Обобщенные решения краевых задач

Рассмотрение классических решений, то есть решений, имеющих все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющих уравнению, граничным и начальным условиям, накладывает существенные ограничения на исходные данные задачи. Вместе с тем при выводе основных дифференциальных уравнений было показано, что если исходить не из дифференциальных, а из интегральных уравнений, то класс решений, а значит, и класс исходных краевых задач, можно существенно расширить. Такие решения называют обобщенными. В зависимости от рассматриваемых интегральных уравнений получают различные классы обобщенных решений.

1 Некоторые сведения об интеграле Лебега

Определение 1.1 *Множество $A \subset \mathbb{R}_n$ имеет меру нуль, если для любого $\varepsilon > 0$ оно может быть покрыто шарами суммарного объема меньше ε.*

Всякое подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль; объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль.

Говорят, что некоторое свойство выполняется *почти всюду* в области $\Omega \subset \mathbb{R}_n$, если множество точек Ω, на которых оно не выполняется, имеет меру нуль.

Определение 1.2 *Функцию называют измеримой, если она почти всюду совпадает с пределом последовательности кусочно-непрерывных функций (почти всюду конечных), сходящейся почти всюду.*

Если f и g — измеримые функции, то $f + g$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $|f|$, f/g $(g \neq 0)$ — измеримые функции.

Определение 1.3 *Множество $A \subset \mathbb{R}_n$ называется измеримым, если его характеристическая функция*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \bar{\in} A \end{cases} \tag{1.1}$$

измерима.

Определение 1.4 *Пусть* $\{f_k\}$, $k = 1, 2, ...$ *— неубывающая последовательность кусочно-непрерывных функций, интегралы Римана от которых ограничены:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k(x)dx \equiv \int\int\limits_{\mathbb{R}_n} ... \int f_k(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1dx_2...dx_n < C, k = 1, 2, ...$$

Пусть функция $f(x)$ *совпадает почти всюду с пределом такой последовательности* $\{f_k\}$. *Предел неубывающей ограниченной последовательности интегралов* $\int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k(x)dx$ *будем называть интегралом Лебега функции* f*:*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k(x)dx \tag{1.2}$$

Класс таких функций $f(x)$ обозначают L^+. Определение корректно, если интеграл Лебега функции $f \in L^+$ не зависит от выбора последовательности $\{f_k\}$. Можно показать ([1], стр.18), что если $f \in L^+$, $f(x) \geq 0$ почти всюду и $\{f_k\}$ — последовательность, определяющая интеграл Лебега функции f, то

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k(x)dx \geq 0$$

Пусть $\{g_j\}$ — некоторая другая постедовательность, определяющая интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}_n} f dx$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}(f_k - g_j) = f - g_j \geq 0$ почти всюду, откуда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} (f_k - g_j)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k dx - \int\limits_{\mathbb{R}_n} g_j dx \geq 0,$$

то есть

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} g_j dx \leq \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k dx$$

Аналогичным образом получим

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k dx \leq \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} g_j dx$$

Таким образом

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k dx = \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} g_j dx$$

Определение 1.5 *Вещественная функция* $f(x)$ *называется интегрируемой по Лебегу (суммируемой), если она представима в виде*

$$f = f_1 - f_2, \ f_{1,2} \in L^+$$

При этом интеграл Лебега функции f имеет вид

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_1 dx - \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_2 dx \tag{1.3}$$

Класс интегрируемых по Лебегу функций $f(x)$ обобзначают L.

Покажем, что определение корректно. Пусть функцию f можно также представить в виде $f = f_1' - f_2'$, $f_{1,2}' \in L^+$. Тогда $f_1 - f_2 = f_1' - f_2'$, и следовательно $f_1 + f_2' = f_1' + f_2$, причем $f_1 + f_2' \in L^+$, $f_1' + f_2 \in L^+$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} (f_1 + f_2')dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n} (f_1' + f_2)dx$$

Но тогда

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} (f_1 - f_2)dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n} (f_1' - f_2')dx$$

что и требовалось доказать.

Если A — измеримое множество, то существует интеграл

$$\int\limits_{A} dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \chi_A dx, \tag{1.4}$$

называемый Лебеговой мерой множества A.

Комплекснозначная функция $f(x)$ называется интегрируемой по Лебегу, если $\mathrm{Re} f$ и $\mathrm{Im} f$ интегрируемы по Лебегу. При этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f dx \equiv \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathrm{Re} f dx + i \int\limits_{\mathbb{R}_n} \mathrm{Im} f dx \tag{1.5}$$

Будем говорить, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на измеримом множестве A, то есть $f \in L(A)$, если $f \cdot \chi_A \in L$. Число

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x) \cdot \chi_A(x) dx = \int\limits_{A} f(x) dx \tag{1.6}$$

назовем интегралом Лебега функции f по множеству A.

Свойства интеграла Лебега. (Доказательства можно найти в книгах Ф. Рисса и Б. Секефальви-Надя [3], глава II, а также Колмогорова А.Н. и Фомина С.В. [2], глава V)

1. Если $f \in L$, $\int\limits_{\mathbb{R}_n} |f(x)| dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду и обратно.

2. Если $f \in L$, то $|f| \in L$; если f измерима и $|f| \in L$, то $f \in L$. При этом

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x) dx \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}_n} |f(x)| dx \tag{1.7}$$

3. Если $g \in L$, f — измерима и $|f| \le g$ почти всюду, то $f \in L$ и

$$\left| \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x)dx \right| \le \int\limits_{\mathbb{R}_n} g(x)dx \tag{1.8}$$

4. Если $f, g \in L$, λ и μ — комплексные числа, то $\lambda f + \mu g \in L$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \{\lambda f + \mu g\} dx = \lambda \int\limits_{\mathbb{R}_n} f dx + \mu \int\limits_{\mathbb{R}_n} g dx \tag{1.9}$$

5. Абсолютная непрерывность интеграла Лебега: если $f \in L(G)$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists G' \subset G$:

$$\int\limits_{G \setminus G'} |f(x)| dx < \varepsilon \tag{1.10}$$

6. Теорема Лебега (предельный переход под знаком интеграла Лебега):

Теорема 1.6 *Пусть последовательность измеримых функций $\{f_k(x)\}$ сходится почти всюду к функции $f(x)$. Если $\exists g(x) \in L$: $|f_k(x)| \le g(x)$ почти всюду, то $f(x) \in L$ и*

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x) dx \tag{1.11}$$

7. Теорема Б. Леви:

Теорема 1.7 *Если неубывающая почти всюду последовательность $\{f_k(x)\} \subset L$ сходится почти всюду к функции $f(x)$, и последовательность интегралов $\int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k(x)dx$ ограничена, то $f \in L$ и*

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}_n} f_k(x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x) dx \tag{1.12}$$

8. Замена переменных в интеграле Лебега: пусть $x = x(y) \in C^1(\bar{G}_1)$, то есть

$$x_k = x_k(y_1, ..., y_n), \ k = 1, 2, ..., n, \ x_k \in C^1(\bar{G}_1),$$

где $y \in \bar{G}_1$. Пусть при этом все значения x принадлежат области G, а преобразование является взаимно однозначным: $G \rightleftarrows G_1$, $D(x/y)$ — якобиан перехода. Для того, чтобы $f(x) \in L(G)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x(y)) \cdot D(x/y) \in L(G_1)$$

При этом

$$\int\limits_{G} f(x) dx = \int\limits_{G_1} f(x(y)) |D(x/y)| dy \tag{1.13}$$

9. Теорема Фубини о перемене порядка интегрирования:

Теорема 1.8 *Если функция $f(x,y)$, заданная на $\mathbb{R}^{n+m}$, $x \in \mathbb{R}_n$, $y \in \mathbb{R}_m$, измерима и существует повторный интеграл Лебега функции $|f(x,y)|$*

$$\int\limits_{\mathbb{R}_{n+m}} \{|f(x,y)|dx\}dy < \infty, \tag{1.14}$$

то $f \in L$. Обратно, если $f \in L$, то

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x,y)dx \ \text{и} \ \int\limits_{\mathbb{R}_m} f(x,y)dy \tag{1.15}$$

существуют почти всюду, интегрируемы по Лебегу, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}_n} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}_m} f(x,y)dy \right\} dx = \int\limits_{\mathbb{R}_m} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}_n} f(x,y)dx \right\} dy = \int\limits_{\mathbb{R}_{n+m}} \{f(x,y)dx\}dy \tag{1.16}$$

2 Основные функциональные пространства

Определение 2.1 *Множество E абстрактных элементов называется вещественным (комплексным) линейным нормированным пространством, если*

1) E — линейная система с умножением на вещественные (соответственно — комплексные) числа;

2) каждому элементу $u \in E$ ставится в соответствие вещественное число $\|u\|$, называемое нормой и удовлетворяющее аксиомам:

a) $\|u\| \geq 0$, причем $\|u\| = 0$ только для нулевого элемента системы E,

b) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ для любых $u, v \in E$ (неравенство треугольника)

c) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$.

