всех элементов некоторой строки определителя третьего порядка на число λ равносильно умножению определителя на λ.

3.140. Докажите, что умножение всех элементов некоторого столбца определителя третьего порядка на число λ равносильно умножению определителя на λ.

3.141. Докажите, что если элементы двух строк определителя второго порядка пропорциональны, то определитель равен нулю.

3.142. Докажите, что если элементы двух столбцов определителя второго порядка пропорциональны, то определитель равен нулю.

3.143. Докажите, что если элементы двух строк определителя третьего порядка пропорциональны, то определитель равен нулю.

3.144. Докажите, что если элементы двух столбцов определителя третьего порядка пропорциональны, то определитель равен нулю.

3.145. Докажите формулу разложения определителя второго порядка на сумму двух определителей второго порядка.

3.146. Докажите формулу разложения определителя третьего порядка на сумму двух определителей третьего порядка.

3.147. Докажите, что если ко всем элементам некоторой строки определителя второго порядка прибавить соответствующие элементы другой его строки, умноженные на число λ, то величина определителя не изменится.

3.148. Докажите, что если ко всем элементам некоторого столбца определителя второго порядка прибавить соответствующие элементы другого его столбца, умноженные на число λ, то величина определителя не изменится.

3.149. Докажите, что если ко всем элементам некоторой строки определителя третьего порядка прибавить соответствующие элементы другой его строки, умноженные на число λ, то величина определителя не изменится.

3.150. Докажите, что если ко всем элементам некоторого столбца определителя третьего порядка прибавить соответствующие элементы другого его столбца, умноженные на число λ, то величина определителя не изменится.

3.151. Сформулируйте и докажите переместительное свойство сложения матриц.

3.152. Сформулируйте и докажите сочетательное свойство сложения матриц.

3.153. Докажите, что если A и B — матрицы одинакового размера, λ — число, то выполняется $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$.

3.154. Докажите, что для любой матрицы A и для любых чисел λ, μ выполняется $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

3.155. Докажите, что для любой матрицы A и для любых чисел λ, μ выполняется $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$.

3.156. Докажите, что если A и B — матрицы одинакового размера, то $A-B=A+(-1)\cdot B$.

3.157. Докажите, что если A и B — матрицы одинакового размера, то $(A+B)^T=A^T+B^T$.

3.158. Докажите, что для любой матрицы A и для любого числа λ выполняется $(\lambda A)^T=\lambda A^T$.

3.159. Докажите, что для любой матрицы A выполняется $(A^T)^T=A$.

3.160. Докажите, что если A — матрица размера $m\times n$, I — единичная матрица порядка n, то выполняется $AI=A$.

3.161. Докажите, что если A — матрица размера $m\times n$, I — единичная матрица порядка m, то выполняется $IA=A$.

3.162. Докажите, что единичная матрица коммутирует с любой квадратной матрицей того же порядка.

3.163. Из определения определителя n-го порядка, использующего понятия перестановок и беспорядков, получите выражение для определителя второго порядка через его элементы.

3.164. Из определения определителя n-го порядка, использующего понятия перестановок и беспорядков, получите выражение для определителя третьего порядка через его элементы.

3.165. Сформулируйте и докажите теорему об определителе верхней треугольной матрицы.

3.166. Сформулируйте и докажите теорему об определителе нижней треугольной матрицы.

3.167. Выведите формулу для определителя диагональной матрицы. Чему равен определитель единичной матрицы? Чему равен определитель матрицы λI, где λ — число, I — единичная матрица?

3.168. Докажите, что если существует A^{-1}, то матрица A — невырожденная.

3.169. Докажите, что если A и B — невырожденные квадратные матрицы одинакового порядка, то выполняется $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

3.170. Докажите, что если A — невырожденная квадратная матрица, то выполняется $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

3.171. Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Докажите, что $(A^{-1})^{-1}=A$.

3.172. Докажите, что если хотя бы один из столбцов $C_1, C_2, \dots, C_n$ является нулевым, то эти столбцы являются линейно зависимыми. (Предполагается, что все столбцы имеют одинаковый размер.)

3.173. Докажите, что если хотя бы одна из строк $R_1, R_2, \dots, R_n$ является нулевой, то эти строки являются линейно зависимыми. (Предполагается, что все строки имеют одинаковый размер.)

3.174. Докажите, что если среди n столбцов какие-либо $m < n$ столбцов являются линейно зависимыми, то и все n столбцов линейно зависимы. (Предполагается, что все столбцы имеют одинаковый размер.)

3.175. Докажите, что если среди n строк какие-либо $m < n$ строк являются линейно зависимыми, то и все n строк линейно зависимы. (Предполагается, что все строки имеют одинаковый размер.)

3.176. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n столбцов. Докажите необходимость.

3.177. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n столбцов. Докажите достаточность.

3.178. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n строк. Докажите необходимость.

3.179. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии линейной зависимости n строк. Докажите достаточность.

3.180. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии существования нетривиального решения однородной системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Докажите необходимость.

3.181. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии существования нетривиального решения однородной системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Докажите достаточность.

3.182. Докажите, что любая линейная комбинация решений однородной системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными тоже является решением этой системы.

4. Образцы простых задач

4.1. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется неравенство треугольника $|\vec{a} + \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$. В каком случае достигается равенство?

4.2. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы вектор $\vec{a} + \vec{b}$ делил пополам угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$? (Предполагается, что все векторы отложены от единого начала.)

4.3. Даны две точки в пространстве: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Найдите координаты точки, симметричной точке B относительно точки A.

4.4. Даны три различные точки в пространстве: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Получите необходимое и достаточное условие того, что они лежат на одной прямой.

4.5. Известно, что $ABCD$ — параллелограмм. Даны координаты трёх его вершин: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Найдите координаты его четвёртой вершины.

4.6. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

4.7. Докажите, что если векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейно независимы, а векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ линейно зависимы, то вектор $\vec{a}_{n+1}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

4.8. Векторы $\vec{p}, \vec{q}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Докажите или опровергните утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы, то и векторы $\vec{p}, \vec{q}$ линейно независимы.

4.9. Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Докажите или опровергните утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы, то и векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ линейно независимы.

4.10. Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Докажите или опровергните утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно зависимы, то и векторы $\vec{p}, \vec{q}$ линейно зависимы.

4.11. Докажите, что все координаты нулевого вектора относительно любого базиса равны нулю.

