

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРОДИНАМИКИ

I. Понятие о математической модели.

II. Сплошные среды и способы их описания.

1. Метод Лагранжа.
2. Метод Эйлера.

III. Математические модели жидких идеальных сред.

1. Массовые и поверхностные силы.
2. Общее уравнение движения жидкого объема.
3. Напряжение в жидкой среде. Гидродинамическое давление идеальной жидкости.
4. Уравнения Эйлера.
5. Модели жидких идеальных сред.
6. Начальные и граничные условия.

IV. Математические модели жидких вязких сред.

1. Понятие вязкой жидкости.
2. Теорема Коши-Гельмгольца. Понятие тензора скоростей деформации и тензора напряжений.
3. Закон Навье-Стокса.
4. Модели жидких вязких сред.
5. Начально-краевые задачи.

V. Частные случаи и примеры.

1. Основные свойства потенциального движения несжимаемой жидкости в односвязных областях (*свойства гармонических функций: принцип максимума, теорема о среднем; простейшие внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа*).
2. Плоские задачи о движении тел в идеальной жидкости (*примеры постановок внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа*).
3. Стационарное течение вязкой однородной жидкости в трубах:
 - а) течение в трубах с круговым и эллиптическим сечениями (*краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге*);
 - б) течение в трубе с прямоугольным сечением и течение в плоском канале с твердыми стенками (*краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике*).
4. Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы (*краевая задача Неймана для уравнения Лапласа вне шара*).
5. Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением (*начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности в круге*).
6. Нестационарные слоистые течения:
 - а) тангенциальный разрыв (*задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой*);
 - б) движение твердой поверхности (*начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой*);
 - в) течение под действием касательного напряжения (простейшее моделирование морского течения в приповерхностном слое под действием ветра постоянной силы), (*начально-краевая задача Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой*).

1. ВВЕДЕНИЕ. 1.1. Понятие о математической модели. Математическая физика изучает процессы реального мира с помощью *математических моделей*, которые получаются на основе законов физики. Любая математическая модель является приближенной, не адекватной полностью тому процессу, который она описывает. При составлении математической модели стремятся к тому, чтобы она наиболее полно отражала сам процесс. Однако математическая модель должна быть достаточно простой для изучения, должна давать возможность извлечь из нее доступными методами полезную информацию о процессе. Поэтому какие-то факторы, влияние которых на процесс мало, неизбежно не учитываются, и они оказываются не представленными в математической модели.

Математическая модель включает в себя замкнутую систему уравнений (количество уравнений равно количеству неизвестных функций) и *дополнительные условия*, которые состоят из начальных распределений (*начальных условий*) и *краевых (граничных) условий*. Таким образом, рассмотрение задач математической физики сводится к исследованию *начально-краевых задач* для систем уравнений, как правило, в частных производных. Далее будут обсуждаться математические модели, соответствующие процессам в сплошных жидких средах, а также применение методов математической физики при решении задач гидродинамики.

1.2. Сплошные среды и способы их описания. Введение понятия *сплошной среды* позволяет не учитывать молекулярное строение вещества при последующем рассмотрении процесса, что существенно упрощает процедуру описания гидрофизических явлений. Само понятие сплошной среды вводится через определение *жидкой частицы*, которая является неделимым элементом сплошной среды. В качестве жидкой частицы можно выбрать малый объем жидкости, линейный размер которого l сравним с наименьшим фиксируемым размером, и имеет порядок размера регистрирующего датчика. Величина l много больше размеров молекул, но много меньше размеров окружающих нас объектов. Поэтому, являясь для наблюдателя точкой, жидкая частица заключает в себе большое количество молекул и атомов. Благодаря изменению расстояния между жидкими частицами происходит изменение внешней конфигурации объема, причем при своем движении жидкие частицы также деформируются. Осредняя по объему l^3 физические характеристики среды, такие как плотность, температура, скорость и т.д., получаем плотность, температуру, скорость соответствующей жидкой частицы (средние величины будем называть *гидродинамическими*, подробнее см. например [1]). Таким образом осуществляется переход от дискретной среды к сплошной.

При описании жидких сред в основном используются два подхода. С точки зрения *метода Лагранжа* объектом изучения являются жидкие частицы, рассматриваемые как материальные точки, сплошь заполняющие объем с жидкостью. При этом исследуется:

- как изменяются различные векторные и скалярные величины, связанные с конкретной частицей, с течением времени;
- как изменяются эти величины при переходе от одной частице к другой.

Если (x_0, y_0, z_0) -координаты частицы в начальный момент времени $t = t_0$ относительно некоторой системы координат, то в любой другой момент времени $t \neq t_0$ координаты частицы (x, y, z) будут функциями не только времени t , но и начального положения частицы:

$$x = \varphi_1(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = \varphi_2(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = \varphi_3(t, x_0, y_0, z_0).$$

При $t = t_0$ имеем

$$x_0 = \varphi_1(t_0, x_0, y_0, z_0), \quad y_0 = \varphi_2(t_0, x_0, y_0, z_0), \quad z_0 = \varphi_3(t_0, x_0, y_0, z_0).$$

Вместо (x_0, y_0, z_0) можно рассматривать любые другие величины (a, b, c) , однозначно связанные с (x_0, y_0, z_0) :

$$a = \psi_1(x_0, y_0, z_0), \quad b = \psi_2(x_0, y_0, z_0), \quad c = \psi_3(x_0, y_0, z_0).$$

Совокупность величин (t, a, b, c) называется *переменными Лагранжа*.

Введя переменные Лагранжа можно определить значения скалярных и векторных величин, связанных с конкретной частицей. Координаты некоторой частицы задаются соотношениями

$$x = f_1(t, a, b, c), \quad y = f_2(t, a, b, c), \quad z = f_3(t, a, b, c).$$

При вычислении компонентов скорости и ускорения частицы пользуются символом частной производной, подчеркивая этим то, что производные вычисляются для рассматриваемой частицы среды (при фиксированных значениях (a, b, c)):

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial t} \right)_{a,b,c}, & w_x &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \right)_{a,b,c}, \\ v_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial t} \right)_{a,b,c}, & w_y &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2} \right)_{a,b,c}, \\ v_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial t} \right)_{a,b,c}, & w_z &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 f_3}{\partial t^2} \right)_{a,b,c}. \end{aligned}$$

Для полной характеристики состояния жидкости необходимо знать давление p и плотность ρ , как функции переменных Лагранжа:

$$p = p(t, a, b, c), \quad \rho = \rho(t, a, b, c).$$

Объектом изучения в случае *метода Эйлера* является не сама жидкость, а неподвижное пространство, заполненное жидкостью. При этом изучается:

-изменение различных характеристик движения в фиксированной точке пространства с течением времени;

-изменение этих характеристик при переходе к другим точкам пространства.

В данном случае векторные и скалярные характеристики движения зависят от переменных (t, x, y, z) , называемых *переменными Эйлера*. В частности, компоненты вектора скорости могут быть заданы как

$$v_x = F_1(t, x, y, z), \quad v_y = F_2(t, x, y, z), \quad v_z = F_3(t, x, y, z).$$

Вектор ускорения вычисляется по формуле (подробнее см. [2])

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v}, \tag{1.1}$$

где $\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$, где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ - координатные орты.

1.3. Основные уравнения. Получим уравнение движения некоторого *жидкого объема* V (объема, содержащего одни и те же частицы), выделенного внутри движущейся жидкости. Для этого подсчитаем действующие на него силы.

Состояние движения жидкой среды изменяется под влиянием взаимодействия частиц друг с другом и с телами, внешними по отношению к рассматриваемому объему с жидкостью. В результате такого взаимодействия возникают силы, которые делят на два основных типа: *массовые* и *поверхностные*. Силы, распределенные по объему и пропорциональные массам частиц, называются *массовыми* (напр. сила тяжести, сила инерции и др.). Если $\mathbf{F} = \{X, Y, Z\}$ – вектор массовой силы, отнесенный к единице массы, то на элемент объема $d\tau$ действует сила $\mathbf{F}\rho d\tau$, где $\rho(x, y, z, t)$ – плотность жидкости. Следовательно, массовая сила, действующая на объем V равна

$$\int_V \mathbf{F}\rho d\tau = \left\{ \int_V X\rho d\tau, \int_V Y\rho d\tau, \int_V Z\rho d\tau \right\}.$$

Например, в случае силы тяжести $\mathbf{F} = \mathbf{g}$, где \mathbf{g} – вектор ускорения свободного падения.