В таком пространстве можно ввести естественную метрику: расстояние между элементами u и v определим как

$$\rho(u,v) = \|u-v\|$$

Определение 2.2 *Говорят, что последовательность $\{u_n\} \subset E$ сходится к элементу $u \in E$ по норме E (или же сходится сильно), если $\|u_n - u\| \to 0$ при $n \to \infty$.*

Сильную сходимость обозначают как $u_n \to u$.

Определение 2.3 *Пространство E называется полным, если для любой последовательности $\{u_n\} \subset E$, такой что $\|u_p - u_q\| \to 0$ при $p, q \to \infty$, существует предельный элемент $u \in E$. Полное линейное нормированное простренство называют банаховым.*

Определение 2.4 *Гильбертовым пространством H называют частный случай банахова пространства, в котором для любой пары элементов $u, v \in H$ определено скалярное произведение (u, v) — число, удовлетворяющее аксиомам*
a) $(u, v) = \overline{(v, u)}$, *где черта означает комплексное сопряжение,*
b) $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$,
c) $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$
d) $(u, u) \geq 0$, *причем* $(u, u) = 0$ *только если u является нулевым элементом.*
При этом в качестве нормы элементов пространства H берут $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$, $\forall u \in H$.
Для любых $u, v \in H$ справедливо неравенство Коши-Буняковского

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

В гильбертовом пространстве H кроме сильной сходимости рассматривают также слабую сходимость:

Определение 2.5 *Последовательность $\{u_n\} \subset H$ называется слабо сходящейся в H к элементу $u \in H$, если $(u_n - u, v) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $v \in H$.*
Для слабой сходимости принято обозначение $u_n \rightharpoonup u$.

Пусть Ω — некоторая область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$.

Определение 2.6 *Совокупность всех измеримых функций $f(x)$, определенных на области Ω и имеющих конечный интеграл (в смысле Лебега)*

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \tag{2.1}$$

с каким-либо фиксированным $p \geq 1$, образует полное пространство Банаха, если норму в ней определить равенством (2.1). Это пространство обозначают $L_p(\Omega)$.
Элемент $L_p(\Omega)$ — это не одна какая-то функция, а целый класс функций, эквивалентных на Ω, то есть совпадающих почти всюду на Ω. Особую роль в приложениях играют пространства $L_1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$. Пространство $L_2(\Omega)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением:

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} f(x)\bar{g}(x)dx, \tag{2.2}$$

где черта над функцией $g(x)$ означает комплексное сопряжение (это обозначение будет использоваться и далее по тексту, поэтому больше расшифровывать его не будем).

Определение 2.7 *Множество M, расположенное в банаховом пространстве B, называется компактным в B, если всякая бесконечная последовательность элементов из M содержит сильно сходящуюся подпоследовательность. Если пределы всех таких подпоследовательностей принадлежат M, то M называется компактным в себе.*

Будем обозначать множество всех непрерывных на Ω функций, имеющих на Ω непрерывные производные до порядка p включительно, как $C^p(\Omega)$, и множество всех бесконечно дифференцируемых функций, определенных на Ω, как $C^\infty(\Omega)$.

Определение 2.8 *Носителем функции $f(x)$ называют множество $supp(f)$, такое что $f(x) \equiv 0$, если x не принадлежит $supp(f)$.*

$\dot{C}^\infty(\Omega)$ — подмножество $C^\infty(\Omega)$, состящее из функций с компактным носителем, который расположен строго внутри Ω.

Теорема 2.9 *Замкнутое ограниченное множество в гильбертовом пространстве H слабо компактно в себе, то есть из любой принадлежащей этому множеству последовательности можно выделить слабо сходящуюся к элементу того же множества подпоследовательность.*

Пусть область Ω является областью с "не слишком плохой границей", то есть принадлежит классу так называемых "строго липшицевых областей"[7]. К ним относятся, например, области с гладкой границей, а также звездные области (область Ω называется звездной, если уравнение ее границы $\partial\Omega$ можно задать с помощью непрерывной положительной функции $f(\theta)$, где θ — точка единичной сферы, в виде $x = x^0 + f(\theta)n_\theta$, где n_θ — единичный вектор, соответствующий точке θ).

Рассмотрим совокупность $C^l(\bar{\Omega})$ всех функций $f(x)$, имеющих в $\bar{\Omega}$ (то есть в области Ω вместе с ее границей $\partial\Omega$) непрерывные производные по $x_1,...,x_n$ до порядка l включительно и введем в $C^l(\bar{\Omega})$ норму

$$\|f\|_{W_m^l(\Omega)} = \left\{ \int\limits_\Omega \sum_{k=0}^{l} \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right|^m \right\}^{1/m} \tag{2.3}$$

в которой $m \geq 1$, а $\sum\limits_{(k)}$ есть суммирование всех возможных производных порядка k. Множество $C^l(\bar{\Omega})$ не является полным относительно указанной нормы. Рассмотрим в нем все возможные фундаментальные последовательности, в которых сходимость понимается как сходимость по норме (2.3) и пополним $C^l(\bar{\Omega})$ пределами этих последовательностей. Такая процедура называется пополнением по норме.

Определение 2.10 *Банахово пространство, получаемое пополнением множества $C^l(\bar{\Omega})$ по норме (2.3), называют пространством Соболева и обозначают $W_m^l(\Omega)$.*

Подпространство $\overset{\circ}{W}{}^l_m(\Omega)$ пространства $W^l_m(\Omega)$ получается замыканием по норме (2.3) множества $\dot{C}^\infty(\Omega)$.

Важный для приложений частный случай пространства $W^l_m(\Omega)$ – пространство Соболева $W^1_2(\Omega)$ получается пополнением множества всех непрерывных функций $f(x)$, имеющих в области $\bar{\Omega}$ непрерывные частные производные 1-го порядка, по норме

$$\|f\|_{W^1_2(\Omega)} = \left\{ \int\limits_\Omega \left(|f(x)|^2 + \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|^2 \right) dx \right\}^{1/2} \tag{2.4}$$

Это пространство является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(f,g)_{W^1_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \left(f(x)\bar{g}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{g}(x)}{\partial x_k} \right) dx \tag{2.5}$$

и играет важную роль при изучении краевых задач для уравнений второго порядка различных типов. В частности, его подпространство $\overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ используется при исследовании задач Дирихле.

3 Обобщенные производные порядка k и их свойства.

Пусть Ω — ограниченная область в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}_n$. Используя равенство

$$\int\limits_\Omega \left\{ u \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} + (-1)^{k+1} v \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right\} dx = 0;\ k_1 + k_2 + ... + k_n = k \tag{3.1}$$

справедливое для любых двух бесконечно дифференцируемых в области Ω функций $u(x)$ и $v(x)$, где $v(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$, можно ввести понятие обобщенной производной функции $u(x)$, а именно:

Определение 3.1 *Назовем функцию $\omega_{k_1...k_n}$, интегрируемую по любой строго внутренней подобласти Ω' области Ω, обобщенной производной вида $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}$ функции u, интегрируемой по любой Ω', если для любой функции $v(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$ имеет место тождество*

$$\int\limits_\Omega \left\{ u \frac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} + (-1)^{k+1} v \omega_{k_1...k_n} \right\} dx = 0;\ k_1 + k_2 + ... + k_n = k \tag{3.2}$$

Обобщенные производные сохраняют много, но не все свойства обычных классических производных [4],[5] :

1. Пусть функции u_1 и u_2 имеют обобщенные производные вида $\dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}$ в области Ω. Тогда

$$\frac{\partial^k(C_1u_1+C_2u_2)}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}=C_1\frac{\partial^k u_1}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}+C_2\frac{\partial^k u_2}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}} \tag{3.3}$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы.

2. Пусть $v=\dfrac{\partial^l u}{\partial x_1^{l_1}...\partial x_n^{l_n}}$ и $w=\dfrac{\partial^k v}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}$ в области Ω. Тогда

$$w=\frac{\partial^{k+l}u}{\partial x_1^{k_1+l_1}...\partial x_n^{k_n+l_n}} \tag{3.4}$$

3. Обобщенная производная не зависит от порядка дифференцирования.

4. Для сохранения правила

$$\frac{\partial(u_1u_2)}{\partial x_i}=u_1\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\frac{\partial u_1}{\partial x_i}u_2 \tag{3.5}$$

нужно потребовать, чтобы u_k и $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_i}$ $(k=1,2)$ были квадратично интегрируемы в смысле Лебега по $\forall\bar{\Omega}'\subset\Omega$.

5. Из существования обобщенных производных вида $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}}$ не следует существование производных более низкого порядка. Но если функция $u(x)$ имеет обобщенные производные k-го порядка всех видов, и p-е степени $(p>1)$ модулей самой функции $u(x)$ и этих производных интегрируемы (в смысле Лебега) по $\forall\bar{\Omega}'\subset\Omega$, то u имеет все обобщенные производные порядка ниже k, принадлежащие $L_p(\Omega')$.