4.12. Докажите, что если все координаты вектора $\vec{a}$ относительно некоторого базиса равны нулю, то вектор $\vec{a}$ является нулевым.

4.13. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AF} = \vec{b}$. Разложите по базису $\vec{a}, \vec{b}$ векторы $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CE}$.

4.14. Дан треугольник ABC. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Разложите по базису $\vec{a}, \vec{b}$ векторы, приложенные к вершинам треугольника и совпадающие с его медианами.

4.15. Даны вершины треугольника: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника.

4.16. Точка O является точкой пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

4.17. Может ли некоторый вектор составлять с координатными осями декартовой системы координат углы $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$ и $\gamma = 60°$? Ответ обоснуйте.

4.18. Вектор составляет с осями Ox и Oz углы $\alpha = 120°$ и $\gamma = 45°$ соответственно. Какой угол он составляет с осью Oy?

4.19. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы выполнялось соотношение $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$?

4.20. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы выполнялось соотношение $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| > \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$?

4.21. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы выполнялось соотношение $\left|\vec{a} + \vec{b}\right| < \left|\vec{a} - \vec{b}\right|$?

4.22. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были ортогональны?

4.23. Докажите, что вектор $\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$ ортогонален вектору $\vec{a}$.

4.24. Докажите, что вектор $\vec{b}(\vec{a},\vec{a})-\vec{a}(\vec{a},\vec{b})$ ортогонален вектору $\vec{a}$.

4.25. Какому условию должны удовлетворять векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, чтобы векторы $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ были коллинеарны?

4.26. Упростите выражение $[\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}]$.

4.27. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ удовлетворяют условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Докажите, что $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{b},\vec{c}]=[\vec{c},\vec{a}]$.

4.28. Даны произвольные векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$. Докажите, что векторы $[\vec{a},\vec{d}]$, $[\vec{b},\vec{d}]$ и $[\vec{c},\vec{d}]$ компланарны.

4.29. Векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ связаны соотношениями $[\vec{a},\vec{b}]=[\vec{c},\vec{d}]$, $[\vec{a},\vec{c}]=[\vec{b},\vec{d}]$. Докажите, что векторы $\vec{a}-\vec{d}$ и $\vec{b}-\vec{c}$ коллинеарны.

4.30. Дан треугольник ABC. Пусть $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины A.

4.31. Вектор $\vec{c}$ ортогонален векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30°. Зная, что $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=3$, вычислите $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

4.32. Докажите тождество $(\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a})=2(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

4.33. Даны векторы: $\vec{a}=\{5;\ 5;\ 0\}$, $\vec{b}=\{-4;\ 0;-3\}$ и $\vec{c}=\{2;-3;2\}$. Являются ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарными? Образуют ли они правую или левую тройку векторов?

4.34. Даны четыре точки в пространстве: $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $D(x_4,y_4,z_4)$. Получите необходимое и достаточное условие того, что они принадлежат одной плоскости.

4.35. Докажите тождество Якоби: $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]+[\vec{b},[\vec{c},\vec{a}]]+[\vec{c},[\vec{a},\vec{b}]]=\vec{0}$.

4.36. Представьте в алгебраической форме частное комплексных чисел $z_1=x_1+ix_2$ и $z_2=x_2+ix_2$.

4.37. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $-7-4i$. Изобразите число на комплексной плоскости.

4.38. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|<R$, где z_0 — фиксированное комплексное число, $R>0$.

4.39. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих неравенству $|z-z_0|>R$, где z_0 — фиксированное комплексное число, $R>0$.

4.40. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих равенству $|z-z_0|=R$, где z_0 — фиксированное комплексное число, $R>0$.

4.41. Найдите все значения корня из комплексного числа: $\sqrt{-4}$.

4.42. Найдите все значения корня из комплексного числа: $\sqrt[3]{-8}$.

4.43. Найдите все значения корня из комплексного числа: $\sqrt[4]{16}$.

4.44. Найдите комплексные корни уравнения $z^2 + 2z + 2 = 0$.

4.45. Для прямой на плоскости $y = kx + b$ найдите вектор нормали и направляющий вектор.

4.46. Получите необходимое и достаточное условие параллельности прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ на плоскости.

4.47. Получите необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ на плоскости.

4.48. Докажите, что тангенс угла между двумя прямыми $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ на плоскости равен $\left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.

4.49. На плоскости даны две несовпадающие точки: $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

4.50. Запишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, где $M_1 \neq M_2$.

4.51. Запишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно прямой $Ax + By + C = 0$.

4.52. Запишите уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно прямой $Ax + By + C = 0$.

4.53. Получите необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых на плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$.

4.54. Известно, что прямые на плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ пересекаются в единственной точке. Найдите координаты этой точки.

4.55. В пространстве даны две несовпадающие точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

4.56. Получите необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

4.57. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой.

4.58. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно плоскостям $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$ при условии, что векторы нормали к данным плоскостям не коллинеарны.

4.59. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ при условии, что вектор нормали к плоскости не коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1 M_2}$.

4.60. Получите необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых в пространстве: $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{b_1} = \frac{z - z_1}{c_1}$ и $\frac{x - x_2}{a_2} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{c_2}$.

4.61. Дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Получите необходимое и достаточное условие того, что прямая перпендикулярна плоскости.

4.62. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, где $M_1 \neq M_2$.

4.63. Получите необходимое и достаточное условие того, что прямые $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ и $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ лежат в одной плоскости.

4.64. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно прямой $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$.

4.65. Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ и точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, не лежащую на этой прямой.

4.66. Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ при условии, что данная прямая не перпендикулярна данной плоскости.

4.67. Запишите уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ параллельно прямой $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ при условии, что направляющие векторы прямых не коллинеарны.

4.68. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ параллельно прямой $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ при условии, что направляющий вектор прямой не коллинеарен вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

4.69. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ параллельно прямым $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ и $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ при условии, что направляющие векторы прямых не коллинеарны.

4.70. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$.

4.71. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.

4.72. Известно, что прямые $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ и $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$ пересекаются в единственной точке. Запишите уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые.

4.73. Известно, что прямые $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ и $\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$ параллельны, но не совпадают. Запишите уравнение плоскости, в которой лежат эти прямые.

4.74. Найдите расстояние между параллельными прямыми $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ и $\frac{x-x_2}{a}=\frac{y-y_2}{b}=\frac{z-z_2}{c}$.

