

### Вопросы теоретического зачета по специальным функциям.

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0, x \in (a, b)$ , где  $k(x) = (x - a)\varphi(x), \varphi(a) \neq 0$ , в особых точках.
2. Напишите уравнение Бесселя и его фундаментальную систему решений.
3. Дайте определение цилиндрической функции. Приведите примеры цилиндрических функций.
4. Назовите особые точки функций, которые являются решениями уравнения Бесселя.
5. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда.
6. Напишите формулу, связывающую функции Бесселя порядков  $n$  и  $-n$ .
7. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
8. Напишите интегральное представление для функции Бесселя.
9. Дайте определение функции Ханкеля.
10. Напишите формулу, связывающую функции Ханкеля положительного и отрицательного индексов.
11. Напишите формулу, связывающую функции Бесселя и функции Ханкеля.
12. Дайте определение функции Неймана.
13. Напишите формулу, связывающую функции Бесселя, Неймана и Ханкеля.
14. Напишите асимптотические формулы при больших значениях аргумента для функций Ханкеля первого и второго рода.
15. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Бесселя.
16. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Неймана.
17. Опишите поведение функций Бесселя, Неймана и Ханкеля в окрестности нуля.
18. Поставьте задачу на собственные значения для оператора Бесселя.
19. Сформулируйте теорему Стеклова в случае задачи на собственные значения для оператора Бесселя.
20. Поставьте задачу на собственные значения для круга в случае граничных условий 1-ого рода.
21. Поставьте задачу на собственные значения для круга в случае граничных условий 2-ого рода.
22. Напишите собственные функции круга.
23. Напишите характеристическое уравнение для определения собственных значений задачи для круга в случае граничных

- условий первого, второго и третьего рода.
24. Напишите формулу для квадрата нормы собственной функции задачи на собственные значения для оператора Бесселя в случае граничных условий первого, второго и третьего рода.
  25. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента.
  26. Дайте определение функции Инфельда.
  27. Напишите формулу, связывающую функции Инфельда порядков  $n$  и  $-n$ .
  28. Напишите асимптотическую формулу при больших значениях аргумента для функции Инфельда.
  29. Дайте определение функции Макдональда.
  30. Напишите асимптотическую формулу для функции Макдональда.
  31. Дайте определение классических ортогональных полиномов.
  32. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.
  33. Являются ли производные классических ортогональных полиномов классическими ортогональными полиномами? Если да, то с каким весом они ортогональны?
  34. Напишите уравнение для классических ортогональных полиномов.
  35. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках.
  36. Напишите формулу для собственных значений задачи Штурма-Лиувилля для классических ортогональных полиномов.
  37. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (общую формулу Родрига).
  38. Дайте определение полиномов Якоби.
  39. Напишите формулу Родрига для полиномов Якоби.
  40. Дайте определение полиномов Лежандра.
  41. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра.
  42. Напишите выражение собственных значений для полиномов Лежандра.
  43. Напишите выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра.
  44. Дайте определение полиномов Лагерра.
  45. Дайте определение полиномов Эрмита.
  46. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов.
  47. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра.
  48. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.

49. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.
50. Дайте определение присоединенных функций Лежандра.
51. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра.
52. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра.
53. Напишите выражение квадрата нормы для присоединенных функций Лежандра.
54. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
55. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.
56. Дайте определение сферических функций.
57. Поставьте задачу на собственные значения для сферических функций.
58. Является ли система сферических функций замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения.
59. Напишите условие ортогональности для сферических функций.
60. Напишите выражение квадрата нормы для сферических функций.
61. Сформулируйте теорему Стеклова для сферических функций.
62. Дайте определение шаровых функций.
63. Являются ли шаровые функции собственными функциями соответствующей задачи на собственные значения? Обоснуйте ответ.
64. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае граничных условий Дирихле.
65. Поставьте задачу на собственные значения для шара в случае граничных условий Неймана.
66. Напишите собственные функции шара.