6. Обобщенные производные определяются с точностью до множества меры нуль и "привязаны"к области Ω. Их следует рассматривать не как одну функцию, а как целый класс эквивалентных функций, различающихся на множестве меры нуль.

Определение 3.2 *Функция $f(x)$, заданная на некотором отрезке $[a,b]$, называется абсолютно непрерывной на нем, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что, какова бы ни была конечная система попарно непересекающихся интервалов (a_k,b_k), $k=1,2,...,n$ с суммой длин, меньшей δ*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta,$$

выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

7. Пусть функция u зависит от одной переменной $x\in[0,l]$ и является абсолютно непрерывной на $[0,l]$. Тогда она имеет почти всюду обычную производную $\dfrac{du}{dx}$, интегрируемую на $[0,l]$, причем

$$u(x)=u(x_1)+\int\limits_{x_1}^{x}\frac{du(\tau)}{d\tau}d\tau;\ x_1,x_2\in[0,l] \tag{3.6}$$

Определенная таким образом производная $\dfrac{du}{dx}$ является обобщенной производной функции u на $[0,l]$. Верно утверждение: если $u \in L_1(0,l)$, имеет на $(0,l)$ обобщенную производную $\dfrac{du}{dx} \in L_1(0,l)$ (то есть $u \in W_1^1(0,l)$), то $u(x)$ эквивалентна абсолютно непрерывной на $[0,l]$ функции, для которой справедливо равенство (3.6).

8. Пусть $u(x) \in L_1(\Omega)$ и $\exists \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \in L_1(\Omega)$. Тогда $u(x)$ абсолютно непрерывна по x_1 при почти всех значениях $x' \equiv (x_2, ..., x_n)$.

9. Пусть $u(x) \in L_1(\Omega)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \in L_1(\Omega)$, $i = 1, 2, ..., n$ и пусть $y(x) = (y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x))$ — невырожденная замена переменных в области $\bar{\Omega}$: y_i — непрерывные в $\bar{\Omega}$ функции, обобщенные производные $\dfrac{\partial y_i}{\partial x_k}$ ограничены, якобиан $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| \geq C > 0$ в области $\bar{\Omega}$ и обратные функции $x = x(y)$ имеют те же свойства. Тогда $\tilde{u}(y) = u(x(y)) \in L_1(\tilde{\Omega})$, где $\tilde{\Omega}$ — область изменения y, кроме того $\exists \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} \in L_1(\tilde{\Omega})$, причем

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_k} = \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x=x(y)} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \tag{3.7}$$

Теорема 3.3 *Если к интегрируемой на области Ω функции $u(x)$ можно приблизиться с помощью последовательности k раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций $u_s(x)$, $s = 1, 2, ...$ в том смысле, что для любой $v(x) \in \dot{C}^\infty(\Omega)$*

$$\lim_{s\to\infty} \int\limits_\Omega (u_s - u) v dx \to 0$$

и если

$$\left\| \frac{\partial^k u_s}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right\|_{L_p(\Omega)} = \left\{ \int\limits_\Omega \left| \frac{\partial^k u_s}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right|^p dx \right\}^{1/p} \leq C,$$

то функция $u(x)$ имеет обобщенную производную $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}}$, причем $\left\| \dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} ... \partial x_n^{k_n}} \right\|_{L_p(\Omega)} \leq C$, $p \geq 1$.

Теорема остается справедливой, если $u_s \in L_p(\Omega)$ и обладают обобщенными производными указанного типа.

3.1 Примеры

Пример 3.1. *Пусть функция $u(x)$ определена на отрезке $[0,1]$ и всюду на этом отрезке, кроме точки $x_0 = 1/2$ является бесконечно дифференцируемой. Пусть в точке x_0 эта функция имеет разрыв первого рода. Имеет ли она обобщенные производные на отрезке $[0,1]$?*

Решение. По определению обобщенной производной первого порядка, должно выполняться равенство

$$\int_0^1 \left(u(x)\frac{dv}{dx} + w_1 v \right) dx = 0,\ \forall v \in \dot{C}^\infty[0,1]. \tag{3.8}$$

Так как при $x \in [0,1/2)$ и $x \in (1/2,1]$ функция $u(x)$ гладкая, то

$$\int_0^1 u(x)\frac{dv}{dx}dx = \int_0^{1/2} u(x)\frac{dv}{dx}dx + \int_{1/2}^1 u(x)\frac{dv}{dx}dx =$$

$$= u(1/2-0)v(1/2) - \int_0^{1/2} v(x)\frac{du}{dx}dx - u(1/2+0)v(1/2) - \int_{1/2}^1 v(x)\frac{du}{dx}dx =$$

$$= -\int_0^1 v(x)\frac{du}{dx}dx - v(1/2)[u]_{x=1/2},$$

где $[u]_{x=1/2}$ — скачек функции $u(x)$ в точке разрыва $x = 1/2$. Так как в общем случае $v(1/2) \neq 0$, то такой функции w_1, что выполняется равенство (3.8) для любой $v \in \dot{C}^\infty[0,1]$ не существует. Следовательно, функция $u(x)$ не имеет даже обобщенных производных.

Пример 3.2. *Пусть* $u(x) = \dfrac{1}{|x|^\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. *Имеет ли эта функция обобщенные производные вида* u_{x_1} *и* u_{x_2} *в круге* $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1$, *и если да, то найти их.*

Решение. Покажем сначала, что функция $u(x)$ интегрируема по указанной области:

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^\varepsilon}dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{1}{\rho^\varepsilon}\rho d\rho < \infty,$$

так как $0 < \varepsilon < 1$. Здесь $x_1 = \rho\cos\varphi$ и $x_2 = \rho\sin\varphi$. Пусть $v(x)$ — произвольная функция из $\dot{C}^\infty(|x| < 1)$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{|x|\leq 1} \frac{1}{|x|^\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial x_1}dx = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \frac{1}{\rho^\varepsilon}\left\{\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\rho} - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^{1-\varepsilon}\frac{\partial v}{\partial\rho}d\rho - \int_0^1 \rho^{-\varepsilon}d\rho \int_0^{2\pi} \sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi}d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left\{ \rho^{1-\varepsilon}\cos\varphi v\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - \int_0^1 (1-\varepsilon)\rho^{-\varepsilon}\cos\varphi v d\rho \right\} - \int_0^1 \rho^{-\varepsilon}d\rho \left\{ \sin\varphi v\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} - \int_0^{2\pi} v\cos\varphi d\varphi \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \varepsilon\rho^{-\varepsilon}\cos\varphi v d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left\{\varepsilon\frac{\rho\cos\varphi}{\rho^{2+\varepsilon}}\right\} v\rho d\rho = \int_{|x|\leq 1} \left\{\varepsilon\frac{x_1}{|x|^{2+\varepsilon}}\right\} v dx$$

Таким образом $u_{x_1} = -\varepsilon\frac{x_1}{|x|^{2+\varepsilon}}$. Аналогичным образом можно показать, что $u_{x_2} = -\varepsilon\frac{x_2}{|x|^{2+\varepsilon}}$. При этом рассматриваемую функцию $u(x)$ нельзя сделать непрерывной (и даже ограниченной) с помощью ее преобразования на множестве меры нуль.

4 Теоремы вложения

Пусть B_1 и B_2 — два банаховых пространства, обладающих тем свойством, что все элементы B_1 одновременно принадлежат и пространству B_2, и выполняется неравенство

$$\|u\|_{B_2} \leq C \cdot \|u\|_{B_1}$$

для любого $u \in B_1$, где $C > 0$ — некоторая константа. Тогда говорят, что пространство B_1 вкладывается (ограниченно) в пространство B_2. Если же при этом всякое ограниченное в B_1 множество оказывается компактным в B_2, то такое вложение пространства B_1 в B_2 называют компактным.

Для Соболевских пространств $W_m^l(\Omega)$ доказан достаточно широкий круг теорем вложения [4]-[6]. В данном пособии будут приведены только те из них, которые понадобятся при исследовании существования и единственности решения краевых задач для уравнений эллиптического типа.

Определение 4.1 *Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_2$, если существуют такие числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, что*

$$\alpha \cdot \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1 \leq \beta \cdot \|\cdot\|_2$$

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}_n$. В пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ можно ввести новое скалярное произведение

$$[u, v] = \int\limits_{\Omega} u_x v_x dx \equiv \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx, \tag{4.1}$$

порождающее норму, эквивалентную исходной. Очевидно, что $[u, u] \leq (u, u)_{W_2^1(\Omega)}$ для любого $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, поэтому для доказательства эквивалентности норм достаточно показать, что $\forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ справедливо *неравенство Пуанкаре - Фридрихса*

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx \leq C_\Omega^2 \int\limits_{\Omega} u_x^2 dx \tag{4.2}$$

где C_Ω — постоянная, которая зависит только от области Ω.