4.75. Известно, что прямая $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ параллельна плоскости $Ax+By+Cz+D=0$. Найдите расстояние между прямой и плоскостью.

4.76. Найдите угол между прямой $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$.

4.77. Что представляют собой сечения эллиптического цилиндра $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ плоскостями $x=\mathrm{const}$, $y=\mathrm{const}$ и $z=\mathrm{const}$?

4.78. Что представляют собой сечения гиперболического цилиндра $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.79. Что представляют собой сечения параболического цилиндра $y^2 = 2px$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.80. Что представляют собой сечения эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.81. Что представляют собой сечения однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.82. Что представляют собой сечения двуполостного гиперболоида $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.83. Что представляют собой сечения конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.84. Что представляют собой сечения эллиптического параболоида $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.85. Что представляют собой сечения гиперболического параболоида $2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ плоскостями $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ и $z = \text{const}$?

4.86. Поверхность задана уравнением $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = 1$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.87. Поверхность задана уравнением $\lambda x^2 + y^2 + z^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.88. Поверхность задана уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.89. Поверхность задана уравнением $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = 1$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.90. Поверхность задана уравнением $x^2 + \lambda(y^2 + z^2) = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.91. Поверхность задана уравнением $\lambda x^2 + y^2 = z$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.92. Поверхность задана уравнением $\lambda(x^2 + y^2) = z$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.93. Поверхность задана уравнением $x^2 + y^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.94. Поверхность задана уравнением $x^2 - y^2 = \lambda$, содержащим параметр λ. Определите тип поверхности для всех возможных значений λ.

4.95. Приведите пример матриц A и B, для которых произведение AB определено, а произведение BA не определено.

4.96. Приведите пример матриц A и B, для которых произведения AB и BA определены, но имеют разный размер.

4.97. Приведите пример матриц A и B, для которых произведения AB и BA определены и имеют одинаковый размер, но $AB \neq BA$.

4.98. Можно ли умножить строку с n элементами на столбец с n элементами; столбец с n элементами на строку с n элементами? Что получится?

4.99. Известно, что $AX = B$, где A — матрица размера $m \times k$, B — матрица размера $m \times n$. Каковы размеры матрицы X?

4.100. Известно, что $XA = B$, где A — матрица размера $k \times n$, B — матрица размера $m \times n$. Каковы размеры матрицы X?

4.101. Для матриц A и B известно, что $AB = BA$. Что можно сказать о размерах матриц A и B?

4.102. Что получится, если произвольную матрицу размера $m \times k$ умножить на нулевую матрицу размера $k \times n$?

4.103. Что получится, если нулевую матрицу размера $m \times k$ умножить на произвольную матрицу размера $k \times n$?

4.104. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ для всех натуральных n. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

4.105. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$ для всех натуральных n. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

4.106. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ для всех натуральных n. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

4.107. На какую матрицу нужно умножить матрицу A, чтобы в результате получить первый столбец матрицы A?

4.108. Какую матрицу нужно умножить на матрицу A, чтобы в результате получить первую строку матрицы A?

4.109. Пусть A и B — матрицы, для которых определено произведение $C = AB$. Докажите, что j-й столбец матрицы C представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы A с коэффициентами, равными элементам j-го столбца матрицы B.

4.110. Пусть A и B — матрицы, для которых определено произведение $C = AB$. Докажите, что i-я строка матрицы C представляет собой линейную комбинацию строк матрицы B с коэффициентами, равными элементам i-й строки матрицы A.

4.111. Пусть A и B — матрицы, для которых определено произведение $C = AB$. Докажите, что j-й столбец матрицы C представляет собой произведение матрицы A на j-й столбец матрицы B.

4.112. Пусть A и B — матрицы, для которых определено произведение $C = AB$. Докажите, что i-я строка матрицы C представляет собой произведение i-й строки матрицы A на матрицу B.

4.113. Докажите, что если квадратные матрицы A и B коммутируют, то выполняется равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

4.114. Докажите, что если для квадратных матриц выполняется равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, то матрицы A и B коммутируют. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

4.115. Докажите, что если квадратные матрицы A и B коммутируют, то выполняется равенство $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

4.116. Докажите, что если для квадратных матриц A и B выполняется равенство $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$, то матрицы A и B коммутируют. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

4.117. Докажите, что если квадратные матрицы A и B коммутируют, то выполняется равенство $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$.

4.118. Докажите, что если для квадратных матриц A и B выполняется равенство $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$, то матрицы A и B коммутируют.

4.119. Докажите, что если A — квадратная матрица порядка n, а I — единичная матрица порядка n, то выполняется $(A+I)^2 = A^2 + 2A + I$. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

4.120. Докажите, что если A — квадратная матрица порядка n, а I — единичная матрица порядка n, то выполняется $(A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I$. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

4.121. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите, что $[B,A] = -[A,B]$.

4.122. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите, что $[A,A] = \theta$, где θ — нулевая матрица.

4.123. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите, что $[A,I] = [I,A] = \theta$, где θ — нулевая матрица, I — единичная матрица.

4.124. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите, что $[A,B+C] = [A,B] + [A,C]$.

4.125. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите, что $[\lambda A,B] = \lambda[A,B]$, где λ — произвольное число.

4.126. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите, что $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$.

4.127. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A,B] \stackrel{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите, что $[A,B]^T = -[A^T,B^T]$.

4.128. Определите количество беспорядков в перестановке $(3; 2; 5; 4; 1)$.

4.129. Верно ли, что для любых квадратных матриц A и B одного порядка выполняется равенство $\det(AB) = \det(BA)$? Если да, докажите это; если нет, приведите пример, опровергающий это равенство.

4.130. Пусть A — квадратная матрица порядка n, λ — число. Выразите $\det(\lambda A)$ через $\det A$.

4.131. Пусть A — невырожденная квадратная матрица порядка n. Выразите $\det(A^{-1})$ через $\det A$.

4.132. Пусть $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $d(x)$ — дифференцируемые функции. Докажите, что $\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'(x) & b'(x) \\ c(x) & d(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a(x) & b(x) \\ c'(x) & d'(x) \end{vmatrix}$.

4.133. Не раскрывая определитель, докажите, что $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

4.134. Пользуясь свойствами определителей, докажите следующее тождество: $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$.

4.135. Пользуясь свойствами определителей, докажите следующее тождество: $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos^2\alpha & 1 \\ \sin^2\beta & \cos^2\beta & 1 \\ \sin^2\gamma & \cos^2\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$.