Поверхностные силы, в отличие от массовых, распределены по поверхности. Силы взаимодействия частиц рассматриваемого объема с окружающей средой, приложенные к поверхности раздела или силы, с которыми взаимодействуют частицы внутри рассматриваемого объема через разделяющие их воображаемые поверхности, называются *поверхностными*. Пусть ds – элемент достаточно гладкой поверхности S , ограничивающей объем V , \mathbf{n} – нормаль к поверхности S , внешняя по отношению к объему V . Вектор поверхностных сил \mathbf{p}_n , отнесенный к единице площади, называется *напряжением*. В общем случае \mathbf{p}_n зависит от положения и ориентации сечения в пространстве и от времени. Поскольку ds – элемент двухсторонней поверхности, то к ds можно задать две нормали: \mathbf{n} и $-\mathbf{n}$. Со стороны внешних, по отношению к объему V , частиц к внешней стороне элемента ds будет приложена поверхностная сила $\mathbf{p}_n ds$. Со стороны частиц объема к внутренней стороне этого же элемента поверхности приложена сила $\mathbf{p}_{-n} ds$. В силу 3-го закона Ньютона: $\mathbf{p}_{-n} = -\mathbf{p}_n$. Если угол между нормалью \mathbf{n} к поверхности и напряжением \mathbf{p}_n острый, то нормальная составляющая вектора \mathbf{p}_n называется *нормальным напряжением*; если угол является тупым, то нормальная составляющая называется *давлением*. Касательная к поверхности составляющая вектора \mathbf{p}_n называется *касательным напряжением* или *силой внутреннего трения (силой вязкости)*.

В соответствие со 2-м законом Ньютона имеет место уравнение

$$\mathbf{F} + \mathbf{I}_d = 0,$$

где \mathbf{F} – равнодействующая сила, приложенная к материальной точке массы m , $\mathbf{I}_d = -m\mathbf{a}$ – *даламберова сила инерции*, которую следует интерпретировать как сопротивление, оказываемое инертной массой, изменению своего движения, то есть ускорению, вызванному другим объектом. Таким образом, в каждый момент движения все силы, приложенные к материальной точке, взаимно уравновешиваются. В этом состоит принцип Даламбера, который справедлив и для материальных систем. Применяв принцип Даламбера к жидкому объему V , получаем *общее уравнение движения жидкого объема*

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w})\rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n ds = 0, \quad (1.2)$$

где \mathbf{p}_n - напряжение, приложенное к внешней стороне поверхности S ; \mathbf{w} - ускорение жидкого объема единичной массы. Если в трех сечениях, образующих трехгранный угол друг с другом (для определенности будем считать, что сечения совпадают с координатными плоскостями некоторой декартовой системы координат), напряжения \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y и \mathbf{p}_z . известны, то напряжения \mathbf{p}_n во всех других сечениях, проходящих через эту точку, могут быть определены по формуле

$$\mathbf{p}_n = \alpha \mathbf{p}_x + \beta \mathbf{p}_y + \gamma \mathbf{p}_z, \quad (1.3)$$

где $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \left\{ \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x), \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_y), \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_z) \right\}$ – косинусы углов между нормалью \mathbf{n} к рассматриваемому сечению и координатными ортами \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z (подробнее см. [2]).

В заключение этого пункта получим уравнение непрерывности, которое представляет собой дифференциальное уравнение закона сохранения вещества. Масса M жидкости, заключенной в жидком объеме V , равна $M = \int_V \rho(x, y, z, t) d\tau$ и остается постоянной с течением времени. Известно, что если $B(x, y, z, t)$ - некоторая гидродинамическая величина, то справедлива формула [3]

$$\frac{d}{dt} \int_V B(x, y, z, t) d\tau = \int_V \left(\frac{dB}{dt} + B \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau, \quad (1.4)$$

где V - жидкий объем. В соответствии с (1.4) имеем

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\tau = 0.$$

В силу произвольности объема V и непрерывности подынтегральной функции, получаем *уравнение непрерывности*

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1.5)$$

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКИХ ИДЕАЛЬНЫХ СРЕД.

2.1. Уравнение Эйлера. *Идеальной жидкостью* называется жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения, а значит, касательные составляющие напряжений равны нулю. Следовательно, в идеальной жидкости существуют только нормальные напряжения, которые при деформации жидкости предотвращают ее разрыв. Поэтому нормальные напряжения всегда направлены вглубь выделенного в идеальной жидкости объема и являются силами давления, называемого *гидродинамическим давлением идеальной жидкости*. Возвращаясь к представлению (1.3) учтем тот факт, что в случае идеальной жидкости вектор \mathbf{p}_n направлен противоположно вектору внешней нормали. Скалярно умножая (1.3) на \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y и \mathbf{e}_z , приходим к равенствам

$$-p_n \alpha = -\alpha p_x, \quad -p_n \beta = -\beta p_y, \quad -p_n \gamma = -\gamma p_z$$

или

$$p_n = p_x = p_y = p_z.$$

Следовательно, в идеальной жидкости величина нормального напряжения (давления) не зависит от ориентации сечения. Значит давление в одной и той же точке идеальной жидкости одинаково во всех направлениях (во всех сечениях, проходящих через эту точку). С учетом этого уравнение (1.2) принимает вид

$$\int_V (\mathbf{F} - \mathbf{w}) \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p} ds = 0, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{p} = -p\mathbf{n}$. Воспользуемся преобразованиями Гаусса [3], которые формулируются для непрерывной вместе с производными скалярной функции $u(x, y, z)$, определенной в пространственной области V , ограниченной кусочно гладкой поверхностью S с внешней нормалью \mathbf{n} :

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = \oint_S u \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) ds, \quad \int_V \frac{\partial u}{\partial y} d\tau = \oint_S u \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_y) ds, \quad \int_V \frac{\partial u}{\partial z} d\tau = \oint_S u \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_z) ds. \quad (2.2)$$

Умножая первое выражение в (2.2) на \mathbf{e}_x , второе – на \mathbf{e}_y , третье – на \mathbf{e}_z и складывая результаты, получаем

$$\int_V \mathbf{grad} u d\tau = \oint_S u \mathbf{n} ds.$$

Применяя это преобразование к уравнению (2.1), находим

$$\int_V [(\mathbf{F} - \mathbf{w})\rho - \mathbf{grad} p] d\tau = 0.$$

Предполагая непрерывность подынтегральной функции, в силу произвольности объема V , а также учитывая представление (1.1) для вектора ускорения в эйлеровых переменных, приходим к *основному уравнению движения идеальной жидкости (уравнению Эйлера)*

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p. \quad (2.3)$$

2.2. Модели жидких идеальных сред. Общую задачу о движении идеальной жидкости можно сформулировать следующим образом: при заданном распределении внешних массовых сил, определить координаты отдельной частицы в каждый момент времени, скорости движения в каждой точке жидкости в каждый момент времени, а также силы внутреннего взаимодействия, то есть гидродинамические давления, в каждой точке в каждый момент времени.

Наиболее часто рассматриваются однородные среды. Плотность однородной жидкости, характеризующая среду, как правило, известна (напр. установлена экспериментально): $\rho(x, y, z, t) = const$. Соответствующую систему уравнений гидродинамики можно получить, если к уравнению Эйлера (2.3), представленному покомпонентно, добавить уравнение непрерывности (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Система (2.4), состоящая из четырех уравнений, является системой относительно четырех неизвестных функций: v_x , v_y , v_z и p . Поэтому она замкнута. Предположим, что удалось разрешить систему (2.4), то есть, что найдены следующие функции

$$\begin{aligned} p &= f_1(t, x, y, z), & v_x &= f_2(t, x, y, z), \\ v_y &= f_3(t, x, y, z), & v_z &= f_4(t, x, y, z). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Представления (2.5) содержат неизвестные константы, т. к. система (2.4) имеет бесконечно много решений. Для выделения единственного решения (2.4), которое соответствует физическому процессу, нужно задать дополнительные условия, о которых будет сказано ниже. Для того чтобы в каждый момент времени определить координаты частицы, находившейся в начальный момент $t = t_0$ в точке (x_0, y_0, z_0) , нужно решить задачу Коши для системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f_2(t, x, y, z), & \frac{dy}{dt} &= f_3(t, x, y, z), & \frac{dz}{dt} &= f_4(t, x, y, z), \\ x(t_0) &= x_0, & y(t_0) &= y_0, & z(t_0) &= z_0. \end{aligned}$$

При рассмотрении неоднородной несжимаемой жидкости (напр. несжимаемая жидкость с примесью в поле силы тяжести (жидкость с плотностной стратификацией))

количество неизвестных функций увеличивается на одну: $\rho(x, y, z, t)$. В этом случае уравнение (1.5) распадается на два уравнения. В самом деле, т. к. жидкость несжимаема, то поток скорости $\oint_{\bar{S}} \mathbf{v} n ds = 0$, где \bar{S} – любая кусочно гладкая поверхность, расположенная внутри объема с жидкостью V . Следовательно, по теореме Остроградского-Гаусса $\int_V \text{div} \mathbf{v} d\tau = 0$, где \bar{V} – объем, ограниченный поверхностью \bar{S} . В силу произвольности \bar{V} , имеем $\text{div} \mathbf{v} = 0$ в объеме V . Тогда из уравнения (1.5) получаем уравнение для определения плотности: $d\rho/dt = 0$. Заметим, что для производной $d\rho/dt$ в эйлеровых переменных справедлива формула, аналогичная (1.1) (подробнее см. [2]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -(\mathbf{v}, \nabla) \rho. \quad (2.6)$$

Добавив к уравнениям (2.4) уравнение (2.6), замыкаем систему.