Доказательство. Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. К этому элементу можно приблизиться по норме

$W_2^1(\Omega)$ с помощью функций $\{u_m\} \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Если для u_m неравенство (4.2) справедливо, то, переходя в нем к пределу по норме $W_2^1(\Omega)$ при $m \to \infty$, получим соответствующее неравенство для $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Эта процедура называется "замыканием по норме".

Пусть $u \in \dot{C}^\infty(\Omega)$. Заключим область Ω в какой-либо параллелепипед $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i; i = 1, ..., n\}$. Пусть l_1 — наименьшая из длин его сторон. Продолжим u нулем вне области Ω. Тогда

$$u(x_1, x') = \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1,$$

где $x' = \{x_2, ..., x_n\} \in \Pi_1 = \{x' : 0 < x_i < l_i; i = 2..., n\}$. Следовательно

$$\int\limits_\Pi u^2 dx = \int\limits_0^{l_1} dx_1 \int\limits_{\Pi_1} \left\{ \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1 \right\}^2 dx' \le \int\limits_0^{l_1} x_1 dx_1 \int\limits_{\Pi_1} \left\{ \int\limits_0^{l_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 dy_1 \right\} dx' =$$

$$= \frac{l_1^2}{2} \int\limits_\Pi \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 dx, \tag{4.3}$$

откуда получаем $C_\Omega^2 = \frac{l_1^2}{2}$. При выводе (4.3) было использовано неравенство Коши- Буняковского для оценки внутренноего интеграла:

$$\left\{ \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(y_1, x')}{\partial y_1} dy_1 \right\}^2 dx' \le \int\limits_0^{x_1} dy_1 \int\limits_0^{x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial y_1} \right)^2 dy_1$$

Для доказательства следующей ключевой теоремы потребуется *неравенство Пуанкаре*: для любой $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Pi)$, $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i; i = 1, ..., n\}$ справедливо

$$\int\limits_\Pi u^2 dx \le \frac{1}{|\Pi|} \left(\int\limits_\Pi u dx \right)^2 + \frac{n}{2} \int\limits_\Pi \sum_{k=1}^n l_k^2 u_{x_k}^2 dx, \tag{4.4}$$

где $|\Pi|$ — объем параллелепипеда Π. Неравенство (4.4) достаточно проверить для гладких функций $u \in C^1(\Pi)$. Пусть $y_i = x_i / l_i$, $\tilde{u}(y) = u(l_1 y_1, ..., l_n y_n)$. Таким образом, достаточно показать, что

$$\int\limits_{\tilde{\Pi}} \tilde{u}^2 dy \le \left(\int\limits_{\tilde{\Pi}} \tilde{u} dy \right)^2 + \frac{n}{2} \int\limits_{\tilde{\Pi}} \sum_{k=1}^n \tilde{u}_{y_k}^2 dy, \tag{4.5}$$

где $\tilde{\Pi} = \{y : 0 < y_i < 1; i = 1, ..., n\}$.

Будем считать точку $y \in \tilde{\Pi}$ заданной и выберем произвольную точку $y' \in \tilde{\Pi}$. Тогда

$$\tilde{u}(y') - \tilde{u}(y) = \int\limits_y^{y^{(1)}} \tilde{u}_{\tau_1}(\tau_1, y_2, ..., y_n) d\tau_1 + \int\limits_{y^{(1)}}^{y^{(2)}} \tilde{u}_{\tau_2}(y_1', \tau_2, y_3, ..., y_n) d\tau_2 + ...$$

$$+\int\limits_{y^{(n-1)}}^{y^{(n)}} \tilde{u}_{\tau_n}(y'_1, y'_2, ..., y'_{n-1}, \tau_n)d\tau_n, \qquad (4.6)$$

где $y = (y_1, ..., y_n)$, $y' = (y'_1, ..., y'_n)$, $y^{(1)} = (y'_1, y_2, ..., y_n)$, ..., $y^{(n-1)} = (y'_1, y'_2, ..., y'_{n-1}, y_n)$, $y^{(n)} = y'$. Возведем обе части равенства (4.6) в квадрат:

$$\tilde{u}^2(y') - 2\tilde{u}(y')\tilde{u}(y) + \tilde{u}^2(y) \le n\left\{\int\limits_0^1 \tilde{u}^2_{\tau_1}d\tau_1 + ... + \int\limits_0^1 \tilde{u}^2_{\tau_n}d\tau_n\right\}$$

и проинтегрируем полученное равенство по $y \in \tilde{\Pi}$ и $y' \in \tilde{\Pi}$

$$2\int\limits_{\tilde{\Pi}} \tilde{u}^2 dy - 2\left(\int\limits_{\tilde{\Pi}} \tilde{u}dy\right)^2 \le n\int\limits_{\tilde{\Pi}} \sum_{k=1}^{n} \tilde{u}^2_{y_k}dy,$$

откуда получаем (4.5).

Теорема 4.2 *(Ф. Реллиха) Пусть Ω — ограниченная область. Тогда ограниченное множество в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ компактно в $L_2(\Omega)$. (При этом говорят, что пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ вкладывается в $L_2(\Omega)$ компактно.)*

Доказательство. Продолжим все элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ нулем вне Ω и рассмотрим их на параллелепипеде $\Pi = \{x : 0 < x_i < l_i; i = 1, ..., n\}$, считая $\Omega \subset \Pi$. При этом мы получим элементы $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Pi)$, нормы которых $\|\cdot\|_{L_2(\Pi)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1(\Pi)}$ совпадают с $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$ соответственно.

Разобьем Π на N^n элементарных параллелепипедов w_i со сторонами l_k/N, $k = 1, ..., n$, и гранями, параллельными координатным плоскостям. Для любой $u \in W_2^1(w_i)$ справедливо неравенство Пуанкаре:

$$\int\limits_{w_i} u^2 dx \le \frac{1}{|w_i|}\left(\int\limits_{w_i} u dx\right)^2 + \frac{n}{2}\int\limits_{w_i}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{l_k}{N}\right)^2 u^2_{x_k}dx$$

Следовательно

$$\int\limits_{\Omega} u^2 dx = \int\limits_{\Pi} u^2 dx = \sum_{i=1}^{N^n}\int\limits_{w_i} u^2 dx \le \sum_{i=1}^{N^n}\frac{1}{|w_i|}\left(\int\limits_{w_i} u dx\right)^2 + \frac{n}{2N^2}\int\limits_{\Omega}\sum_{k=1}^{n} l_k^2 u^2_{x_k}dx \qquad (4.7)$$

Пусть $\{u^{(m)}\}$ — ограниченная последовательность в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то есть $\|u^{(m)}\|_{W_2^1}(\Omega) \le C$, где C— некоторая положительная константа. Нужно показать, что из последовательности $\{u^{(m)}\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится сильно в пространстве $L_2(\Omega)$. Так как последовательность $\{u^{(m)}\}$ ограничена в $L_2(\Omega)$, то по теореме 2.9 она является слабо компактной. Не ограничивая общности, предположим, что вся последовательность $\{u^{(m)}\}$ слабо сходится в $L_2(\Omega)$. Тогда, применяя неравенство (4.7), для любых $p, q > 0$ получим

$$\|u^{(p)} - u^{(q)}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega (u^{(p)} - u^{(q)})^2 dx \le \sum_{i=1}^{N^n} \frac{1}{|w_i|} \left(\int\limits_{w_i} (u^{(p)} - u^{(q)}) dx \right)^2 +$$

$$+\frac{n}{2N^2} \max_k (l_k^2) \|u^{(p)} - u^{(q)}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \tag{4.8}$$

Второе слагаемое в (4.8) выбором N может быть сделано сколь угодно малым сразу для всех p и q. Первое слагаемое стремится к нулю при p и q, стремящихся к бесконечности, и фиксированном разбиении параллелепипеда Π за счет слабой сходимости последовательности $\{u^{(m)}\}$ в $L_2(\Pi)$, так как

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \int\limits_{w_i} (u^{(p)} - u^{(q)}) dx = \lim_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}} \left(u^{(p)} - u^{(q)}, 1 \right)_{L_2(w_i)} = 0$$

Таким образом, $\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $p, q \to \infty$, то есть последовательность $\{u^{(m)}\}$ сходится в $L_2(\Pi)$, а значит и в $L_2(\Omega)$, что и требовалось доказать. ■

Пусть область Ω допускает продолжение элементов $W_2^1(\Omega)$ на какую-либо более широкую область $\tilde{\Omega} \supset \bar{\Omega}$ в смысле

$$\|u\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \le C(\Omega, \tilde{\Omega}) \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)} \tag{4.9}$$

$$\|u_x\|_{L_2(\tilde{\Omega})} \le C'(\Omega, \tilde{\Omega}) \cdot \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{4.10}$$

где константы C и C' зависят только от областей Ω и $\tilde{\Omega}$. Тогда такого вида продолжение возможно и на параллелепипед $\Pi \supset \bar{\Omega}$. Очевидно, $W_2^1(\Pi)$ вкладывается компактно в $L_2(\Pi)$, поэтому для областей Ω, допускающих указанное продолжение (4.9-4.10), пространство $W_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega)$. (Такого вида продолжение элементов имеет место для строго липшицевых областей).