4.136. Пользуясь свойствами определителей, докажите следующее тождество: $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

4.137. Не вычисляя определители, докажите следующее тождество:
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4.138. Не вычисляя определители, докажите следующее тождество:
$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4.139. Вычислите $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

4.140. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — невырожденная матрица. Вычислите A^{-1}.

4.141. Докажите, что любая линейная комбинация симметричных матриц одного порядка является симметричной матрицей.

4.142. Докажите, что любая линейная комбинация кососимметричных матриц одного порядка является кососимметричной матрицей.

4.143. Докажите, что если A — невырожденная симметричная матрица, то A^{-1} — тоже симметричная матрица.

4.144. Докажите, что если A — невырожденная кососимметричная матрица, то A^{-1} — тоже кососимметричная матрица.

4.145. Пусть A и B — симметричные квадратные матрицы одного порядка. Докажите, что матрица AB симметрична тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют.

4.146. Пусть A и B — кососимметричные квадратные матрицы одного порядка. Докажите, что матрица AB симметрична тогда и только тогда, когда матрицы A и B коммутируют.

4.147. Пусть A и B — кососимметричные квадратные матрицы одного порядка. Докажите, что матрица AB кососимметрична тогда и только тогда, когда $AB = -BA$.

4.148. Докажите формулу $(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$, где A и P — квадратные матрицы одного порядка, матрица P невырождена и $n \in \mathbb{N}$. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

4.149. Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Докажите, что $(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$ для любых $n \in \mathbb{N}$. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

4.150. Пусть $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Докажите, что $A^{-1}(\varphi) = A(-\varphi)$.

4.151. Пусть $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Докажите, что $A^{-1}(\varphi) = A^T(\varphi)$.

4.152. Пусть $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Докажите, что $A(\varphi)A(\psi) = A(\varphi + \psi)$.

4.153. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.154. Решите матричное уравнение $X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

4.155. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

4.156. Найдите ранг и укажите базисный минор матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.157. Найдите ранг и укажите базисный минор матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.158. Найдите ранг и укажите базисный минор матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

4.159. К столбцам $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ добавьте ещё один столбец так, чтобы все четыре столбца были линейно зависимыми.

4.160. К столбцам $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ добавьте ещё один столбец так, чтобы все три столбца были линейно независимыми.

4.161. Приведите пример квадратной матрицы порядка 3, имеющей ранг 0; 1; 2; 3. Что можно сказать об определителе квадратной матрицы порядка n, имеющей ранг n?

4.162. Докажите, что если столбцы квадратной матрицы A линейно зависимы, то столбцы матрицы A^T тоже линейно зависимы.

4.163. Докажите, что если строки квадратной матрицы A линейно зависимы, то строки матрицы A^T тоже линейно зависимы.

4.164. Докажите, что если столбцы квадратной матрицы A линейно независимы, то столбцы матрицы A^T тоже линейно независимы.

4.165. Докажите, что если строки квадратной матрицы A линейно независимы, то строки матрицы A^T тоже линейно независимы.

4.166. Докажите следующее утверждение: для того чтобы столбцы матрицы A были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был меньше количества её столбцов.

4.167. Докажите следующее утверждение: для того чтобы строки матрицы A были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы A был меньше количества её строк.

4.168. Какие значения может принимать ранг матрицы размера $m \times n$? Ответ обоснуйте.

4.169. Пусть $\operatorname{rang} A = r$. Найдите $\operatorname{rang} A^T$. Ответ обоснуйте.

4.170. Пусть A — матрица размера $m \times n$, $\operatorname{rang} A = r$. Являются ли столбцы матрицы линейно зависимыми, если $r < n$?

4.171. Пусть A — матрица размера $m \times n$, $\operatorname{rang} A = r$. Являются ли столбцы матрицы линейно зависимыми, если $r = n$?

4.172. Пусть A — матрица размера $m \times n$, $\operatorname{rang} A = r$. Являются ли строки матрицы линейно зависимыми, если $r < m$?

4.173. Пусть A — матрица размера $m \times n$, $\operatorname{rang} A = r$. Являются ли строки матрицы линейно зависимыми, если $r = m$?

4.174. Могут ли быть линейно независимыми строки с тремя элементами, если количество строк равно 2; 3; 4? Приведите примеры.

4.175. Может ли ранг матрицы равняться r, если какие-то r её столбцов линейно зависимы? Может ли ранг матрицы равняться r, если любые r её столбцов линейно зависимы? Ответ обоснуйте.

4.176. Может ли ранг матрицы равняться r, если какие-то $r + 1$ столбцов матрицы линейно независимы? Ответ обоснуйте.

4.177. Каким может быть ранг матрицы, полученной из матрицы ранга r вычёркиванием k строк?

4.178. Каким может быть ранг матрицы, полученной из матрицы ранга r вычёркиванием k столбцов?

4.179. Докажите, что ранг диагональной матрицы равен количеству отличных от нуля элементов её главной диагонали.

4.180. Докажите, что ранг треугольной матрицы равен количеству отличных от нуля элементов её главной диагонали.

4.181. Постройте ФСР и найдите общее решение системы уравнений $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

4.182. Постройте ФСР и найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

4.183. Найдите общее решение системы уравнений $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

4.184. Найдите общее решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

4.185. Докажите, что если система уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$ совместна, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

4.186. Докажите, что если система уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$ совместна, то

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0.$$

4.187. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений равен сумме столбцов её основной матрицы. Укажите какое-либо частное решение системы.

4.188. Известно, что столбец свободных членов линейной системы уравнений совпадает с последним столбцом её основной матрицы. Укажите какое-либо частное решение системы.

4.189. Пусть X и Y — столбцы решений систем линейных алгебраических уравнений $AX = P$ и $AY = Q$ соответственно, а λ и μ — некоторые числа. Какой системе уравнений удовлетворяет столбец $Z = \lambda X + \mu Y$? Ответ обоснуйте.

4.190. Докажите, что однородная система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы меньше n.

4.191. Решите систему уравнений при каждом значении параметра p:
$\begin{cases} (p + 3)x + 15y = p, \\ px + (p + 4)y = p - 2. \end{cases}$

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ КО ВТОРОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА

5. Доказательства теорем и выводы формул

5.1. Докажите, что если вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$, то существует такое число λ, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

5.2. Сформулируйте и докажите теорему о связи линейной зависимости и компланарности трёх векторов.