Для сжимаемых сред характерна определенная зависимость между плотностью и давлением. В связи с этим различают *баротропные* и *бароклинные среды*.

Баротропной средой называется среда, в которой плотность зависит только от давления. Так как зависимость $\rho = \Phi(p)$, как правило, известна (напр., установлена экспериментально), то для баротропных сред система уравнений гидродинамики оказывается замкнутой. В самом деле, к уравнению Эйлера (2.3) добавляется уравнение непрерывности (1.5).

Бароклинной средой называется среда, плотность которой зависит не только от давления. Поэтому количество неизвестных функций увеличивается на одну: v_x, v_y, v_z, p и ρ . Для того, чтобы замкнуть систему необходимо еще, по крайней мере, одно уравнение. С целью получения недостающего уравнения запишем дифференциальное уравнение закона сохранения энергии для сжимаемой идеальной жидкости. Полная энергия U движущегося жидкого объема V представляет собой сумму кинетической энергии K и внутренней \tilde{U} (предполагается общий случай, когда внешнее силовое поле не потенциально): $U = K + \tilde{U}$, где $K = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{v}^2 d\tau$. Если E - значение внутренней энергии, отнесенной к единице массы, то $\tilde{U} = \int_V \rho E d\tau$. Поэтому

$U = \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) d\tau$. Приращение энергии ΔU за время $\Delta t = t_2 - t_1$ складывается из работы массовых сил A_τ , работы поверхностных сил A_S , притока тепла Q_S через поверхность S , ограничивающую объем V и притока тепла Q_τ от источников, распределенных в объеме с жидкостью:

$$\Delta U = A_\tau + A_S + Q_\tau + Q_S. \quad (2.7)$$

Работа массовых сил, действующих на элемент массы $dm = \rho d\tau$ за единицу времени определяется как $\mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau$, где \mathbf{F} - плотность массовых сил. Поэтому

$A_\tau = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \mathbf{Fv} \rho d\tau dt$. Работа поверхностных сил, действующих на элемент поверхности ds , за единицу времени равна $\mathbf{p}_n \mathbf{v} ds$, где \mathbf{p}_n - плотность поверхностных сил (напряжение).

Следовательно $A_S = \int_{t_1}^{t_2} \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds dt$. Если q_n - количество тепла, поступающее в единицу

времени через единицу поверхности в объем V , то $Q_S = \int_{t_1}^{t_2} \oint_S q_n ds dt$. Для многих

изотропных сред справедлив закон теплопроводности Фурье, определяющий плотность теплового потока:

$$q_n = k \frac{\partial T}{\partial n},$$

где $\partial T / \partial n$ - скорость изменения температуры в направлении нормали \mathbf{n} , k - коэффициент теплопроводности, величина которого зависит в основном от температуры. Введем в рассмотрение скорость объемного выделения тепла ε , как количество тепла, выделяемое

единицей объема за единицу времени. Тогда $Q_\tau = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \varepsilon d\tau dt$. Подставляя найденные

выражения в (2.7) и используя теорему о среднем, предположив непрерывность подынтегральных функций, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} \Delta U = & \left(\int_V \mathbf{Fv} \rho d\tau \right)_{t=t^*} \cdot \Delta t + \left(\oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} dS \right)_{t=t^{**}} \cdot \Delta t + \left(\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS \right)_{t=t^{***}} \cdot \Delta t + \\ & + \left(\int_V \varepsilon d\tau \right)_{t=t^{****}} \cdot \Delta t, \end{aligned}$$

где $t^*, t^{**}, t^{***}, t^{****} \in (t_1, t_2)$. Сократив обе части уравнения на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, имеем

$$\frac{dU}{dt} = \int_V \mathbf{Fv} \rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} dS + \oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} dS + \int_V \varepsilon d\tau.$$

С другой стороны, используя (1.4), находим

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) d\tau = \int_V \left[\rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) + \frac{d\rho}{dt} \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) + \rho \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2} + E \right) \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\tau =$$

$$= \int_V \rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) d\tau.$$

Здесь учитывалось уравнение (1.5). Таким образом, получаем закон сохранения энергии для сжимаемой теплопроводящей среды в интегральной форме

$$\int_V \rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) d\tau = \int_V \mathbf{F}\mathbf{v}\rho d\tau + \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds + \oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds + \int_V \varepsilon d\tau. \quad (2.8)$$

Преобразуем поверхностные интегралы, содержащиеся в выражении (2.8), в объемные. По формуле Остроградского-Гаусса

$$\oint_S k \frac{\partial T}{\partial n} ds = \oint_S \mathbf{n} k \mathbf{grad} T ds = \int_V \mathbf{div}(k \mathbf{grad} T) d\tau.$$

Выражение для работы поверхностных сил легко преобразуется в интеграл по объему, если учесть преобразования Гаусса (2.2):

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} ds &= - \oint_S p \mathbf{n} \mathbf{v} ds = - \oint_S p \left[v_x \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) + v_y \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_y) + v_z \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_z) \right] ds = \\ &= - \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (p v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (p v_y) + \frac{\partial}{\partial z} (p v_z) \right] d\tau = - \int_V [p \mathbf{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \mathbf{grad} p] d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в (2.8) в силу произвольности объема V приходим к уравнению

$$\rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \mathbf{div}(k \mathbf{grad} T) + \rho \mathbf{F}\mathbf{v} - p \mathbf{div} \mathbf{v} - \mathbf{v} \mathbf{grad} p.$$

Учитывая (2.3), окончательно находим

$$\rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \mathbf{div}(k \mathbf{grad} T) - p \mathbf{div} \mathbf{v}. \quad (2.9)$$

При адиабатическом движении идеальной жидкости имеем уравнение

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v}.$$

Если в качестве идеальной жидкости выступает идеальный газ, то

$$\frac{dE}{dt} = c_V \frac{dT}{dt},$$

где c_V – удельная теплоемкость в изохорном процессе. Пусть зависимость $E = \Psi(T, p)$ известна. Тогда добавив к уравнениям (1.5), (2.3), (2.9) уравнение состояния

$$\Theta(p, \rho, T) = 0. \quad (2.10)$$

приходим к замкнутой системе уравнений, которая соответствует движению идеальной теплопроводящей бароклинной жидкости (*модель идеальной сжимаемой теплопроводящей жидкости*). Например, при рассмотрении движений идеального газа уравнение (2.10) представляет собой уравнение Менделеева-Клапейрона

$$p = R\rho T,$$

где $R = k_0 m^{-1}$ – универсальная газовая постоянная; k_0 – постоянная Больцмана, одинаковая для всех газов; m – средняя масса молекулы в граммах.

2.3. Начальные и граничные условия. Гидродинамическая система уравнений, являясь системой дифференциальных уравнений, имеет бесконечное множество решений. Для того чтобы выделить единственное решение системы, соответствующее физическому процессу, необходимо задать *дополнительные условия*, включающие в себя *начальные распределения* и *граничные условия*. В качестве начальных условий в эйлеровых переменных, например для системы (2.4), используется распределения скоростей в начальный момент времени $t = t_0$:

$$v_x(x, y, z, t_0) = \varphi_1(x, y, z), \quad v_y(x, y, z, t_0) = \varphi_2(x, y, z), \quad v_z(x, y, z, t_0) = \varphi_3(x, y, z). \quad (2.11)$$

Условия, задаваемые на границах области, зависят от характеристик границы. Если жидкость граничит с неподвижной твердой стенкой S_T с уравнением поверхности $G(x, y, z) = 0$, то граничное условие имеет вид

$$v_n = (\mathbf{v}, \mathbf{n}) = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad (2.12)$$

где $\mathbf{n} = \{\partial G/\partial x, \partial G/\partial y, \partial G/\partial z\}$ – нормаль к поверхности границы S_T , \mathbf{r} – радиус-вектор, проведенный из начала координат в рассматриваемую точку. Условие (2.12) можно переписать в виде

$$v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T.$$

Если же стенка движется со скоростью \mathbf{V}_T , то нормальная составляющая скорости частиц жидкости в любой точке на поверхности должна равняться нормальной составляющей скорости движения поверхности:

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = (\mathbf{V}_T, \mathbf{n}) \quad \mathbf{r} \in S_T. \quad (2.13)$$

При условии, что поверхность является свободной, уравнение поверхности зависит от времени: $G(t, x, y, z) = 0$. Частицы жидкости на свободной поверхности S_p движутся вместе с поверхностью, не пересекая ее. Поэтому если частица в момент времени t находилась на поверхности в точке (x, y, z) , то в следующий момент $t + \Delta t$ она окажется в точке $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, но все еще будет находиться на поверхности:

$$G(t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) = 0, \quad \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \in S_p.$$

Используя разложение в ряд Тейлора, и ограничиваясь членами первого порядка, получаем

$$G(t, x, y, z) + \frac{\partial G}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial G}{\partial z} \Delta z = 0, \quad \mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} \in S_p.$$