Теорема 4.3 *Если область $\bar{\Omega}$ можно представить в виде*

$$\bar{\Omega} = \cup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i,$$

где Ω_i — подобласти Ω, допускающие продолжение элементов типа (4.9-4.10) на более широкие области, то $W_2^1(\Omega)$ компактно вкладывается в $L_2(\Omega)$.

Обратимся теперь к вопросу о следах элеметов $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ на поверхностях размерности $n-1$. Пусть $u(x)$ — гладкая функция из $W_2^1(\Omega)$ и Γ — область гиперплоскости $x_1 = 0$.

Обозначим $Q_\delta(\Gamma) = \{x : 0 < x_1 < \delta; x' = (x_2, ..., x_n) \in \Gamma\}$, где $\delta > 0$ таково, что $Q_\delta(\Gamma) \in \Omega$. Тогда по формуле Ньютона-Лейбница

$$u(x_1, x') - u(0, x') = \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau$$

откуда получаем

$$u^2(0, x') = \left\{ -u(x) + \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau \right\}^2$$

Проинтегрируем это равенство по $Q_\delta(\Gamma)$:

$$\int\limits_{Q_\delta(\Gamma)} u^2(0, x')dx = \delta \int\limits_\Gamma u^2(0, x')dx' = \int\limits_{Q_\delta(\Gamma)} \left\{ -u(x) + \int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau \right\}^2 dx \leq$$

$$\leq 2 \int\limits_{Q_\delta(\Gamma)} u^2 dx + 2 \int\limits_\Gamma dx' \int\limits_0^\delta \left(\int\limits_0^{x_1} \frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} d\tau \right)^2 dx_1 \leq$$

$$\leq 2\|u\|^2_{L_2(Q_\delta(\Gamma))} + 2 \int\limits_\Gamma dx' \int\limits_0^\delta x_1 \int\limits_0^\delta \left(\frac{\partial u(\tau, x')}{\partial \tau} \right)^2 d\tau dx_1 = 2\|u\|^2_{L_2(Q_\delta(\Gamma))} + \delta^2 \int\limits_{Q_\delta(\Gamma)} u^2_{x_1} dx$$

Таким образом, мы получаем неравенство

$$\|u(0, x')\|^2_{L_2(\Gamma)} \leq \frac{2}{\delta} \|u\|^2_{L_2(Q_\delta(\Gamma))} + \delta \|u\|^2_{W_2^1(Q_\delta(\Gamma))} \tag{4.11}$$

Это неравенство останется справедливым для любой $u \in W_2^1(Q_\delta(\Gamma))$. Для такой функции $u(x)$ можно построить последовательность гладких функций $\left\{u^{(m)}(x)\right\}$, которые сходятся к $u(x)$ по норме $W_2^1(Q_\delta(\Gamma))$. Отсюда и из неравенства (4.11) следует, что последовательность $\left\{u^{(m)}(0, x')\right\}$ будет сходиться в $L_2(\Gamma)$. Функцию, определяемую на Γ как предел последовательности $\left\{u^{(m)}(0, x')\right\}$ по норме $L_2(\Gamma)$, естественно считать следом $u(x)$ на Γ. Определенный таким образом след элемента не зависит от выбора последовательности гладких функций, аппроксимирующих $u(x)$.

Утверждения, доказанные для плоских кусков Γ, переносятся на случай, когда Γ есть область на гладкой гиперповерхности, в том числе и на гладкой части границы области Ω [4]:

Теорема 4.4 *Для элементов $u \in W_2^1(\Omega)$ определены следы на областях Γ гладких гиперповерхностей как элементы $L_2(\Gamma)$. Если граница $\partial\Omega$ области Ω (или ее часть $\partial\Omega_1$) есть гладкая (кусочно-гладкая) поверхность, то на ней определены следы $u \in W_2^1(\Omega)$ как элементы $L_2(\partial\Omega)$ (соответственно $L_2(\partial\Omega_1)$) и справедливы неравенства*

$$\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \leq C_1 \left(\frac{1}{\delta} \|u\|^2_{L_2(\Omega_\delta)} + \delta \|u_x\|^2_{L_2(\Omega_\delta)} \right) \tag{4.12}$$

$$\|u(x - l\mathbf{n}) - u(x)\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \le C_2 l \int\limits_{\Omega_l} u_x^2 dx, \ 0 \le l \le \delta \tag{4.13}$$

где Ω_δ есть множество точек области Ω, удаленных от $\partial\Omega$ на расстояние, не превышающее δ ("пограничная полоса ширины δ"), δ — достаточно малое число, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя по отношению к Ω нормаль к $\partial\Omega$.

5 Обобщенные решения уравнений эллиптического типа

5.1 Постановка краевых задач

Будем рассматривать уравнения следующего вида:

$$L[u] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + a_i(x) u(x) \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x) u = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i} \tag{5.1}$$

в некоторой области Ω, где $a_{ij} = a_{ji}$ и при $\forall x \in \bar{\Omega}$ для этих коэффициентов имеет место свойство равномерной эллиптичности:

$$\nu \xi^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le \mu \xi^2, \ \xi^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \ \forall \xi \in \mathbb{R}_n,$$

где ν и μ — некоторые положительные постоянные. Будем считать, что коэффициенты $a_i(x)$, $b_i(x)$, $a(x)$ — ограниченные в Ω функции. Функции a_{ij}, a_i, f_i, вообще говоря, не обязаны иметь даже обобщенные производные. Если они имеют производные, уравнение (5.1) можно записать в традиционной форме:

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i u_{x_i} + \tilde{a} u = F \tag{5.2}$$

где $\tilde{a}_i = b_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j} + a_i$, $\tilde{a} = a + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$, $F = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}$.
Будем рассматривать в области Ω следующие краевые задачи:
задачу Дирихле: $u|_S = \psi(p)$, $p \in S$, где S — граница области Ω;
задачу Неймана: $\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_S = \psi(p)$, где $\frac{\partial u}{\partial N} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \cos(\mathbf{n}\hat{x}_i)$, $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к S, $\mathbf{n}\hat{x}_i$ — угол между $\mathbf{n}$ и осью Ox_i;
третью краевую задачу: $\left.\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(p) u\right|_S = \psi(p)$.

Во всех этих задачах определению подлежит только функция u, все остальные функции, равно как и области, в которых должны выполняться уравнения, считаются заданными. Все перечисленные задачи можно свести к задачам с однородными граничными условиями

($\psi \equiv 0$). Действительно, если ввести новую неизвестную функцию $v(x) = u(x) - \Phi(x)$, где $\Phi(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая только краевому условию, то для v получится задача с соответствующим однородным краевым условием. При этом v должна быть решением уравнения

$$L[v] = \tilde{F} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \tilde{F}_i}{\partial x_i},$$

где $\tilde{F} = f - \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \Phi_{x_i} - a\Phi$ и $\tilde{F}_i = f_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \Phi_{x_j} - a_i \Phi$.

5.2 Обобщенные решения, принадлежащие пространству $W_2^1(\Omega)$

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} + a_i u \right) + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + au = f + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}, \ x \in \Omega \\ u|_S = 0 \end{cases} \tag{5.3}$$

Пусть $a_{ij} = a_{ji}$, $\nu \xi^2 \leq \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2$ для любого $\xi \in \mathbb{R}_n$, где $\nu, \mu = const > 0$,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \mu_1, \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \leq \mu_1, \ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} \leq \mu_2, \ \mu_3 \leq a(x) \leq \mu_4.$$

Пусть f и f_i квадратично суммируемы по Ω:

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} < \infty, \ \|\mathbf{f}\|_{L_2(\Omega)} = \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i^2} \right\|_{L_2(\Omega)} < \infty$$

Формально из тождества

$$-\int_{\Omega} \left(L[u] - f - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) \eta dx = 0, \ \forall \eta \in \dot{C}^{\infty}(\Omega) \tag{5.4}$$

с помощью однократного интегрирования по частям (применяя формулы Грина) получим

$$\mathfrak{L}(u, \eta) \equiv \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \eta_{x_i} + a_i u \eta_{x_i} \right) - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \eta - au\eta \right) dx = \int_{\Omega} \left(-f\eta + \sum_{i=1}^{n} f_i \eta_{x_i} \right) dx \tag{5.5}$$

Определение 5.1 *Назовем обобщенным решением из $W_2^1(\Omega)$ уравнения в задаче (5.3) функцию $u \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющую интегральному тождеству (5.5) при любой $\eta(x) \in \dot{C}^{\infty}(\Omega)$.*

Если коэффициенты a_{ij}, a_i имеют ограниченные обобщенные производные первого порядка, функции f_i имеют обобщенные производные $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, а $u(x) \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega')$, $\forall \bar{\Omega}' \subset \Omega$, то обобщенное решение удовлетворяет уравнению в задаче (5.3) почти всюду в Ω. Однако тождество (5.5) имеет смысл и тогда, когда a_{ij}, a_i и f_i недифференцируемы, а относительно $u(x)$ известна лишь принадлежность $W_2^1(\Omega)$. Поэтому определение 5.1 действительно является расширением общепринятого понятия решения уравнения.

