

Вопросы к первой части экзамена по курсу “Методы математической физики” (2010-2011 учебный год)

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$ ,  $x \in (a, b)$ , где  $k(x) = (x - a)\varphi(x)$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ , в особых точках.
2. Напишите уравнение Бесселя и его фундаментальную систему решений. Дайте определение функций, входящих в эту фундаментальную систему решений, и приведите их графики.
3. Дайте определение цилиндрической функции. Приведите пример цилиндрической функции и ее график.
4. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда.
5. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
6. Напишите интегральное представление для функции Бесселя.
7. Дайте определение функции Ханкеля.
8. Напишите формулу, связывающую функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов.
9. Как связаны между собой функции Бесселя и функции Ханкеля?
10. Дайте определение функции Неймана, приведите ее график.
11. Напишите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Бесселя и Неймана.
12. Напишите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Ханкеля первого и второго рода.
13. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.
14. Поставьте задачу на собственные значения для оператора Бесселя.
15. Сформулируйте теорему Стеклова в случае задачи на собственные значения для оператора Бесселя.
16. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 1-ого рода. Напишите собственные функции.
17. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 2-ого рода. Напишите собственные функции.
18. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий различного типа.
19. Напишите общую формулу для квадрата нормы собственной функции задачи Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя.
20. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Напишите фундаментальную систему решений этого

уравнения.

21. Дайте определение функции Инфельда, приведите ее график.
22. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Инфельда.
23. Дайте определение функции Макдональда, приведите ее график.
24. Напишите асимптотическую формулу для функции Макдональда. Откуда она следует?
25. Дайте определение классических ортогональных полиномов.
26. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.
27. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?
28. Напишите уравнение для классических ортогональных полиномов.
29. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках.
30. Напишите формулу для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для классических ортогональных полиномов.
31. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (общую формулу Родрига).
32. Дайте определение полиномов Якоби.
33. Напишите формулу Родрига для полиномов Якоби.
34. Дайте определение полиномов Лежандра.
35. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений для полиномов Лежандра.
36. Напишите выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
37. Дайте определение полиномов Лагерра. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.
38. Дайте определение полиномов Эрмита. Сформулируйте задачу, решениями которой они являются.
39. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
40. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра.
41. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
42. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.
43. Дайте определение присоединенных функций Лежандра.
44. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра.
45. Напишите выражение квадрата нормы для присоединенных функций Лежандра.
46. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.

47. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.
48. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.
49. Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
50. Напишите условие ортогональности для сферических функций.
51. Напишите выражение квадрата нормы для сферических функций.
52. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.
53. Дайте определение шаровых функций. Являются ли шаровые функции собственными функциями соответствующей задачи на собственные значения? Обоснуйте ответ.
54. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае линейных граничных условий различного типа.
55. Напишите собственные функции шара для граничных условий Дирихле и Неймана.
56. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных?
57. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных и напишите для них канонические формы.
58. Дайте определение уравнений параболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
59. Дайте определение уравнения гиперболического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
60. Дайте определение уравнения эллиптического типа в случае многих переменных и напишите для него каноническую форму.
61. Дайте определение корректно поставленной задачи по Адамару.
62. Приведите примеры постановки начально-краевых задач для уравнения теплопроводности и колебаний и приведите определения классических решений этих задач.
63. Изложите общую схему метода разделения переменных (метода Фурье). В чем состоит редукция общей начально-краевой задачи в линейном случае?
64. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле на границе  $S$  области  $D$  и перечислите основные свойства собственных функций и собственных значений этой задачи.
65. Напишите первую и вторую формулы Грина. Каковы условия их применимости?
66. Напишите третью формулу Грина для двумерного и трехмерного случая.
67. Приведите пример постановки внутренней и внешней краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях.
68. Дайте определение гармонической функции. Приведите примеры.

- Является ли гармоническая функция бесконечно дифференцируемой? Обоснуйте ответ.
69. Сформулируйте теорему Гаусса и теорему о среднем для гармонических функций.
  70. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для гармонических функций.
  71. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий Дирихле. Каким методом она доказывается?
  72. Сформулируйте теорему единственности решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий третьего рода. Каким методом она доказывается?
  73. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий второго рода? Обоснуйте ответ.
  74. Дайте определение регулярной на бесконечности функции в случае двух и трех переменных.
  75. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Каким методом она доказывается?
  76. Сформулируйте теорему единственности решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае. Каким методом она доказывается?
  77. Имеет ли место единственность решения внешней краевой задачи с граничными условиями Неймана для уравнения Лапласа в двумерном и трехмерном случаях? Обоснуйте ответ.
  78. В чем состоит различие в постановках и свойствах решений внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа в двумерном случае?
  79. В чем состоит различие в постановках и свойствах решений внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа в трехмерном случае?
  80. Метод функций Грина решения краевых задач для уравнения Лапласа.
  81. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
  82. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
  83. Дайте определение функции Грина внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае и запишите решение задачи с помощью функции Грина.
  84. Дайте определение объемного потенциала. Использование объемного потенциала при решении уравнения Пуассона.
  85. Сформулируйте теорему о равномерной сходимости несобственного