Учитывая уравнение свободной поверхности и переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$ окончательно находим *кинематическое условие на свободной поверхности*

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x} v_x + \frac{\partial G}{\partial y} v_y + \frac{\partial G}{\partial z} v_z = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p.$$

При переходе через границу свободной поверхности давление не испытывает скачок. Если \mathbf{n}_1 – нормаль к свободной поверхности S_p , а \mathbf{p}_1 – соответствующее напряжение, то $\mathbf{p}_1 = -p_0 \mathbf{n}_1$, где p_0 – атмосферное давление. Пусть $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Тогда напряжение \mathbf{p}_2 , действующее в сечении с нормалью \mathbf{n}_2 , равно $\mathbf{p}_2 = -p_0 \mathbf{n}_2$. Таким образом, получаем *динамическое условие на свободной поверхности*

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_2) = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p.$$

При изучении движений идеальной жидкости в замкнутом объеме во всех внутренних точках области должно выполняться условие ограниченности решений гидродинамической системы (*внутренняя задача гидроаэродинамики*). Если область содержит бесконечно удаленные точки (*внешняя задача гидроаэродинамики*), то на бесконечности также должно выполняться условие ограниченности решений. Например, в случае задачи об обтекании тела поступательно движущимся потоком скорость жидкости на бесконечности обязана стремиться к скорости невозмущенного потока. Если же рассматривается задача о движении тела в невозмущенной жидкости, то на бесконечности скорость движения жидкости должна стремиться к нулю.

3. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЖИДКИХ ВЯЗКИХ СРЕД. 3.1. Понятие вязкой жидкости. Закон Навье-Стокса. Взаимодействие частиц жидкости характеризуется напряжениями поверхностных сил, то есть силами взаимодействия, отнесенными к единице площади соприкосновения жидких частиц. Как уже отмечалось ранее, в случае идеальной жидкости вектор напряжения \mathbf{p}_n имеет только нормальную к поверхности соприкосновения составляющую, направленную вглубь выделенного объема. Таким образом, взаимодействие частиц идеальной жидкости характеризуется давлениями. При движении *вязкой жидкости* наряду с нормальной составляющей напряжения возникает касательная составляющая, называемая *силой внутреннего трения (силой вязкости)*, которая проявляет себя в виде сопротивления жидкости процессу деформации.

Рассмотрим движущуюся жидкость. Пусть O – некоторая точка (полюс) внутри малого объема с жидкостью V , A – точка из окрестности полюса, $\mathbf{p} = \{\xi, \eta, \zeta\}$ – вектор, проведенный из точки O в точку A . Тогда скорость $\mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$ точки A представима в виде векторной суммы (*теорема Коши-Гельмгольца [2]*)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \quad (3.1)$$

где \mathbf{v}_0 – скорость движения полюса; $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{p}$ – скорость вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс O ; $\mathbf{v}_2 = \{v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}\}$ – скорость

деформационного процесса, где $v_{2x} = \varepsilon_1 \xi + \frac{1}{2} \theta_3 \eta + \frac{1}{2} \theta_2 \zeta$, $v_{2y} = \frac{1}{2} \theta_3 \xi + \varepsilon_2 \eta + \frac{1}{2} \theta_1 \zeta$,

$$v_{2z} = \frac{1}{2} \theta_2 \xi + \frac{1}{2} \theta_1 \eta + \varepsilon_3 \zeta, \quad \varepsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \theta_1 = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$\theta_2 = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \theta_3 = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}. \quad \text{Таблица из девяти величин}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \theta_3 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ \frac{1}{2} \theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \frac{1}{2} \theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

называется *тензором скоростей деформации*. Тензор Φ полностью описывает динамику деформационного процесса, происходящего в малой окрестности выбранного в жидкости

полюса. Если все девять компонентов тензора обращаются в ноль, то скорость деформации равна нулю и, следовательно, скорость всякой частицы из окрестности точки O представима известной формулой для твердых тел: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, где $\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{r}$ - вектор угловой скорости.

Далее, вернемся к формуле (1.3) и составим из проекций векторов \mathbf{p}_x , \mathbf{p}_y и \mathbf{p}_z на координатные оси следующую таблицу

$$\Pi = \begin{pmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{pmatrix},$$

которая определяет *тензор напряжений*. В случае идеальной жидкости недиагональные компоненты тензора напряжений Π обращаются в ноль, так как $\mathbf{p}_x = \mathbf{e}_x p_{xx} = -\mathbf{e}_x p$, $\mathbf{p}_y = -\mathbf{e}_y p$, $\mathbf{p}_z = -\mathbf{e}_z p$. Поэтому

$$\Pi^0 = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}.$$

Если вязкая жидкость покоится, то напряженное состояние в ней также характеризуется тензором Π^0 . При своем движении вязкая среда деформируется, причем процесс деформации сопровождается возникновением дополнительных напряжений, в частности касательных. Величины касательных напряжений тем больше, чем быстрее деформируется среда, т.е. чем быстрее разные слои жидкости движутся друг относительно друга. Таким образом, изменение напряжений в движущейся жидкости непосредственно связано со скоростью деформационного процесса. Это позволяет высказать предположение о существовании определенной связи между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформации. Такую связь устанавливает *закон Навье-Стокса*.

В основу *модели вязкой жидкости* положены следующие предположения:

- составляющие тензора напряжений при стремлении вязкости к нулю должны стремиться к составляющим тензора напряжений в идеальной жидкости;

- жидкость изотропна (физические свойства жидкости одинаковы по всем направлениям);

- компоненты тензора напряжений есть линейные функции компонентов тензора скоростей деформации.

В соответствии с первым утверждением тензор напряжений представим в виде

$$\Pi = \Pi^0 + \Pi' = -pE + \Pi', \quad (3.2)$$

где E - единичный тензор, Π' - вязкий тензор напряжений, компоненты которого стремятся к нулю, если вязкость стремится к нулю. Компоненты тензора Π' предполагаются линейными функциями компонентов тензора Φ . Наиболее общий вид такой зависимости выражается формулой [4]

$$\Pi' = \lambda E \text{div} \mathbf{v} + 2\mu \Phi, \quad (3.3)$$

где λ и μ - скалярные характеристики среды, присутствие которых в (3.3) отражают свойство изотропности среды. Коэффициент μ называют *первым коэффициентом вязкости*, λ - *вторым коэффициентом вязкости*. Соотношения (3.2), (3.3) представляют собой закон Навье-Стокса. Представим (3.3) покомпонентно

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_1, & p_{xy} &= p_{yx} = \mu \theta_3, \\ p_{yy} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_2, & p_{xz} &= p_{zx} = \mu \theta_2, \\ p_{zz} &= -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \varepsilon_3, & p_{yz} &= p_{zy} = \mu \theta_1. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В рамках рассматриваемой модели часто полагают $\mu = \text{const}$ и $\lambda = -2/3 \mu$, считая, что гидродинамическое давление p равно среднему арифметическому от трех нормальных давлений p_{xx} , p_{yy} и p_{zz} , взятому со знаком минус

$$p = -\frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}).$$

Из (3.4) непосредственно следует, что вязкий тензор Π' обращается в ноль, если жидкость покоится или движется с постоянной скоростью, а силы трения возникают только в тех случаях, когда различные части жидкости движутся с разными скоростями.

3.2. Уравнение Навье-Стокса. Рассмотрим уравнение (1.2). Применим преобразования Гаусса (2.2) к компонентам вектора \mathbf{p}_x :

$$\begin{aligned} \oint_S p_{xx} \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) ds &= \int_V \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} d\tau, & \oint_S p_{xy} \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) ds &= \int_V \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} d\tau, \\ \oint_S p_{xz} \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) ds &= \int_V \frac{\partial p_{xz}}{\partial x} d\tau. \end{aligned}$$

Умножая первое выражение на \mathbf{e}_x , второе – на \mathbf{e}_y , третье – на \mathbf{e}_z и складывая результаты

умножения, имеем $\oint_S \mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} d\tau$. Аналогично получаются равенства

$\oint_S \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_y) ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} d\tau$, $\oint_S \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_z) ds = \int_V \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} d\tau$. Следовательно

$$\begin{aligned} \oint_S \mathbf{p}_n ds &= \oint_S \left(\mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) + \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_y) + \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_z) \right) ds = \\ &= \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (1.2), в силу произвольности объема V приходим к уравнению

$$\mathbf{F} - \mathbf{w} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.6)$$

или покомпонентно

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Преобразуем уравнения (3.7), учитывая представления (3.4) для компонентов тензора напряжений. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zx}}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \\ &+ \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + \\ &+ \mu \Delta v_x + \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + \mu \Delta v_x. \end{aligned}$$

Аналогично преобразуются правые части в двух других уравнениях из системы (3.7). Подставляя эти соотношения в (3.7) и учитывая, что $\nu = \mu/\rho$ (кинематический коэффициент вязкости), приходим к уравнениям Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta v_z, \end{aligned} \quad (3.8)$$

или (векторная форма представления)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} + \nu \Delta \mathbf{v}.$$

3.3. Модели жидких вязких сред. Если среда однородна и $\mu = const$, то уравнения Навье-Стокса принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Объединяя (3.9) с уравнением непрерывности

$$div \mathbf{v} = 0, \quad (3.10)$$

получаем замкнутую систему из четырех скалярных уравнений относительно четырех неизвестных функций: v_x , v_y , v_z и p . Если несжимаемая жидкость неоднородна, то к уравнениям (3.9), (3.10) следует добавить уравнение для определения плотности среды (2.6), которое замыкает соответствующую систему.