5.3. Докажите, что каковы бы ни были неколлинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для любого вектора $\vec{c}$, компланарного с ними, существуют вещественные числа λ и μ такие, что справедливо равенство $\vec{c} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$.

5.4. Сформулируйте и докажите теорему о том, какие векторы образуют базис в пространстве.

5.5. Сформулируйте и докажите теорему о связи декартовых координат вектора на плоскости и его проекций на координатные оси.

5.6. Сформулируйте и докажите теорему о связи декартовых координат вектора в пространстве и его проекций на координатные оси.

5.7. Выведите выражение для скалярного произведения векторов через их декартовы координаты на плоскости.

5.8. Выведите выражение для скалярного произведения векторов через их декартовы координаты в пространстве.

5.9. Выведите выражение для векторного произведения векторов через их правые декартовы координаты в пространстве.

5.10. Сформулируйте и докажите теорему о связи смешанного произведения векторов и объёма параллелепипеда.

5.11. Выведите выражение для смешанного произведения векторов через их правые декартовы координаты в пространстве.

5.12. Запишите и докажите формулу, выражающую двойное векторное произведение через скалярные произведения.

5.13. Выведите формулы преобразования декартовых координат на плоскости при повороте и сдвиге системы координат.

5.14. Выведите выражение для корня n-й степени из комплексного числа.

5.15. Выведите формулу для расстояния от точки до прямой на плоскости.

5.16. Сформулируйте и докажите теорему о расположении точек относительно прямой на плоскости.

5.17. Выведите формулу для расстояния от точки до плоскости.

5.18. Сформулируйте и докажите теорему о расположении точек относительно плоскости.

5.19. Выведите формулу для расстояния от точки до прямой в пространстве.

5.20. Выведите формулу для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

5.21. Выведите уравнение касательной к эллипсу.

5.22. Выведите уравнение касательной к гиперболе.

5.23. Выведите уравнение касательной к параболе.

5.24. Опишите алгоритм приведения уравнения кривой второго порядка к каноническому виду с помощью поворота и сдвига системы координат. Какому условию должен удовлетворять угол поворота?

5.25. Дано уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$. Докажите, что величина $I_1 = a_{11} + a_{22}$ является инвариантом относительно поворота системы координат.

5.26. Дано уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$. Докажите, что величина $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ является инвариантом относительно поворота системы координат.

5.27. Дано уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$. Докажите, что величина $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$ является инвариантом относительно поворота системы координат.

5.28. Дано уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$. Докажите, что величина $I_1 = a_{11} + a_{22}$ является инвариантом относительно сдвига системы координат.

5.29. Дано уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$. Докажите, что величина $I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$ является инвариантом относительно сдвига системы координат.

5.30. Дано уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$. Докажите, что величина $I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix}$ является инвариантом относительно сдвига системы координат.

5.31. Сформулируйте и докажите теорему о формулах Крамера для системы из двух уравнений с двумя неизвестными.

5.32. Сформулируйте и докажите теорему о формулах Крамера для системы из трёх уравнений с тремя неизвестными.

5.33. Сформулируйте и докажите сочетательное свойство умножения матриц.

5.34. Докажите, что если матрицы A, B, C имеют такие размеры, что все операции в левой части равенства определены, то выполняется равенство $A(B + C) = AB + AC$.

5.35. Докажите, что если матрицы A, B, C имеют такие размеры, что все операции в левой части равенства определены, то выполняется равенство $(A + B)C = AC + BC$.

5.36. Докажите, что если матрицы A, B имеют такие размеры, что их произведение определено, λ — произвольное число, то выполняется $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.

5.37. Докажите, что если матрицы A, B имеют такие размеры, что их произведение определено, то выполняется $(AB)^T = B^T A^T$.

5.38. Докажите, что если A и B — квадратные матрицы второго порядка, то $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

5.39. Докажите, что в определителе n-го порядка сумма произведений элементов j-го столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов k-го столбца равна нулю при $j \neq k$.

5.40. Докажите, что в определителе n-го порядка сумма произведений элементов i-й строки на алгебраические дополнения соответствующих элементов k-й строки равна нулю при $i \neq k$.

5.41. Докажите, что если A — невырожденная квадратная матрица, то существует A^{-1}.

5.42. Докажите, что если матрица, обратная к матрице A, существует, то она единственна.

5.43. Докажите, что матричное уравнение $AX = B$, где A — известная невырожденная квадратная матрица порядка n, B — известная матрица размера $n \times m$, X — неизвестная матрица, имеет решение, и это решение единственно.

5.44. Докажите, что матричное уравнение $XA = B$, где A — известная невырожденная квадратная матрица порядка n, B — известная матрица размера $m \times n$, X — неизвестная матрица, имеет решение, и это решение единственно.

5.45. Докажите, что матричное уравнение $AXB = C$, где A — известная невырожденная квадратная матрица порядка n, B — известная невырожденная квадратная матрица порядка m, C — известная матрица размера $n \times m$, X — неизвестная матрица, имеет решение, и это решение единственно.

5.46. Сформулируйте и докажите теорему о формулах Крамера для системы из n уравнений с n неизвестными.

5.47. Докажите, что если строки определителя линейно зависимы, то он равен нулю.

5.48. Докажите, что если столбцы определителя линейно зависимы, то он равен нулю.

5.49. Сформулируйте и докажите теорему о базисном миноре.

5.50. Докажите, что если определитель равен нулю, то его столбцы линейно зависимы.

5.51. Докажите, что если определитель равен нулю, то его строки линейно зависимы.

5.52. Докажите, что ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых строк.

5.53. Докажите, что ранг матрицы равен максимальному числу её линейно независимых столбцов.

5.54. Опишите алгоритм решения однородной системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом Гаусса—Жордана. Приведите пример.

5.55. Докажите, что если неоднородная система из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными совместна, то ранг её расширенной матрицы равен рангу её основной матрицы.

5.56. Докажите, что если для неоднородной системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы системы, то система совместна.

5.57. Докажите, что общее решение неоднородной системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными является суммой её частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

5.58. Опишите алгоритм решения неоднородной системы из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными методом Гаусса—Жордана. Приведите пример.

6. Образцы задач

6.1. Докажите, что условие, при котором три точки на плоскости $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ и $M_3(x_3, y_3)$ лежат на одной прямой, может быть записано в виде $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

6.2. Даны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$. Получите необходимое и достаточное условие того, что точка C принадлежит отрезку AB.