- интеграла, зависящего от параметра.
86. Дайте определения потенциалов простого и двойного слоя в двумерном и трехмерном случаях.
  87. Дайте определение поверхности Ляпунова.
  88. Сформулируйте теорему о существовании и непрерывности потенциала простого слоя.
  89. Сформулируйте теорему о существовании потенциала двойного слоя.
  90. Претерпевает ли разрыв при переходе через несущую поверхность потенциал простого слоя? Обоснуйте ответ.
  91. Чему равно значение потенциала двойного слоя с постоянной плотностью внутри, на и вне несущей поверхности? Напишите формулу скачка потенциала двойного слоя при переходе через несущую поверхность.
  92. Метод сведения краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа к союзным интегральным уравнениям Фредгольма.
  93. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Назовите метод ее доказательства.
  94. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Неймана для уравнения Лапласа в трехмерном случае. Назовите метод ее доказательства.
  95. Сформулируйте теорему существования решения внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Назовите метод ее доказательства.
  96. Сформулируйте теорему существования решения внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Назовите метод ее доказательства.
  97. Напишите необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа. Откуда оно следует?
  98. Что такое потенциал Робена? Каков его физический смысл?
  99. Напишите фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в двумерном и трехмерном случаях.
  100. Дайте определение объемного потенциала, поверхностных потенциалов простого и двойного слоя для уравнения Гельмгольца.
  101. В чем отличие принципа максимума для уравнения Лапласа и Гельмгольца?
  102. В каком случае имеет место единственность решения внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца? Приведите формулировки соответствующих теорем.
  103. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для уравнения параболического типа.
  104. Сформулируйте теорему единственности и теорему устойчивости решения внутренней начально-краевой задачи Дирихле для уравнения параболического типа. Назовите метод их доказательства.
  105. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи Дирихле для однородного уравнения теплопроводности на отрезке.
  106. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на

- отрезке в случае граничных условий Дирихле. В чем ее физический смысл?
107. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Сформулируйте теорему единственности решения начальной задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
  108. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.
  109. Напишите фундаментальное решение уравнения теплопроводности на бесконечной прямой. Каковы его свойства и физический смысл?
  110. Что такое "парадокс бесконечной теплопроводности"? Чем его можно объяснить?
  111. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой. В чем заключается "метод продолжения" для построения решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой для задач Дирихле и Неймана?
  112. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Дирихле.
  113. Напишите функцию Грина для уравнения теплопроводности на полупрямой в случае граничных условий Неймана.
  114. Напишите общий вид решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на полупрямой в случае однородных граничных условий.
  115. Поставьте начальную задачу для уравнения теплопроводности в пространстве и сформулируйте теорему единственности ее решения.
  116. Сформулируйте теорему существования классического решения задачи Коши для уравнения теплопроводности в пространстве.
  117. Напишите общий вид решения однородного уравнения теплопроводности на полубесконечной прямой при однородном начальном и неоднородном граничном условии Дирихле. Сформулируйте принцип Дюамеля.
  118. Сформулируйте теорему единственности решения общей начально-краевой задачи для уравнения колебаний. Каким методом она доказывается?
  119. Сформулируйте теорему существования классического решения начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на отрезке в случае однородных граничных условий Дирихле.
  120. Дайте определение функции влияния мгновенного точечного импульса (функции Грина) для уравнения колебаний на отрезке.
  121. Поставьте начальную задачу для уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  122. Напишите формулу Даламбера.
  123. В чем состоит метод распространяющихся волн?
  124. Сформулируйте теорему существования и единственности

- классического решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
125. Сформулируйте теорему устойчивости решения задачи Коши для уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  126. Что такое “характеристический треугольник” на фазовой плоскости?
  127. В чем состоит метод интегрирования по фазовой плоскости?
  128. Напишите общую формулу решения начальной задачи для неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  129. Сформулируйте теорему существования и единственности классического решения неоднородного уравнения колебаний на бесконечной прямой.
  130. В чем состоит "метод продолжения" построения решения начально-краевой задачи для уравнения колебаний на полупрямой в случае однородных граничных условий Дирихле и Неймана?
  131. Напишите решение начально-краевой задачи для однородного уравнения колебаний на полупрямой в случае однородного начального условия и неоднородного граничного условия Дирихле. Каким методом можно его получить?
  132. Поставьте задачу Коши для уравнения колебаний в пространстве.
  133. Напишите формулу Кирхгофа.
  134. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в трехмерном пространстве.
  135. В чем состоит "метод спуска"?
  136. Напишите формулу Пуассона, выражающую решение задачи Коши для уравнения колебаний в двумерном пространстве.
  137. Функции Грина при решении уравнений Лапласа, теплопроводности и колебаний.
  138. Функции Грина решения уравнений Лапласа, теплопроводности и колебаний в ограниченной области.
  139. Фундаментальное решение (функция Грина) уравнения теплопроводности на неограниченной прямой.
  140. Функция Грина для уравнений теплопроводности на полуограниченной прямой.
  141. Методы построения функции Грина (источника) для уравнения Лапласа: метод электростатических изображений, метод конформных преобразований (для двумерной области).