Определение 5.2 *Назовем обобщенным решением задачи (5.3) из пространства* $W_2^1(\Omega)$ *функцию* $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *удовлетворяющую тождеству (5.5) при* $\forall \eta(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

5.3 Исследование разрешимости задачи Дирихле в пространстве $W_2^1(\Omega)$ (три теоремы Фредгольма)

Введем в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u,v] = \sum_{i,j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij} u_{x_j} v_{x_i} dx \tag{5.6}$$

В силу тех условий, что были наложены на функции $a_{ij}(x)$, норма $\|u\|_1 = \sqrt{[u,u]}$ эквивалентна норме $\|u_x\|_{L_2(\Omega)}$ и исходной норме $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$. Тождество (5.5) можно записать в виде

$$[u,\eta] + l(u,\eta) = -(f,\eta)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (f_i, \eta_{x_i})_{L_2(\Omega)}, \tag{5.7}$$

где

$$l(u,\eta) \equiv \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u \eta_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \eta - a u \eta \right) dx \tag{5.8}$$

Очевидно, что $l(u,\eta)$ является билинейной формой на $W_2^1(\Omega) \otimes W_2^1(\Omega)$. В самом деле

$$l(\alpha u_1 + \beta u_2, \eta) = \alpha l(u_1,\eta) + \beta l(u_2,\eta)$$

$$l(u, \alpha\eta_1 + \beta\eta_2) = \alpha l(u,\eta_1) + \beta l(u,\eta_2)$$

Оценим модуль $l(u,\eta)$

$$|l(u,\eta)| \le \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i| \cdot |u| \cdot |\eta_{x_i}| + \sum_{i=1}^{n} |b_i| \cdot |u_{x_i}| \cdot |\eta| + |a| \cdot |u| \cdot |\eta| \right) dx \le$$

$$\le \mu_1 \left(\int\limits_{\Omega} |u| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\eta_{x_i}|^2} dx + \int\limits_{\Omega} |\eta| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}|^2} dx \right) + \max(|\mu_3|, |\mu_4|) \int\limits_{\Omega} |u| \cdot |\eta| dx \le$$

$$\le \mu_1 \left(\|u\|_{L_2(\Omega)} \|\eta_x\|_{L_2(\Omega)} + \|u_x\|_{L_2(\Omega)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \right) + \max(|\mu_3|, |\mu_4|) \|u\|_{L_2(\Omega)} \|\eta\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\leq C \cdot \|u\|_1 \cdot \|\eta\|_1 \tag{5.9}$$

Если мы фиксируем произвольное $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$ и будем рассматривать $l(u, \eta)$ для всех возможных $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$, то получим ни что иное, как линейный функционал над элементами η в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$, причем в силу оценки (5.9) этот функционал является ограниченным. В дальнейшем это позволит нам сформулировать обобщенную постановку задачи (5.3) в виде операторного уравнения в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$.

Приведем одну полезную теорему о свойствах линейных ограниченных функционалов над элементами гильбертовых пространств.

Определение 5.3 *Линейное подпространство M гильбертова пространства h называют замкнутым, если для любой сходящейся последовательности $\{u_j\}$ элементов из M предел этой последовательности также принадлежит M.*

Теорема 5.4 *(Рисса) Для любого ограниченного функционала l на гильбертовом пространстве h найдется один единственный элемент $w \in h$: $l(u) = (u, w)$, $u \in h$.*

Доказательство. Пусть $M = \{u \in h : l(u) = 0\}$, тогда M — замкнутое линейное подпространство пространства h. Если $M = h$, то можно взять $w = 0$. Если $M \neq h$, то $\exists u_0 \in h$: $l(u_0) \neq 0$. Не ограничивая общности можем положить $l(u_0) = 1$. Этот элемент можно представить в виде $u_0 = v_0 + w_0$, где $v_0 \in M$, $w_0 \in M^{\perp}$ (ортогональное дополнение M). Тогда $(u_0, w_0) = \|w_0\|^2 \neq 0$, так как в случае $w_0 = 0$ $u_0 \in M$, то есть $l(u_0) = 0$, что невозможно.

Пусть u — произвольный элемент h, тогда $v = u - l(u)u_0 \in M$, так как $l(v) = l(u) - l(u) = 0$. Поэтому

$$0 = (v, w_0) = (u, w_0) - l(u)(u_0, w_0) \Rightarrow$$
$$l(u) = \frac{(u, w_0)}{\|w_0\|^2} \; \forall u \in h \Rightarrow \; w = w_0 \frac{1}{\|w_0\|^2}$$

Такой элемент w единственный, так как если $\exists \tilde{w} \neq w$, то

$$l(u) = (u, \tilde{w}) \Rightarrow (u, w - \tilde{w}) = 0 \; \forall u \in h \Rightarrow w - \tilde{w} = 0,$$

что невозможно. ■

Теорема Рисса позволяет сделать важный вывод об ограниченной билинейной форме $l(u, \eta)$:

существует линейный ограниченный оператор A, действующий в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$, такой что

$$l(u, h) = [Au, \eta], \; \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega),$$

причем этот оператор A единственный.

В самом деле, если зафиксировать произвольное $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то по теореме Рисса найдется единственный элемент $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, такой что

$$l(u, \eta) = [v, \eta]$$

Так как u было выбрано произвольно, и для каждого u единственным образом определено свое v, то существует оператор A, ставящий элемент v в соответствие элементу u:

$$Au = v,$$

и этот оператор определен однозначно. Так как $l(u, \eta)$ — линейная по аргументу u форма, то

$$l(\alpha u_1 + \beta u_1, \eta) = [A(\alpha u_1 + \beta u_1), \eta] = \alpha l(u_1, \eta) + \beta l(u_2, \eta) =$$

$$= \alpha[Au_1, \eta] + \beta[Au_2, \eta] = [\alpha Au_1 + \beta Au_2, \eta],$$

то есть оператор A линейный. Покажем, что он ограниченный. Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$|[Au, \eta]| \leq \|Au\|_1 \cdot \|\eta\|_1$$

Следовательно, если $\|\eta\|_1 = 1$, то

$$\|Au\|_1 = \sup_{\|\eta\|_1 = 1} |[Au, \eta]| = \sup_{\|\eta\|_1 = 1} |l(u, \eta)| \leq C\|u\|_1$$

По определению нормы оператора

$$\|A\| = \sup_{\|u\|_1 = 1} \|Au\|_1 \leq C$$

Сумма $\left(-(f, \eta)_{L_2(\Omega)} + \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i, \eta_{x_i})_{L_2(\Omega)}\right)$ также определяет линейный функционал в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ над η, и в силу теоремы Рисса существует единственный элемент $F \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$:

$$-(f, \eta)_{L_2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} (f_i, \eta_{x_i})_{L_2(\Omega)} = [F, \eta], \ \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

Таким образом, тождество (5.7) эквивалентно тождеству

$$[u, \eta] + [Au, \eta] = [F, \eta], \ \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{5.10}$$

или же операторному уравнению

$$u + Au = F \tag{5.11}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Покажем, что A — вполне непрерывный оператор в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Пусть $\{u_k\}$, $k = 1, 2, ...$ — слабо сходящаяся к элементу $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ последовательность. Нужно показать, что последовательность $\{Au_k\}$ будет сходиться в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ сильно. Так как A — линейный ограниченный оператор, то послеловательность $\{Au_k\}$ сходится слабо к Au:

$$\lim_{k\to\infty}[Au_k - Au, v] = \lim_{k\to\infty}[(u_k - u), A^*v] = 0 \text{ для } \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

Покажем, что последовательность $\{Au_k\}$ сходится сильно в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Оценим норму разности Au_k и Au_m, воспользовавшись неравенством (5.9)

$$\|Au_k - Au_m\|_1^2 = [A(u_k - u_m), A(u_k - u_m)] = l(u_k - u_m, A(u_k - u_m)) \leq$$

$$\leq \mu_1 \left(\|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)}\|(Au_k)_x - (Au_m)_x\|_{L_2} + \|(u_k)_x - (u_m)_x\|_{L_2(\Omega)}\|Au_k - Au_m\|_{L_2(\Omega)}\right) +$$

$$+ \max(|\mu_3|, |\mu_4|)\|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)}\|Au_k - Au_m\|_{L_2(\Omega)}$$

Так как пространство $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ вкладывается компактно в $L_2(\Omega)$, а последовательности $\{u_k\}$ и $\{Au_k\}$ слабо сходятся в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то $\|u_k - u_m\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ и $\|Au_k - Au_m\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ при $k, m \to \infty$. Следовательно, $\|Au_k - Au_m\|_1 \to 0$ при $k, m \to \infty$, то есть $\{Au_k\}$ — фундаментальная последовательность в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В силу полноты пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ она сходится сильно, а это означает, что A является вполне непрерывным оператором.