6.3. Дан треугольник ABC. Пусть $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$. Разложите по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор, приложенный к вершине C этого треугольника и совпадающий с его биссектрисой CL.

6.4. Докажите, что три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

6.5. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3:1, считая от вершины.

6.6. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены соответственно точки E и F так, что прямые EF и BC_1 параллельны. Найдите отношение $|\overrightarrow{EF}| : |\overrightarrow{BC_1}|$.

6.7. Докажите, что любые три вектора на плоскости являются линейно зависимыми.

6.8. Докажите, что любые четыре вектора в пространстве являются линейно зависимыми.

6.9. Векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ являются линейными комбинациями векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Докажите или опровергните утверждение: если векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ линейно независимы, то и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ линейно независимы.

6.10. Дан произвольный тетраэдр $ABCD$. Докажите следующее утверждение: если перпендикулярны рёбра AB и CD, а также рёбра AC и BD тетраэдра, то рёбра BC и AD также перпендикулярны.

6.11. Докажите, что из медиан произвольного треугольника ABC можно составить треугольник. Выразите площадь треугольника, составленного из медиан треугольника ABC, через площадь треугольника ABC.

6.12. Докажите, что площадь параллелограмма на плоскости, сторонами которого являются векторы $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2\}$, может быть вычислена по формуле $S = \pm\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$.

6.13. На плоскости даны вершины треугольника: $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$. Докажите, что площадь треугольника вычисляется по формуле $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

6.14. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} \neq \vec{0}$. Представьте вектор $\vec{b}$ в виде суммы двух векторов, один из которых коллинеарен вектору $\vec{a}$, а другой — ортогонален вектору $\vec{a}$.

6.15. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Зная, что $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, вычислите $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

6.16. Докажите тождество параллелограмма: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right)$.

6.17. Докажите, что если A, B, C, D — произвольные точки в пространстве, то выполняется равенство $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0$.

6.18. Дан прямоугольный треугольник ABC, в котором угол C — прямой. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Разложите по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор, приложенный к вершине C этого треугольника и совпадающий с его высотой CH.

6.19. Дан треугольник ABC. Пусть $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Разложите по базису $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор, приложенный к вершине B этого треугольника и совпадающий с его высотой BH.

6.20. Докажите, что для произвольного прямоугольника $ABCD$ и для любой точки M (лежащей или не лежащей в плоскости прямоугольника) выполняется равенство $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2$.

6.21. Даны два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите вектор $\vec{c}$, компланарный векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и удовлетворяющий системе уравнений $(\vec{a}, \vec{c}) = 1$, $(\vec{b}, \vec{c}) = 0$.

6.22. Известно, что среди векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ никакие два не являются коллинеарными. Докажите, что если $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{c}] = [\vec{c}, \vec{a}]$, то $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.

6.23. Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис в пространстве, $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c}$. Докажите, что $\lambda = \frac{(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$, $\mu = \frac{(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$, $\nu = \frac{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})}{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})}$.

6.24. Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены от единого начала. Найдите объём тетраэдра, три ребра которого совпадают с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Ответ обоснуйте.

6.25. Даны вершины тетраэдра: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$. Найдите объём тетраэдра.

6.26. Дан тетраэдр $ABCD$. Пусть $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Найдите длину высоты, опущенной из вершины C.

6.27. Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ отложены от единого начала. Найдите объём призмы, основание которой является треугольником, две стороны которого совпадают с векторами $\vec{a}, \vec{b}$, а боковое ребро призмы совпадает с вектором $\vec{c}$. Ответ обоснуйте.

6.28. Три некомпланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ отложены от единого начала. Докажите, что плоскость, проведённая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}]$.

6.29. Известно, что векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ненулевые и $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}], \vec{b} = [\vec{c}, \vec{a}], \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$. Найдите длины векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и углы между этими векторами.

6.30. Считая, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ненулевые, установите, при каком их взаимном расположении справедливо равенство $\vec{b}(\vec{a}, \vec{c}) = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b})$.

6.31. Считая, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ ненулевые, установите, при каком их взаимном расположении справедливо равенство $\left[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]\right] = \left[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\right]$.

6.32. Докажите тождество: $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) \end{vmatrix}$.

6.33. Докажите, что площадь параллелограмма, две стороны которого совпадают с неколлинеарными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, отложенными от общего начала, вычисляется по формуле $S = \sqrt{|\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}$.

6.34. Докажите тождество $\left[\vec{a}, \left[\vec{a}, \left[\vec{a}, [\vec{a}, \vec{b}]\right]\right]\right] = |\vec{a}|^4 \vec{b}$ при условии, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

6.35. Докажите тождество: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 + \left|\left[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}\right]\right|^2 = \left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|^2 \cdot |\vec{c}|^2$.

6.36. Докажите тождество: $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2 = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}$.

6.37. Докажите тождество: $\left([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]\right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$.

6.38. Докажите, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда компланарны векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$ и $[\vec{c}, \vec{a}]$.

6.39. Докажите, что если векторы $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[\vec{b}, \vec{c}]$ и $[\vec{c}, \vec{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

6.40. Докажите тождество: $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|^2 \cdot |[\vec{a}, \vec{c}]|^2 - \left([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{c}]\right)^2 = |\vec{a}|^2 \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^2$.

6.41. Докажите тождество: $\left(\left[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{b}, \vec{c}]\right], \left[[\vec{b}, \vec{c}], [\vec{c}, \vec{a}]\right], \left[[\vec{c}, \vec{a}], [\vec{a}, \vec{b}]\right]\right) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})^4$.

6.42. Докажите тождество: $\left([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]\right) = \begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{c}) & (\vec{a}, \vec{d}) \\ (\vec{b}, \vec{c}) & (\vec{b}, \vec{d}) \end{vmatrix}$.

6.43. Докажите тождество: $\left([\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]\right) + \left([\vec{a}, \vec{c}], [\vec{d}, \vec{b}]\right) + \left([\vec{a}, \vec{d}], [\vec{b}, \vec{c}]\right) = 0$.

6.44. Докажите тождество: $\left[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{c}, \vec{d}]\right] = \vec{c}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) - \vec{d}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

6.45. Докажите тождество: $\left[[\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]\right] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$.

6.46. Докажите тождество: $\vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) + \vec{b}(\vec{c},\vec{a},\vec{d}) + \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$.

