

Вопросы к коллоквиуму по курсу “Методы математической физики”

(2013 год, первый поток)

В билете 5 вопросов, по одному из каждого раздела. Разделы отделены чертой.

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0, x \in (a, b)$, где $k(x) = (x - a)\varphi(x), \varphi(a) \neq 0$, в особых точках. Как она доказывается?
 2. Напишите уравнение Бесселя, его фундаментальные системы решений. Дайте определение функций, входящих в эти системы решений, приведите графики функций Бесселя и Неймана.
 3. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Напишите формулы для функций Бесселя порядков $1/2$ и $-1/2$. Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
 4. Дайте определение функций Ханкеля и Неймана. Напишите интегральное представление для функции Бесселя и функций Ханкеля первого и второго рода. Как связаны между собой эти функции? Приведите график функции Неймана нулевого порядка. Могут ли функции Ханкеля иметь вещественные нули?
 5. Напишите асимптотические формулы при больших и малых значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Покажите, что все нули функции Бесселя, кроме, быть может, $x=0$, простые.
 6. Дайте определение собственных функций круга. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений в случае граничных условий третьего рода. Напишите выражение для квадрата нормы.
 7. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Приведите фундаментальную систему решений этого уравнения. Дайте определение функции Инфельда и Макдональда, приведите их графики. Укажите поведение этих функций при больших и малых значениях аргумента.
 8. Какие из цилиндрических функций образуют пары линейно-независимых решений уравнения Бесселя? Напишите выражения для определителя Вронского для функций Бесселя положительного и отрицательного порядков, для функций Бесселя и Неймана, для функций Бесселя и Ханкеля.
-
9. Дайте определение классических ортогональных полиномов. Напишите уравнение, которому удовлетворяют эти функции. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов. Образуют ли производные КОП систему КОП, если да, то с каким весом? Откуда это следует?
 10. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках. Напишите формулу для собственных значений этой задачи. Как получают эту формулу?
 11. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (формулу Родрига). Приведите формулу Родрига для полиномов Лежандра. С ее помощью постройте полиномы Лежандра P_0 и P_1 .
 12. Дайте определение полиномов Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений этой задачи и выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
 13. Дайте определение полиномов Лагерра и полиномов Эрмита. Сформулируйте задачи, решениями которой они являются. Приведите формулу Родрига. Напишите выражения для квадрата нормы.

14. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов. Напишите для нее общую формулу. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита.

15. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра и выражение для квадрата нормы.
16. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для этих функций. Напишите условие ортогональности для сферических функций. Приведите выражение квадрата нормы. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости в ряд по сферическим функциям. Дайте определение шаровых функций.
17. Дайте определение собственных функций шара. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений в случае граничных условий третьего рода. Напишите выражение для квадрата нормы.

18. Дайте определение полного линейного пространства. Приведите примеры. Сформулируйте теорему о пополнении линейного пространства.
19. Дайте определение линейного множества (линеала). Дайте определение множества, плотного в линейном пространстве. Приведите примеры.
20. Дайте определение полной ортогональной системы функций в пространстве Лебега. Приведите примеры полных систем.
21. Дайте определение замкнутой ортогональной системы в пространстве Лебега. Приведите примеры.
22. Как строится пространство Лебега $L_2(D)$?
23. Как строится пространство Соболева $W_2^1(D)$?

24. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных. Напишите для них канонические формы. Приведите пример уравнения смешанного типа.
25. Дайте определения уравнений эллиптического, (нормального) гиперболического, ультрагиперболического и параболического типов в случае многих переменных. Напишите для них канонические формы.
26. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных? В каком случае можно привести уравнение к канонической форме в подобласти, где уравнение принадлежит к одному типу?