В общем случае объединяя уравнение непрерывности (1.5) с уравнениями Навье-Стокса (3.8), приходим к незамкнутой системе, которую можно замкнуть, если воспользоваться законом сохранения энергии с целью получения недостающего уравнения. Интегральная форма закона сохранения энергии для движущегося объема жидкости была получена ранее и давалась формулой (2.8). Вычислим второе слагаемое в правой части (2.8), имеющее смысл работы поверхностных сил за единицу времени. Для этого воспользуемся формулой (1.3) и преобразованиями Гаусса (2.2):

$$\begin{aligned}\oint_S \mathbf{p}_n \mathbf{v} dS &= \oint_S \left[\mathbf{p}_x \mathbf{v} \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_x) + \mathbf{p}_y \mathbf{v} \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_y) + \mathbf{p}_z \mathbf{v} \cos(\mathbf{n}, \hat{\mathbf{e}}_z) \right] ds = \\ &= \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}_x \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}_y \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}_z \mathbf{v}) \right] d\tau.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (2.8), получаем

$$\begin{aligned}\int_V \rho \left(\mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dE}{dt} \right) d\tau &= \int_V \mathbf{F} \mathbf{v} \rho d\tau + \int_V \varepsilon d\tau + \int_V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{p}_x \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{p}_y \mathbf{v}) + \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{p}_z \mathbf{v}) \right] d\tau + \\ &+ \int_V div(k grad T) d\tau.\end{aligned}\quad (3.12)$$

В силу произвольности выбора объема V в (3.12) и непрерывности подынтегральных функций, приходим к уравнению

$$\rho \mathbf{v} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \rho \mathbf{F} \mathbf{v} + \mathbf{v} \left(\frac{\partial \mathbf{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{p}_z}{\partial z} \right) + \mathbf{p}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}.$$

Принимая во внимание уравнение движения (3.6), имеем искомое *уравнение притока тепла*

$$\rho \frac{dE}{dt} = \varepsilon + \operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + \mathbf{p}_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \mathbf{p}_y \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \mathbf{p}_z \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}. \quad (3.13)$$

Если в систему уравнений (1.5), (3.8), (3.13) включить уравнение состояния среды (2.10) то, считая, что плотность внутренней энергии $E = \Psi(T, p)$ полностью определяется параметрами T и p , приходим к замкнутой системе уравнений.

В системе (1.5), (3.8), (3.13), (2.10) предполагается постоянство коэффициента вязкости. Для многих жидких сред такое допущение является вполне удовлетворительным. В общем случае зависимость коэффициента вязкости газов от температуры дается *формулой Сатерленда*

$$\mu = \frac{C_1}{T + T_0} T^{\frac{3}{2}}, \quad T_0 \approx 114^0 K,$$

или степенным законом вида

$$\mu = C_2 \left(\frac{T}{T_0} \right)^\omega, \quad 0.5 \leq \omega \leq 1,$$

где C_i – некоторые константы, $i = 1, 2$.

Итак, *модель вязкой сжимаемой теплопроводящей жидкости*, подчиняющейся закону Фурье, включает следующие элементы:

- уравнения Навье-Стокса (3.8);
- уравнение непрерывности (1.5);
- уравнение притока тепла (3.13);
- уравнение состояния (2.10);
- выражение для плотности внутренней энергии через параметры T и p ;
- значения коэффициента вязкости μ и коэффициента теплопроводности k .

Плотность массовых сил \mathbf{F} и интенсивность внутренних источников тепла ε являются внешними параметрами и должны быть заданы.

3.4. Начально-краевые задачи. Внешняя задача гидроаэродинамики. Одной из основных проблем механики жидкостей является задача обтекания тела конечного размера однородным неограниченным потоком. Пусть S_T - поверхность тела, D_e - внешняя часть пространства по отношению к телу. Требуется найти решение системы

(3.9), (3.10) соответствующее течению, переходящему на бесконечности в однородный поток, движущийся со скоростью U_∞ вдоль оси X . На бесконечности имеем условие

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{e}_x U_\infty, \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Так как жидкость вязкая, то на поверхности S_T выполняется условие прилипания частиц жидкости к поверхности:

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_T, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad t \geq t_0. \quad (3.15)$$

Если обтекаемое тело покоится, то, очевидно, справедливо граничное условие

$$\mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \quad t \geq t_0. \quad (3.16)$$

В уравнения (3.9) входят первые производные по времени. Поэтому следует задать начальное распределение скоростей

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0(x, y, z), \quad \mathbf{r} \in S_T \cup D_e, \quad t = t_0. \quad (3.17)$$

Совокупность уравнений (3.9), (3.10), краевых условий (3.14), (3.15) и начальных условий (3.17) составляют *нестационарную начально-краевую задачу об обтекании тела вязким потоком*.

Внутренняя задача. Внутренняя задача ставится для течения внутри замкнутой области D . Пусть ∂D - непроницаемая граница области D . Тогда требуется найти решение задачи (3.9), (3.10) с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{V}_T, \quad \mathbf{r} \in \partial D, \quad t \geq t_0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{v}_0(x, y, z), \quad \mathbf{r} \in \partial D \cup D, \quad t = t_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Кроме этого, следует принять во внимание условие ограниченности решения в области D

$$|\mathbf{v}| < \infty, \quad \mathbf{r} \in D, \quad (3.19)$$

поскольку именно такие решения являются физически обоснованными.

Условия на поверхности раздела. Рассмотрим воображаемую поверхность S_p , разделяющую жидкости с различными физическими свойствами, образующие единый поток. Тогда на поверхности S_p выполняются условия

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3.20)$$

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{n}_1) = (\mathbf{p}_2, \mathbf{n}_2), \quad |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3.21)$$

где \mathbf{n}_1 - нормаль к одной из сторон поверхности S_p , \mathbf{p}_1 , \mathbf{v}_1 - напряжение и скорость частиц на соответствующей стороне поверхности S_p , $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$. Условие (3.20) называется *кинематическим* и выражает равенство скоростей соприкасающихся частиц на поверхности раздела при отсутствии перемешивания жидкостей. Условие (3.21), называемое *динамическим условием*, выражает равенство нормальных и касательных напряжений по обе стороны от поверхности раздела.

Поскольку на свободной поверхности при отсутствии внешних касательных напряжений частицы жидкости совершают движения, перпендикулярные к поверхности раздела, то

$$p_{n_s} = 0, \quad \mathbf{r} \in S_p, \quad (3.22)$$

где p_{n_s} - проекция напряжения на любое касательное к свободной поверхности S_p направление. Если \mathbf{n} - нормаль к свободной поверхности, то напряжение \mathbf{p} на свободной поверхности равно $\mathbf{p} = -p_0 \mathbf{n}$, где p_0 - величина атмосферного давления. Поэтому

$$(\mathbf{p}, \mathbf{n}) = -p_0, \quad \mathbf{r} \in S_p. \quad (3.23)$$

Таким образом, условия (3.22), (3.23) представляют собой *динамическое условие на свободной поверхности вязкой жидкости*. *Кинематическое условие на свободной поверхности* формулируется следующим образом: скорость жидких частиц на свободной поверхности совпадает со скоростью перемещения свободной поверхности.

4. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ПРИМЕРЫ. 4.1. Основные свойства потенциальных движений идеальной несжимаемой жидкости в односвязных областях. (Темы: “Свойства гармонических функций (принцип максимума, теорема о среднем)”, “Простейшие внутренние краевые задачи для уравнения Лапласа”.)

В соответствии с теоремой Коши-Гельмгольца (3.1) движения жидкости можно классифицировать следующим образом: *безвихревые (потенциальные, консервативные)* и *вихревые*. *Потенциальным движением* называется движение, при котором во всем объеме с жидкостью выполняется условие $\text{rot } \mathbf{v} \equiv 0$ (нет локального вращательного движения). *Вихревым движением* называется движение, для которого условие $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ выполняется не во всем объеме. В случае потенциального движения компоненты вектора $\text{rot } \mathbf{v}$ равны нулю:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0. \quad (4.1)$$

Соотношения (4.1) являются необходимым и достаточным условием существования потенциала скорости $\varphi(t, x, y, z)$, так что справедливо представление: $\mathbf{v} = \text{grad}\varphi$.

Рассмотрим основные свойства безвихревого движения несжимаемой жидкости внутри односвязной области. В этом случае уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{divgrad}\varphi = 0$$

или

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \Delta\varphi = 0.$$

Если жидкость несжимаема, то $\Delta\varphi = 0$ и функция $\varphi(t, x, y, z)$ является гармонической по пространственным переменным.