6.47. Докажите тождество: $(\vec{a},\vec{b})[\vec{c},\vec{d}] + (\vec{a},\vec{c})[\vec{d},\vec{b}] + (\vec{a},\vec{d})[\vec{b},\vec{c}] = \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$.

6.48. Докажите тождество $\left[\vec{a},\left[\vec{b},[\vec{c},\vec{d}]\right]\right] = [\vec{a},\vec{c}](\vec{b},\vec{d}) - [\vec{a},\vec{d}](\vec{b},\vec{c})$.

6.49. Докажите тождество $\left[\vec{a},\left[\vec{b},[\vec{c},\vec{d}]\right]\right] = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - [\vec{c},\vec{d}](\vec{a},\vec{b})$.

6.50. Докажите тождество: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})[\vec{p},\vec{q}] = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a},\vec{p}) & (\vec{b},\vec{p}) & (\vec{c},\vec{p}) \\ (\vec{a},\vec{q}) & (\vec{b},\vec{q}) & (\vec{c},\vec{q}) \end{vmatrix}$.

6.51. Докажите тождество: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{a},\vec{p},\vec{q}) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{b},\vec{p}) & (\vec{a},\vec{b},\vec{q}) \\ (\vec{a},\vec{c},\vec{p}) & (\vec{a},\vec{c},\vec{q}) \end{vmatrix}$.

6.52. Докажите тождество: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f}) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{d}) & (\vec{a},\vec{e}) & (\vec{a},\vec{f}) \\ (\vec{b},\vec{d}) & (\vec{b},\vec{e}) & (\vec{b},\vec{f}) \\ (\vec{c},\vec{d}) & (\vec{c},\vec{e}) & (\vec{c},\vec{f}) \end{vmatrix}$.

6.53. Докажите тождество: $\left([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}],[\vec{e},\vec{f}]\right) = (\vec{a},\vec{b},\vec{d})(\vec{c},\vec{e},\vec{f}) - (\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f})$.

6.54. Дано комплексное число $z = x + iy$. Найдите аргумент числа z для всех возможных значений x и y.

6.55. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих уравнению $|z - z_1| = |z - z_2|$, где z_1 и z_2 — фиксированные комплексные числа, $z_1 \neq z_2$. Ответ обоснуйте.

6.56. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих уравнению $\arg(z - z_0) = \alpha$. Ответ обоснуйте.

6.57. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, удовлетворяющих системе неравенств $\varphi_1 < \arg(z - z_0) < \varphi_2$. Ответ обоснуйте.

6.58. Решите уравнение $z^5 = \bar{z}$.

6.59. Докажите, что тангенс угла между двумя прямыми на плоскости $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ равен $\left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$.

6.60. Даны уравнения двух прямых на плоскости: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Получите необходимые и достаточные условия того, что эти прямые совпадают; параллельны, но не совпадают; пересекаются в единственной точке.

6.61. Найдите расстояние между двумя параллельными прямыми на плоскости $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$.

6.62. Найдите координаты ортогональной проекции точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямую $Ax + By + C = 0$ на плоскости, а также координаты точки, симметричной точке M_0 относительно данной прямой.

6.63. Докажите, что уравнение прямой на плоскости, проходящей через две несовпадающие точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, может быть представлено в виде $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

6.64. Даны уравнения двух плоскостей: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Получите необходимые и достаточные условия того, что эти плоскости совпадают; параллельны, но не совпадают; имеют единственную общую прямую.

6.65. Найдите расстояние между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$.

6.66. Найдите координаты ортогональной проекции точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, а также координаты точки, симметричной точке M_0 относительно данной плоскости.

6.67. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно плоскостям $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ при условии, что векторы нормали к плоскостям не коллинеарны.

6.68. Даны две прямые в пространстве: $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ и $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$. Получите необходимые и достаточные условия того, что эти прямые совпадают; параллельны, но не совпадают; пересекаются в единственной точке; скрещиваются.

6.69. Известно, что прямые $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ и $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$ пересекаются в единственной точке. Найдите координаты этой точки.

6.70. Дана прямая $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Получите необходимые и достаточные условия того, что прямая принадлежит плоскости; параллельна плоскости; пересекает плоскость в единственной точке.

6.71. Известно, что прямая $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ пересекаются в единственной точке. Найдите координаты этой точки.

6.72. Найдите координаты ортогональной проекции точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ на прямую $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$, а также координаты точки, симметричной точке M_1 относительно данной прямой.

6.73. Приведите к каноническому виду уравнение кривой второго порядка $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$.

6.74. Найдите множество точек в пространстве, равноудалённых от двух скрещивающихся прямых $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{0}$ и $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$.

6.75. Докажите, что уравнение $z = xy$ задаёт гиперболический параболоид.

6.76. Докажите, что уравнение $z^2 = xy$ задаёт конус с вершиной в начале координат.

6.77. Пользуясь свойствами определителей, докажите следующее тождество: $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

6.78. Пользуясь свойствами определителей, докажите следующее тождество: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$.

6.79. Пользуясь свойствами определителей, докажите следующее тождество: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

6.80. Пользуясь свойствами определителей, докажите следующее тождество: $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ac)$.

6.81. Пусть $A = \left(a_{ij}\delta_{ij}\right)_{n\times n}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, $a_{ii} \neq 0$ при $i = 1, \dots, n$. Вычислите A^{-1}.

6.82. Верно ли, что если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то $(AB)^T = A^T B^T$? Если да, докажите это; если нет, приведите пример, опровергающий данное равенство.

6.83. Верно ли, что если A и B — невырожденные квадратные матрицы одного порядка, то $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$? Если да, докажите это; если нет, приведите пример, опровергающий данное равенство.

6.84. Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Как изменится матрица A^{-1}, если в матрице A переставить местами k-ю и l-ю строки?

6.85. Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Как изменится матрица A^{-1}, если в матрице A умножить k-ю строку на число $\lambda \neq 0$?

6.86. Пусть A — невырожденная квадратная матрица. Как изменится матрица A^{-1}, если в матрице A к k-й строке прибавить l-ю, умноженную на число λ?

6.87. Верно ли, что для любых квадратных матриц A и B одного порядка выполняется равенство $\det(A+B) = \det A + \det B$? Если да, докажите это; если нет, приведите пример, опровергающий это равенство.

6.88. Существуют ли ненулевые квадратные матрицы, произведение которых равно нулевой матрице? Если нет, докажите это; если да, приведите пример.