Таким образом, для уравнения (5.11), а значит и для (5.3), справедлива первая теорема Фредгольма [9]:

Теорема 5.5 *Если задача(5.3) не может иметь более одного обобщенного решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, то она разрешима в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при любых f и $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ из $L_2(\Omega)$.*

Чтобы более подробно разобраться в вопросе разрешимости задачи (5.3), рассмотрим семейство уравнений

$$L[u] = \lambda u + f + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i},\ x \in \Omega \tag{5.12}$$

с комплексным параметром λ и граничными условиями

$$u|_{x\in S} = 0 \tag{5.13}$$

Решение теперь является, вообще говоря, комплекснозначной функцией

$$u(x) = u'(x) + iu''(x)$$

Обобщенное решение задачи (5.12-5.13) из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ определим как элемент пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, удовлетворяющий тождеству

$$\mathfrak{L}(u,\bar\eta) \equiv \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_{x_j} \bar\eta_{x_i} + a_i u \bar\eta_{x_i} \right) - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \bar\eta - a u \bar\eta \right) dx = \tag{5.14}$$

$$= -\lambda \int\limits_\Omega u\bar\eta dx + \int\limits_\Omega \left(-f\bar\eta + \sum_{i=1}^n f_i \bar\eta_{x_i} \right) dx$$

при любом $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Рассуждая также, как и выше, в случае вещественного $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, придем к операторному уравнению

$$u + Au = \lambda Bu + F \tag{5.15}$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Здесь

$$[Au,\eta] = \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_i u \bar\eta_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} \bar\eta - a u \bar\eta \right) dx \tag{5.16}$$

$$[Bu,\eta] = -\int\limits_\Omega u\bar\eta dx \tag{5.17}$$

$$[F,\eta] = \int\limits_\Omega \left(-f\bar\eta + \sum_{i=1}^n f_i \bar\eta_{x_i} \right) dx \tag{5.18}$$

для любого $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Также, как и в предыдущем случае, можно показать, что A и B — линейные вполне непрерывные операторы. Кроме того $[Bu,\eta] = [u,B\eta]$ при $\forall u,\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ и $[Bu,u] < 0$ при $\forall u \neq 0$.

Запишем уравнение (5.15) в виде

$$u + Au - \lambda_0 Bu = (\lambda - \lambda_0) Bu + F \tag{5.19}$$

Можно показать, что при достаточно большом вещественном λ_0 оператор

$$D = (E + A - \lambda_0 B)$$

таков, что

$$|[Dv,v]| \geq c_1 \|v\|_1^2, \ \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

где $c_1 > 0$. В самом деле

$$|[Dv,v]| = \left| \|v\|_1^2 + \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n a_i v \bar v_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} \bar v - a|v|^2 \right) dx + \lambda_0 \int\limits_\Omega |u|^2 dx \right| \geq$$

$$\geq (\lambda_0 - 1 - 2\mu_1 - \max|\mu_3|, |\mu_4|) \cdot \|v\|_1^2$$

то есть достаточно взять $\lambda_0 > 1 + 2\mu_1 + \max|\mu_3|, |\mu_4|$. При таком λ_0 оператор D имеет ограниченный обратный. Но тогда (при таком λ_0) уравнение (5.19) можно переписать в виде

$$u = (\lambda - \lambda_0)D^{-1}Bu + D^{-1}F \tag{5.20}$$

Оператор $D^{-1}B$ является вполне непрерывным как произведение ограниченного и вполне непрерывного операторов. Поэтому для (5.20), а значит и исходной задачи (5.12-5.13), справедливы три теоремы Фредгольма [9], которые в данном случае приобретают вид:

Теорема 5.6 *Из единственности решения задачи (5.12-5.13) следует существование решения при любых f и $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, ..., f_n\}$ из $L_2(\Omega)$.*

Теорема 5.7 *Задача (5.12-5.13) имеет единственное решение при всех λ, кроме не более чем счетного числа значений $\{\lambda_k\}$ (спектральных значений) с единственной возможной точкой накопления на бесконечности. Каждому из спектральных значений соответствует по крайней мере одно нетривиальное решение однородной задачи*

$$u = (\lambda - \lambda_0)D^{-1}Bu; \ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

или же, что то же самое

$$\mathfrak{L}(u, \bar{\eta}) = -\lambda(u, \eta)_{L_2(\Omega)}; \ \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$$

или

$$\begin{cases} L[u] = \lambda u, x \in \Omega \\ u = 0, x \in S \end{cases} \tag{5.21}$$

Каждое спектральное значение λ_k имеет конечную кратность, и сопряженное к нему число $\bar{\lambda}_k$ является спектральным для уравнения

$$v = (\lambda - \lambda_0)B\,(D^*)^{-1}v; \ v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{5.22}$$

где символом * обозначен сопряженный оператор, причем λ_k и $\bar{\lambda}_k$ имеют одинаковую кратность.

Рассмотрим подробнее уравнение (5.22). Пусть $w = (D^*)^{-1}v$, тогда

$$D^*w = (\lambda - \lambda_0)Bw \Longleftrightarrow$$

$$\mathfrak{L}^*(w, \bar{\eta}) \equiv \int\limits_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} w_{x_j} \bar{\eta}_{x_i} + a_i w_{x_i} \bar{\eta} \right) - \sum_{i=1}^n b_i w \bar{\eta}_{x_i} - a w \bar{\eta} \right) dx = -\lambda \int\limits_\Omega w \bar{\eta} dx$$

при любом $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Таким образом, $\bar{\lambda}_k$ является спектральным значением сопряженной задачи:

$$\begin{cases} L^*[w] \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} w_{x_j} - b_i w\right) - \sum_{i=1}^n a_i w_{x_i} + aw = \lambda w, x \in \Omega \\ w = 0, x \in S \end{cases} \tag{5.23}$$

Переходим к третьей теореме Фредгольма. Для уравнения (5.20) она дает необходимое и достаточное условие разрешимости для спектральных значений λ. Если $\lambda = \lambda_k$, то задача (5.20) разрешима для тех и только тех свободных членов $D^{-1}F$, которые ортогональны всем решениям v_k задачи (5.22), соответствующим $\lambda = \bar{\lambda}_k$, то есть при условии

$$[D^{-1}F, v_k] = 0 \Leftrightarrow [F, (D^*)^{-1} v_k] = [F, w_k] = 0 \Leftrightarrow \int\limits_\Omega \left(-f\bar{w}_k + \sum_{i=1}^n f_i \left(\bar{w}_k\right)_{x_i}\right) dx = 0$$

где w_k — все обобщенные решения из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи (5.23), соответствующие $\lambda = \bar{\lambda}_k$.

Теорема 5.8 *Для разрешимости задачи (5.12-5.13) при $\lambda = \lambda_k$ необходимо и достаточно, чтобы f и f_i удовлетворяли условиям*

$$\int\limits_\Omega \left(-f\bar{w}_k + \sum_{i=1}^n f_i \left(\bar{w}_k\right)_{x_i}\right) dx = 0,$$

где w_k есть любое из обобщенных решений задачи (5.23) с $\lambda = \bar{\lambda}_k$. Решение задачи (5.12-5.13) в этом случае неединственно. Ее общее решение есть сумма какого-либо частного решения и линейной комбинации $\sum\limits_{m=1}^{N_k} c_m v_k^{(m)}(x)$, где c_m суть произвольные константы, а $v_k^{(m)}(x)$ — собственные функции задачи (5.21), отвечающие $\lambda = \lambda_k$.

5.4 Задача Дирихле для оператора Лапласа

Исследуем задачу Дирихле для оператора Лапласа как частный случай рассмотренной выше задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = f, x \in \Omega \\ u|_S = 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

Нужно найти такую $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, которая для любого $\eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\mathfrak{L}(u, \eta) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n u_{x_i} \eta_{x_i} dx = -\int\limits_\Omega f\eta dx$$

В данном случае спектральная задача (5.21) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}\eta_{x_i} dx = -\lambda \int\limits_{\Omega} u\eta dx, \ \forall \eta \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$$

Предположим, что решение этой спектральной задачи нам известно. Так как тождество должно выполняться для любой функции η, возьмем ее равной функции u:

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx = -\lambda \int\limits_{\Omega} u^2 dx$$

По определению собственной функции $u \neq 0$ почти всюду, следовательно

$$-\lambda = \frac{\int\limits_{\Omega} \sum\limits_{i=1}^{n} u_{x_i}^2 dx}{\int\limits_{\Omega} u^2 dx} \geq 0$$

Так как $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$, то u не может почти всюду равняться отличной от нуля константе, а это означает, что все спектральные значения λ_k строго меньше нуля. Поэтому $\lambda = 0$, соответствующее исходной задаче Дирихле для оператора Лапласа, не совпадает ни с одним из спектральных значений, и задача (5.24) имеет единственное обобщенное решение из $\overset{\circ}{W}{}_2^1 (\Omega)$ при любой $f \in L_2(\Omega)$.