4.1.1. Опираясь на принцип максимума [5] можно доказать следующее утверждение: *при потенциальном движении несжимаемой жидкости в односвязной области D скорость не может принимать максимальное значение внутри D .*

Заметим, что относительно минимального значения такое утверждение сформулировать нельзя.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что во внутренней точке A скорость достигает максимального значения. Направим в точке A ось OX вдоль скорости в этой точке в данный момент времени. Тогда

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A = v_{\max}.$$

Так как движение потенциально, то

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Продифференцировав это равенство по x , приходим к выводу, что функция $\partial\varphi/\partial x$ также является гармонической. По принципу максимума $\partial\varphi/\partial x$ не может достигать максимального значения в точке A . Следовательно, существует точка B , из окрестности точки A , для которой имеет место неравенство:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_B > \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_A = v_A.$$

Очевидно, что

$$v_B^2 = \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right]_B > v_A^2.$$

Получаем противоречие с предполагаемым ранее.

4.1.2. Из теоремы о среднем [5] следует утверждение: *при потенциальном течении несжимаемой жидкости значение потенциала в точке M_0 равно среднему значению потенциала на поверхности любой сферы с центром в точке M_0 , принадлежащей области D .*

Аналогичное утверждение имеет место для вектора скорости в точке M_0 , т.к. компоненты вектора скорости $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ являются гармоническими функциями. Следовательно

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(M_0, t) &= \mathbf{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M_0, t) + \mathbf{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M_0, t) + \mathbf{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M_0, t) = \\ &= \frac{1}{S_0} \oint_S \left(\mathbf{e}_x \frac{\partial\varphi}{\partial x}(P, t) + \mathbf{e}_y \frac{\partial\varphi}{\partial y}(P, t) + \mathbf{e}_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}(P, t) \right) ds = \frac{1}{S_0} \oint_S \mathbf{v}(P, t) ds, \end{aligned}$$

где $P \in S$, S_0 – площадь сферы S с центром в точке M_0 .

4.3.1. В настоящем пособии рассматриваются течения, характеризуемые непрерывными полями скоростей. Поскольку в случае потенциального движения $\mathbf{v} = \text{grad}\varphi$, то требование непрерывности скорости налагает определенные ограничения на гладкость функции φ . В связи с этим возникает необходимость изучения существования именно классических решений краевых задач, определяющих потенциал течения.

Из теоремы единственности решения внутренней задачи Дирихле [5] следует утверждение: *если потенциал сохраняет постоянное значение на границе области D , то он остается постоянным во всех внутренних точках области.*

В самом деле, если потенциал имеет на границе постоянное значение C , то он удовлетворяет в D задаче Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0 && \text{в } D, \\ \varphi|_{\partial D} &= C, && P \in \partial D, \end{aligned}$$

которая имеет классическое решение $\varphi = C$, являющееся единственным в силу теоремы единственности.

Заметим, что доказанное утверждение также следует из принципа максимума.

Докажем следующие два утверждения.

В односвязном объеме с несжимаемой жидкостью, который ограничен непроницаемыми твердыми стенками, не может существовать потенциальное движение.

Допустим, что жидкость способна совершать потенциальное движение при заданных условиях на границе. Найдем потенциал, отвечающий такому движению.

Очевидно, что на границе ∂D объема с жидкостью выполняется условие равенства нулю нормальной компоненты скорости:

$$v_n|_{\partial D} = 0.$$

Значит

$$v_n|_{\partial D} = \mathbf{vn}|_{\partial D} = \mathbf{n} \text{grad}\varphi|_{\partial D} = \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_{\partial D} = 0,$$

где \mathbf{n} - внешняя нормаль по отношению к D . Следовательно, потенциал в области D удовлетворяет однородной краевой задаче Неймана для оператора Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в } D,$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\partial D} = 0$$

которая имеет классическое решение $\varphi(M) = C$, причем постоянная C произвольна. Отсюда приходим к выводу, что жидкость в D покоится.

Если односвязный объем с несжимаемой жидкостью ограничен неподвижной стенкой, причем на одной части границы потенциал имеет постоянное значение, а другая часть границы непроницаема, то внутри объема не может существовать безвихревое движение.

Допустим, что жидкость в области D совершает потенциальное движение. Тогда потенциал будет удовлетворять краевой задаче

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{в } D, \tag{4.2}$$

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial n} \right|_{\partial D_1} = 0, \quad \varphi|_{\partial D_2} = C, \quad \partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D. \tag{4.3}$$

Очевидно, что задача (4.2), (4.3) имеет классическое решение $\varphi = C$. Докажем его единственность.

Пусть существует еще одно классическое решение $\varphi = \varphi_0 \neq C$ задачи (4.2), (4.3). Тогда функция $\bar{\varphi} = \varphi_0 - C$ удовлетворяет однородной задаче

$$\Delta\bar{\varphi} = 0, \quad M \in D, \tag{4.4}$$

$$\left. \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial n} \right|_{\partial D_1} = 0, \quad \bar{\varphi}|_{\partial D_2} = 0, \quad \partial D_1 \cup \partial D_2 = \partial D. \tag{4.5}$$

Полагая в первой формуле Грина [5]

$$\int_D v \Delta u d\tau = \oint_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_D \nabla u \nabla v d\tau$$

$u = v = \bar{\varphi}$, получим

$$\int_D \bar{\varphi} \Delta \bar{\varphi} d\tau = \oint_{\partial D} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} ds - \int_D (\nabla \bar{\varphi})^2 d\tau$$

или

$$\int_D \bar{\varphi} \Delta \bar{\varphi} d\tau = \int_{\partial D_1} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} ds + \int_{\partial D_2} \bar{\varphi} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} ds - \int_D (\nabla \bar{\varphi})^2 d\tau.$$

В силу уравнения (4.4) и граничных условий (4.5), имеем

$$\int_D (\nabla \bar{\varphi})^2 d\tau = 0.$$

Отсюда находим, что $\text{grad} \bar{\varphi} = 0$ в D . Следовательно, $\bar{\varphi} = 0$ в \bar{D} , что и требовалось доказать.

4.2. Плоские задачи о движении тел в идеальной жидкости. (Тема: “Примеры постановок внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа”.)

Хорошо изученным классом течений жидкости являются плоские потенциальные течения. Если при движении жидкости линии тока (линии, в каждой точке которых в данный момент времени вектор скорости является касательным) представляют собой плоские кривые, расположенные в параллельных плоскостях, а частицы, лежащие на одной прямой, перпендикулярной к этим плоскостям, совершают одинаковые движения, то такое движение жидкости называется *плоскопараллельным* или *плоским*. Предположим, что жидкость совершает плоское движение параллельное плоскости XU . Тогда все характеристики движения будут зависеть от двух пространственных переменных. Если при этом жидкость несжимаема, то справедливо уравнение непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial y}. \quad (4.6)$$

Дифференциальное уравнение линий тока имеет вид

$$\frac{dx}{v_x(x, y, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, t)}$$

или

$$-v_y dx + v_x dy = 0. \quad (4.7)$$

Выполнение равенства (4.6) является необходимым и достаточным условием того, что выражение (4.7) представляет собой полный дифференциал, то есть, что существует такая скалярная функция $\psi(x, y, t)$, для дифференциала которой справедливо представление

$$d\psi = -v_y dx + v_x dy = 0, \quad (4.8)$$

причем

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Интегрируя (4.8), получаем

$$\psi(x, y, t) = \text{const} \text{ вдоль линии тока.}$$

Функция $\psi(x, y, t)$ называется *функцией тока* и вводится для описания плоских потоков.

Если плоское движение потенциально, то компоненты вихря скорости равны нулю:

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Следовательно, функция тока является гармонической функцией по пространственным переменным.

4.2.1. Пусть цилиндрическое тело с произвольным гладким сечением γ движется в идеальной жидкости, причем обтекание будем считать потенциальным. При этом функция тока является гармонической во внешней, по отношению к цилиндру, области D_e :

$$\Delta \psi = 0, \quad (x, y) \in D_e. \quad (4.9)$$

Если тело движется в жидкости, которая покоится на бесконечности, то на бесконечности выполняются условия

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Поскольку сечение поверхности цилиндра является гладкой кривой, то в каждой точке контура γ определена нормаль \mathbf{n} и касательный вектор $\boldsymbol{\tau}$. Обозначим через θ угол между вектором $\boldsymbol{\tau}$ и осью X (рис. 1).

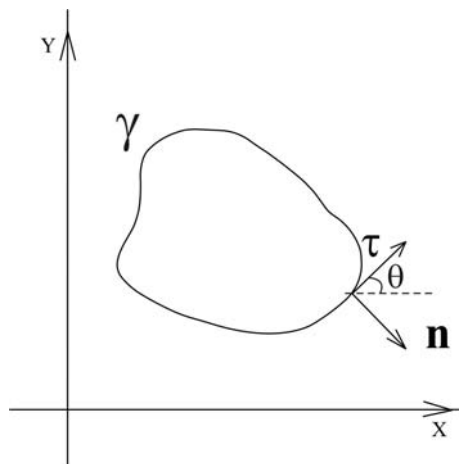


Рис. 1.