6.89. Существуют ли матрицы A и B такие, что $AB = \theta$, $BA = I$, где θ — нулевая матрица, I — единичная матрица? Если нет, докажите это; если да, приведите пример.

6.90. Найдите все квадратные матрицы A второго порядка, для которых $A^2 = \theta$, где θ — нулевая матрица. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

6.91. Найдите все квадратные матрицы A второго порядка, для которых $A^2 = I$, где I — единичная матрица. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

6.92. Известно, что A — невырожденная квадратная матрица, которая коммутирует с матрицей B. Докажите, что матрица A^{-1} тоже коммутирует с матрицей B.

6.93. Известно, что квадратные матрицы A и B невырождены и коммутируют. Докажите, что матрицы A^{-1} и B^{-1} тоже коммутируют.

6.94. Пусть X и Y — столбцы одинакового размера и $A = XY^T$. Докажите, что существует такое число λ, что $A^2 = \lambda A$. (Квадрат матрицы означает произведение матрицы самой на себя.)

6.95. Пусть X и Y — столбцы одинакового размера и $\mu = 1 + Y^T X \neq 0$. Пусть $B = I + XY^T$, где I — единичная матрица соответствующего порядка. Докажите, что $B^{-1} = I - \frac{1}{\mu} XY^T$.

6.96. Пусть A — квадратная матрица, для которой $A^n = \theta$, где θ — нулевая матрица, $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$, где I — единичная матрица соответствующего порядка. (Возведение матрицы в натуральную степень k означает произведение матрицы самой на себя k раз.)

6.97. Вычислите $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$ для всех натуральных n. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

6.98. Докажите, что произведение двух верхних треугольных матриц одного порядка является верхней треугольной матрицей.

6.99. Докажите, что произведение двух нижних треугольных матриц одного порядка является нижней треугольной матрицей.

6.100. Докажите, что произведение двух диагональных матриц одного порядка является диагональной матрицей.

6.101. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Выразите определитель присоединённой матрицы через $\det A$.

6.102. Пусть A — кососимметричная квадратная матрица нечётного порядка. Докажите, что $\det A = 0$.

6.103. Как изменится определитель n-го порядка, если все его столбцы записать в обратном порядке?

6.104. Пусть $A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Докажите, что $A^n(\varphi) = A(n\varphi)$ при $n \in \mathbb{N}$. (Возведение матрицы в натуральную степень n означает произведение матрицы самой на себя n раз.)

6.105. Коммутатором квадратных матриц A и B одинакового порядка называется матрица $[A, B] \overset{\text{def}}{=} AB - BA$. Докажите тождество Якоби: $\big[[A, B], C\big] + \big[[B, C], A\big] + \big[[C, A], B\big] = \theta$, где θ — нулевая матрица.

6.106. Докажите, что любая квадратная матрица A может быть единственным образом представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной матрицы. (Подсказка: требуемое разложение имеет вид $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.)

6.107. На плоскости даны две прямые: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Обозначим через r ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, через R — ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$.

При каких значениях r и R прямые совпадают; параллельны, но не совпадают; пересекаются в единственной точке?

6.108. Даны две плоскости: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Обозначим через r ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, через R — ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$. При каких значениях r и R плоскости совпадают; параллельны, но не совпадают; имеют единственную общую прямую?

6.109. Даны две прямые в пространстве: $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ и $\frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$. Обозначим через r ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$, через R — ранг матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{pmatrix}$. При каких значениях r и R прямые совпадают; параллельны, но не совпадают; пересекаются в единственной точке; скрещиваются?

6.110. Докажите, что если три прямые на плоскости $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пересекаются в одной точке, то $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$.

6.111. Докажите, что если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$, то три прямые на плоскости $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ либо пересекаются в одной точке, либо параллельны.

6.112. Пусть A, B, C — столбцы, составленные из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ относительно некоторого базиса в пространстве. Докажите, что если векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы, то и столбцы A, B, C линейно зависимы.

6.113. Пусть A, B, C — столбцы, составленные из координат векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ относительно некоторого базиса в пространстве. Докажите, что если столбцы A, B, C линейно зависимы, то и векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимы.

6.114. При каждом значении параметра λ найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & \lambda & 1 \\ \lambda & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

6.115. При каждом значении параметра p найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 & p+1 \\ 1 & p & 1 & 2 \\ 2-p & -6 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

6.116. Матрица A размера 4×3 такова, что присоединение к ней строки $(1 \quad 1 \quad 1)$ меняет её ранг, а присоединение к ней строки $(1 \quad 2 \quad 1)$ или $(-1 \quad 1 \quad 1)$ не меняет её ранга. Чему в таком случае равен ранг матрицы A? Ответ обоснуйте.

6.117. Докажите, что матрица ранга r представима в виде суммы r матриц ранга 1.

6.118. Решите систему уравнений при каждом значении параметра c:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = c, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$$

ОБРАЗЕЦ БИЛЕТА К ПЕРВОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА

1. Сформулируйте определение векторного произведения векторов. Чему равно векторное произведение векторов, один из которых нулевой? Чему равно векторное произведение вектора самого на себя?

2. Сформулируйте оптическое свойство гиперболы.

3. Запишите формулу, связывающую алгебраические дополнения и миноры определителя третьего порядка. Докажите её для случая первой строки и первого столбца определителя.

4. Докажите, что любое комплексное число, кроме нуля, можно представить в тригонометрической форме.

5. Получите необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых на плоскости $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

6. Докажите, что если квадратные матрицы A и B коммутируют, то выполняется равенство $(A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$.

ОБРАЗЕЦ БИЛЕТА КО ВТОРОЙ ЧАСТИ ЭКЗАМЕНА

1. Сформулируйте и докажите теорему о расположении точек относительно прямой на плоскости.

2. Докажите тождество: $\left([\vec{a},\vec{b}],[\vec{c},\vec{d}]\right) = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{c}) & (\vec{a},\vec{d}) \\ (\vec{b},\vec{c}) & (\vec{b},\vec{d}) \end{vmatrix}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В.В. Колыбасова.* Лекции и семинары по аналитической геометрии: http://sites.google.com/site/vkolybasova

2. *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* Аналитическая геометрия.

3. *В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.* Линейная алгебра.

4. *С.Б. Кадомцев.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

5. *А.В. Овчинников.* Лекции и семинары по аналитической геометрии: http://matematika.phys.msu.ru/stud_gen/21