Если граница S области Ω является достаточно гладкой (является поверхностью Ляпунова), а функция f непрерывна вместе с первыми производными, то обобщенное решение будет также и классическим решением задачи (5.24).

5.5 Вторая и третья краевые задачи

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} L[u] = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\partial}{\partial x_i} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_j} + b_i(x) \dfrac{\partial u}{\partial x_i} \right) + a(x)u = \lambda u + f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial N} + \sigma u \Big|_S = 0 \end{cases} \tag{5.25}$$

где $\sigma = \sigma(s)$ — заданная функция на поверхности S, $\dfrac{\partial u}{\partial N} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \cos(nx_i)$ — производная по конормали, $\cos(nx_i)$ — косинус угла между единичной внешней по отношению к Ω нормалью n к поверхности S и осью Ox_i.

Пусть для коэффициентов оператора L, а также функции f выполнены те же условия, что и в пункте 5.2, и кроме того $|\sigma(s)| \leq \mu_5$, где μ_5 — некоторое положительное число.

Пусть S — кусочно-гладкая поверхность. Тогда для нее справедлива теорема 4.4, из которой следует, что элементы $W_2^1(\Omega)$ имеют следы на S, принадлежащие $L_2(S)$, и $W_2^1(\Omega)$ вкладывается компактно в $L_2(S)$. В самом деле, пусть $\{u_k\}$ — слабо сходящаяся в $W_2^1(\Omega)$ к элементу $u \in W_2^1(\Omega)$ последовательность. Тогда найдется такое число $M > 0$, что $\|u_k\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M$ для всех k. Применяя формулу (4.12), получим

$$\|u_k - u\|^2_{L_2(S)} \leq C_1 \left(\frac{1}{\delta}\|u_k - u\|^2_{L_2(\Omega)} + \delta\|u_k - u\|^2_{W_2^1(\Omega)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{C_1}{\delta}\|u_k - u\|^2_{L_2(\Omega)} + 4\delta C_1 M^2$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\delta < \dfrac{\varepsilon}{8C_1M^2}$. Тогда

$$\|u_k - u\|^2_{L_2(S)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C_1}{\delta}\|u_k - u\|^2_{L_2(\Omega)}$$

Так как $W_2^1(\Omega)$ вкладывается компактно в $L_2(\Omega)$, то последовательность $\{u_k\}$ сходится в $L_2(\Omega)$ сильно, а это означает, что найдется такое k_0, что для всех $k > k_0$ будет выполнено неравенство $\|u_k - u\|^2_{L_2(\Omega)} < \dfrac{\varepsilon\delta}{2C_1}$, откуда следует, что при всех таких k

$$\|u_k - u\|^2_{L_2(S)} < \varepsilon$$

Следовательно, $\{u_k\}$ сходится сильно в $L_2(S)$.

Сформулируем обобщенную постановку задачи (5.25) в пространстве $W_2^1(\Omega)$, причем λ и u будем считать комплексными. Формально умножим уравнение в задаче (5.25) на произвольную функцию $\bar{\eta} \in W_2^1(\Omega)$ и проинтегрируем результат по Ω, учитывая граничные условия:

$$\int\limits_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}u_{x_j}\bar{\eta}_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i}\bar{\eta} + (\lambda - a)u\bar{\eta}\right)dx + \int\limits_S \sigma u\bar{\eta}ds = -\int\limits_\Omega f\bar{\eta}dx \tag{5.26}$$

Это соотношение имеет смысл для любых u и η из $W_2^1(\Omega)$, так как для рассматриваемой нами области Ω эти функции имеют следы на S, принадлежащие пространству $L_2(S)$. Если же функция u, удовлетворяющая тождеству (5.26) для любой $\eta \in W_2^1(\Omega)$ и коэффициенты оператора L достаточно гладкие, то $u(x)$ удовлетворяет также и тождеству

$$-\int\limits_\Omega L[u]\bar{\eta}dx + \int\limits_S \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sigma u\right)\bar{\eta}ds = -\int\limits_\Omega f\bar{\eta}dx$$

и, следовательно, в силу произвольности η, удовлетворяет исходной задаче в классическом смысле.

Определение 5.9 *Назовем обобщенным решением из* $W_2^1(\Omega)$ *задачи (5.25) функцию* $u \in W_2^1(\Omega)$, *удовлетворяющую тождеству (5.26) при любой* $\eta \in W_2^1(\Omega)$.

Далее можно повторить все те же рассуждения, которые были проведены при исследовании задачи Дирихле, но теперь для пространства $W_2^1(\Omega)$. Введем в $W_2^1(\Omega)$ новое скалярное произведение

$$[u, v] = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_j} \bar{v}_{x_i} + u\bar{v} \right) dx$$

Порождаемая этим скалярным произведением норма эквивалентна исходной норме пространства $W_2^1(\Omega)$ в силу условий, наложенных на коэффициенты a_{ij}. Тождество (5.26) можно преобразовать к виду

$$[u, \eta] + [Au, \eta] - \lambda[Bu, \eta] + [Cu, \eta] = [F, \eta],$$

где операторы A, B и C определяются своими линейными по первому аргументу и косолинейными по второму аргументу формами

$$[Au, \eta] = -\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} \bar{\eta} + (a+1)u\bar{\eta} \right) dx \tag{5.27}$$

$$[Bu, \eta] = -\int\limits_{\Omega} u\bar{\eta} dx \tag{5.28}$$

$$[Cu, \eta] = \int\limits_{S} \sigma u\bar{\eta} ds \tag{5.29}$$

а элемент F пространства $W_2^1(\Omega)$ определяется равенством

$$[F, \eta] = -\int\limits_{\Omega} f\bar{\eta} dx \tag{5.30}$$

Используя компактность вложения $W_2^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и $L_2(S)$, можно показать, что операторы A, B и C вполне непрерывны. Таким образом, мы приходим к операторному уравнению в пространстве $W_2^1(\Omega)$:

$$u + Au - \lambda Bu + Cu = F,$$

для которого, как и для рассмотренного в случае задачи Дирихле, справедливы три теоремы Фредгольма.

5.6 Задача Неймана для уравнения Лапласа

Исследуем задачу Неймана для оператора Лапласа в качестве примера.

$$\begin{cases} \Delta u = f(x), x \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi(p), p \in S \end{cases} \tag{5.31}$$

Сформулируем обобщенную постановку задачи: нужно найти такую функцию $u \in W_2^1(\Omega)$, которая для любой $\eta \in W_2^1(\Omega)$ удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{\Omega} u_x \bar{\eta}_x dx = -\int\limits_{\Omega} f\bar{\eta} dx + \int\limits_{S} \varphi\bar{\eta} ds$$

Рассмотрим соответствующую спектральную задачу

$$\int\limits_{\Omega} u_x \bar{\eta}_x dx = -\lambda \int\limits_{\Omega} u\bar{\eta} dx, \forall \eta \in W_2^1(\Omega) \tag{5.32}$$

В данном случае она совпадает со спектральной задачей для сопряженного оператора. Очевидно, что $\lambda = 0$ является собственным значением, которому соответствует собственная функция, равная константе. Поэтому исходная задача разрешима только в том случае, когда выполнено условие

$$[F, w_0] = -\int\limits_{\Omega} f\bar{w}_0 dx + \int\limits_{S} \varphi\bar{w}_0 ds = 0$$

где w_0 — собственная функция спектральной задачи для сопряженного оператора. Так как $w_0 = const$, то условие разрешимости задачи приобретает вид

$$\int\limits_{S} \varphi ds = 0$$

Если оно выполнено, то задача (5.31) имеет обобщенное решение из $W_2^1(\Omega)$, определенное с точностью до аддитивной константы.

Если поверхность S является поверхностью Ляпунова, функция $f(x)$ непрерывна вместе с первыми производными, а $\varphi(p)$ непрерывна на S, то полученное обобщенное решение будет классическим.

Список литературы

[1] *В.С. Владимиров* Уравнения математической физики. - М.: Наука , Главная редакция физико-математической литературы, 1981 г.

[2] *А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин* Элементы теории функций и функционального анализа. -М.: Наука, 1976 г.

[3] *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь* Лекции по функциональному анализу. -М.Мир, 1979 г.

[4] *О.А. Ладыженская* Краевые задачи математической физики. -М.: Наука, 1973 г.

[5] *С.Л. Соболев* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд.-во ЛГУ, 1950 г.

[6] *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, М.:"Наука 1967 г.

[7] *Morrey C.B.* Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.

[8] *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen.// Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1969.

[9] *В.Т. Волков, А.Г. Ягола* Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. Учебное пособие — М.:КДУ, 2008.