Тогда для нормальной составляющей скорости движения частиц жидкости на границе имеем выражение:

$$\begin{aligned} v_n|_\gamma &= \left(v_x \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{e}}_x) + v_y \cos(\hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{e}}_y) \right) \Big|_\gamma = \left(v_x \sin \theta + v_y \sin(\hat{\boldsymbol{\tau}}, \hat{\mathbf{e}}_y) \right) \Big|_\gamma = \\ &= (v_x \sin \theta - v_y \cos \theta) \Big|_\gamma. \end{aligned}$$

Далее, если ds - бесконечно малый элемент кривой γ , а dx и dy - проекции ds на координатные оси, то, вводя натуральный параметр s , определяемый как расстояние от некоторой фиксированной точки на γ до произвольной, окончательно находим

$$v_n|_\gamma = \left(v_x \frac{dy}{ds} - v_y \frac{dx}{ds} \right) \Big|_\gamma = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} \right) \Big|_\gamma = \frac{d\psi}{ds} \Big|_\gamma.$$

Пусть цилиндр движется со скоростью $\mathbf{u} = \{u_x, u_y\}$. Тогда на поверхности цилиндра имеет место граничное условие (2.13)

$$v_n|_\gamma = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_\gamma = (u_x \sin \theta - u_y \cos \theta) \Big|_\gamma$$

или

$$\frac{d\psi}{ds} \Big|_\gamma = (u_x \sin \theta - u_y \cos \theta) \Big|_\gamma. \quad (4.11)$$

Произвольное движение цилиндра можно разложить на поступательное движение со скоростью $\mathbf{U}^{\text{пост}} = \{U, V\}$ и вращательное движение, осуществляемое вокруг начала координат с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Тогда, если \mathbf{u} - скорость движения некоторой точки на контуре γ , \mathbf{r} - радиус-вектор, проведенной из начала координат к выбранной точке, то

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}^{\text{пост}} + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}].$$

Следовательно

$$u_x = U - \omega y, \quad u_y = V + \omega x.$$

Поэтому, в силу (4.11)

$$\frac{d\psi}{ds} \Big|_\gamma = [(U - \omega y) \sin \theta - (V + \omega x) \cos \theta] \Big|_\gamma = \left[(U - \omega y) \frac{dy}{ds} - (V + \omega x) \frac{dx}{ds} \right] \Big|_\gamma.$$

Интегрируя вдоль γ , находим

$$\psi|_\gamma = Uy - Vx - \frac{\omega}{2}(x^2 + y^2) + const, \quad (x, y) \in \gamma. \quad (4.12)$$

Таким образом, для определения функции тока получаем внешнюю задачу Дирихле (4.9), (4.10), (4.12) для уравнения Лапласа, куда время входит как параметр. Заметим, что функция тока, также как и потенциал скорости, определяется с точностью до аддитивной постоянной.

4.2.2. Задачу о движении цилиндра можно решать путем поиска функции $\varphi(x, y)$. Вне контура γ потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in D_e. \quad (4.13)$$

На самом контуре выполняется условие (2.13)

$$\begin{aligned} v_n|_\gamma &= (\mathbf{n}, \text{grad}\varphi)|_\gamma = \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_\gamma = (\mathbf{u}, \mathbf{n})|_\gamma = \\ &= (U - \omega y)n_1(x, y) + (V + \omega x)n_2(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $n_i(x, y)$ – направляющие косинусы единичной нормали \mathbf{n} , которые являются известными функциями, т.к. контур γ задан. Поскольку на бесконечности жидкость покоится, то

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (4.15)$$

Следовательно, для определения потенциала скорости получаем внешнюю задачу Неймана (4.13)-(4.15) для уравнения Лапласа.

4.3. Стационарные течения вязкой однородной жидкости в трубах.

4.3.1. Течения в трубах с круговым и эллиптическим сечениями. (Тема: “Краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в круге”.) Рассмотрим ламинарное (слоистое) течение однородной вязкой жидкости в трубе с гладким сечением, вызванное продольным градиентом давления, независимым от времени: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial p}{\partial z} \neq 0$. Будем считать,

что ось Z направлена вдоль оси трубы по течению жидкости. Типичным свойством ламинарных течений является изменение характера течения только в связи с изменением внешних условий и внешних сил. В остальных случаях течение сохраняет свой спокойный характер. При изменении параметров трубы, скорости течения или физических характеристик жидкости движение может стать беспорядочным (турбулентным).

Для определения распределения скоростей в трубе имеем систему уравнений гидродинамики, которая следует из системы (3.9), (3.10)

$$\begin{aligned} \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) &= \frac{\partial p}{\partial z}, \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

с граничными условиями (3.16), (3.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0, \quad \mathbf{r} \in S_T, \\ |\mathbf{v}| &< \infty, \quad \mathbf{r} \in D, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где D - область, расположенная внутри поверхности трубы S_T . Из системы (4.16) следует, что $v_z = v_z(x, y)$, $p = p(z)$.

Наиболее важным частным случаем является течение по трубе с круговым сечением радиуса a . Переходя в полярную систему координат (r, φ) , из системы (4.16), (4.17) получаем краевую задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad (4.18)$$

$$v_z|_{r=a} = 0, \quad |v_z| < \infty.$$

Далее, так как $p = p(z)$, а $v_z = v_z(r, \varphi)$, то выполнение уравнения из системы (4.18)

возможно, если $\frac{dp}{dz} = const$. Решение задачи (4.18) ищем в виде $v_z(r, \varphi) = w(r, \varphi) + \frac{r^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}$, где функция $w(r, \varphi)$ удовлетворяет краевой задаче Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta w = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad w|_{r=a} = -\frac{a^2}{4\mu} \frac{dp}{dz}, \quad |w| < \infty.$$

Решение краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга, ограниченное при $r = 0$, дается формулой [5]

$$w(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \quad A_n, B_n = const.$$

Учитывая граничное условие при $r = a$, находим $A_0 = -\frac{a^2}{2\mu} \frac{dp}{dz}$, $A_n = 0$, $n \neq 0$, $B_n = 0$.

Следовательно,

$$v_z(r) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2). \quad (4.19)$$

Функция (4.19) является классическим решением задачи (4.18), и, значит, единственным ее решением в силу теоремы единственности [5].

Течение с профилем скорости (4.19) называется *плоскопараллельным течением Пуазейля*. Если p_1 и p_2 - давления в двух точках, отстоящих на расстояние l друг от друга, то

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{p_1 - p_2}{l}.$$

Поэтому распределение (4.19) можно переписать в виде

$$v_z(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (a^2 - r^2).$$

Другое частное решение задачи (4.16), (4.17) будем искать в виде

$$v_z(x, y) = Ax^2 + By^2 + C. \quad (4.20)$$

Подставляя (4.20) в (4.16), получаем

$$(2A + 2B) = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz}. \quad (4.21)$$

Условие на поверхности трубы

$$v_z|_{S_T} = (Ax^2 + By^2 + C)|_{l_T} = 0$$

означает, что сечением l_T трубы, для которого распределение скоростей представимо формулой (4.20), является эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 = -\frac{C}{A}$, $b^2 = -\frac{C}{B}$, a и b - полуоси эллипса. Поэтому, в соответствии с (4.21),

$$\frac{C}{a^2} + \frac{C}{b^2} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz}$$

или

$$C = \frac{1}{2\mu} \frac{p_1 - p_2}{l} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Следовательно, распределение скоростей при ламинарном течении в трубе с эллиптическим сечением имеет вид

$$v_z(x, y) = \frac{1}{2\mu l} \frac{(p_1 - p_2) a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right). \quad (4.22)$$

При $a = b$ из формулы (4.22) получаем профиль скорости (4.19) для течения Пуазейля.

4.3.2. Течение в трубе с прямоугольным сечением и течение в плоском канале с твердыми стенками. (Тема: “Краевая задача Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике”.) Если сечение поверхности трубы является кусочно гладкой кривой, то процедура построения решения усложняется. Рассмотрим, например, течение в трубе, сечение которой – прямоугольник, ограниченный прямыми $y = \pm a$, $x = \pm b$. Решение системы (4.16), (4.17) будем искать в виде

$$v_z(x, y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l} (a^2 - y^2 + \bar{v}(x, y)).$$

Тогда функция $\bar{v}(x, y)$ определяется из краевой задачи для уравнения Лапласа в прямоугольнике:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} &= 0, \\ \bar{v}|_{y=\pm a} &= 0, \quad \bar{v}|_{x=\pm b} = y^2 - a^2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Частные решения уравнения (4.23), удовлетворяющие граничным условиям при $y = \pm a$, ищем в соответствии с методом разделения переменных [5]:

$$\bar{v}(x, y) = X(x)Y(y).$$

Подставляя это представление в уравнение (4.23), находим

$$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = -\lambda, \quad \lambda = \text{const.}$$

С учетом однородного граничного условия из системы (4.23) получаем задачу на собственные функции и собственные значения отрезка:

$$\begin{aligned} Y'' + \lambda Y &= 0, \quad -a < y < a, \\ Y(\pm a) &= 0, \end{aligned}$$

решение которой представимо как

$$Y(y) = C_1 \sin \sqrt{\lambda} y + C_2 \cos \sqrt{\lambda} y,$$

где коэффициенты C_1 и C_2 определяются из системы

$$\begin{aligned} C_1 \sin \sqrt{\lambda} a + C_2 \cos \sqrt{\lambda} a &= 0, \\ -C_1 \sin \sqrt{\lambda} a + C_2 \cos \sqrt{\lambda} a &= 0. \end{aligned}$$

Данная система имеет нетривиальное решение, если

$$\begin{vmatrix} \sin \sqrt{\lambda} a & \cos \sqrt{\lambda} a \\ -\sin \sqrt{\lambda} a & \cos \sqrt{\lambda} a \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем дисперсионное уравнение относительно параметра λ :

$$\sin 2\sqrt{\lambda} a = 0,$$

и систему собственных значений

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{2a} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Если $n = 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $Y_k = \sin \sqrt{\lambda_k} y$, $\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2$.

Если $n = 2k + 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$, то $Y_k = \cos \sqrt{\lambda_k} y$, $\lambda_k = \left[\frac{\pi}{a}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right]^2$.

Постоянные C_1 и C_2 положили равными единице, так как значения собственных функций определены с точностью до постоянного множителя.

Заметим, что собственные функции Y_k обладают свойством ортогональности на отрезке $[-a; a]$ [5]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \int_{-a}^a \sin \frac{\pi k}{a} z \sin \frac{\pi k'}{a} z dz &= \delta_{kk'}, \\ \frac{1}{a} \int_{-a}^a \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) z \cos \frac{\pi}{a} \left(k' + \frac{1}{2}\right) z dz &= \delta_{kk'}, \\ \int_{-a}^a \sin \frac{\pi k}{a} z \cos \frac{\pi}{a} \left(k' + \frac{1}{2}\right) z dz &= 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

при любых k и k' . Здесь $\delta_{kk'} = 1$, если $k = k'$; $\delta_{kk'} = 0$, если $k \neq k'$.

Для определения функции $X(x)$ получаем уравнение

$$X'' - \lambda_k X = 0,$$

фундаментальную систему решений которого удобно записать в виде $\{sh \sqrt{\lambda_k} x, ch \sqrt{\lambda_k} x\}$.

Таким образом, построены системы частных решений уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} sh \frac{\pi k}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} y, \quad sh \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) x \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) y, \\ ch \frac{\pi k}{a} x \sin \frac{\pi k}{a} y, \quad ch \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) x \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) y. \end{aligned}$$

Решение задачи (4.23) представим в виде разложения по этим частным решениям

$$\begin{aligned} \bar{v}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[A_k sh \frac{\pi k}{a} x + B_k ch \frac{\pi k}{a} x \right] \sin \frac{\pi k}{a} y + \right. \\ \left. + \left[C_k sh \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) x + D_k ch \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) x \right] \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2}\right) y \right\}, \end{aligned}$$

где коэффициенты ряда определяются из граничных условий при $x = \pm b$:

$$y^2 - a^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\pm A_k \operatorname{sh} \frac{\pi k}{a} b + B_k \operatorname{ch} \frac{\pi k}{a} b \right] \sin \frac{\pi k}{a} y + \right. \\ \left. + \left[\pm C_k \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) b + D_k \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) b \right] \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) y \right\}. \quad (4.25)$$

В соответствии с теоремой разложимости Стеклова [5] функция $y^2 - a^2$ может быть представлена единственным образом в виде разложения по системе собственных функций задачи (4.24). Поэтому $A_k = 0$, $C_k = 0$ для любого значения k .

Далее, умножая обе части равенства (4.25) на $\sin \frac{\pi k'}{a} y$, затем интегрируя по y от $-a$ до a и используя свойство ортогональности (4.24), имеем: $B_k = 0$ для любого значения k . Умножая обе части равенства (4.25) на $\cos \frac{\pi}{a} \left(k' + \frac{1}{2} \right) y$ и интегрируя по y , находим

$$\int_{-a}^a (y^2 - a^2) \cos \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) y dy = a D_k \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right) b,$$

или

$$D_k \operatorname{ch} \lambda_k b = \frac{1}{a} \int_{-a}^a (y^2 - a^2) \cos \lambda_k y dy = (-1)^{k+1} \frac{32a^2}{(2k+1)^3 \pi^3}, \quad \lambda_k = \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right).$$

Таким образом, распределение скоростей в трубе с прямоугольным сечением дается формулой

$$v_z(x, y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \left[a^2 - y^2 + \frac{32a^2}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \lambda_k x}{\operatorname{ch} \lambda_k b} \cos \lambda_k y \right], \quad \lambda_k = \frac{\pi}{a} \left(k + \frac{1}{2} \right). \quad (4.26)$$

При $b \rightarrow \infty$ из распределения (4.26) получаем распределение скоростей в плоском канале между двумя твердыми поверхностями $y = \pm a$ (плоскопараллельное течение Пуазейля):

$$v_z(x, y) = -\frac{\Delta p}{2\mu l} (a^2 - y^2)$$

4.4. Распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении сферы. (Тема: “Краевая задача Неймана для уравнения Лапласа вне шара. Единственность решения внешних задач в трехмерном случае.”) Определим распределение скоростей в идеальной несжимаемой жидкости при ускоренном движении со скоростью $\mathbf{v}_0(t)$ сферы радиуса a , считая обтекание сферы потенциальным. Так как движение потенциально и жидкость несжимаема, то потенциал φ вне сферы удовлетворяет уравнению Лапласа по пространственным переменным (см. пример 4.1). Поскольку жидкость граничит с движущейся сферой, то нормальная составляющая скорости частиц жидкости на поверхности сферы равна нормальной составляющей скорости движения поверхности сферы S (см. (2.13)):

$$(\mathbf{v}, \mathbf{n})|_S = (\text{grad}\varphi, \mathbf{n})|_S = \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S = (\mathbf{v}_0(t), \mathbf{n}).$$

На бесконечности выполняется условие:

$$\mathbf{v} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty.$$

Значит

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{r} \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для определения потенциала скорости в области D_e вне движущейся сферы имеем краевую задачу

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= 0, \quad (x, y, z) \in D_e, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial n}|_S &= (\mathbf{v}_0(t), \mathbf{n}), \quad t \geq 0, \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad (x, y, z) \rightarrow \infty, \tag{4.28}$$

куда t входит как параметр.

Выберем сферическую систему координат (r, θ, λ) , $0 \leq r < +\infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ так, чтобы начало отсчета совпадало с центром сферы, а угол θ совпадал с углом между направлением движения сферы и направлением нормали к поверхности (рис. 2).

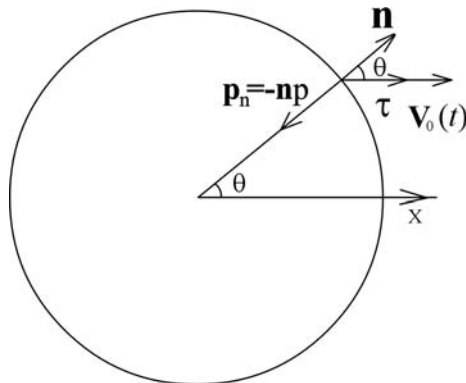


Рис. 2.

В каждый момент времени $t = t_0$ можно определить распределение скоростей в жидкости относительно этой системы координат, решив задачу (4.27), (4.28) при фиксированном значении $t = t_0$. В выбранной системе координат система (4.27), (4.28) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \lambda^2} &= 0, \quad (r, \theta, \lambda) \in D_e, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=a} = v_0(t_0) \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} &\rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Исследуем разрешимость задачи (4.27), (4.28) при каждом фиксированном t . Покажем, что для двух функций φ и u , непрерывных вместе с первыми производными во внешней области $D_e \cup S$, где S – граница D_e , имеющих непрерывные вторые производные в D_e и удовлетворяющих условию на бесконечности (4.28), справедлива 1-я формула Грина.

Окружим поверхность S сферой Σ_R достаточно большого радиуса R . Область между S и Σ_R обозначим D_R . В области D_R справедлива 1-я формула Грина

$$\int_{D_R} u \Delta \varphi d\tau = \oint_S u \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \oint_{\Sigma_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma - \int_{D_R} \nabla u \nabla \varphi d\tau.$$

Очевидно, что

$$\oint_{\Sigma_R} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = \oint_{\Sigma_R} u \left(n_1(P) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_2(P) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + n_3(P) \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) d\sigma \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad P \in \Sigma_R,$$

в силу выполнения условия (4.28). Здесь $n_i(P)$ – направляющие косинусы нормали к поверхности Σ_R , $i = \overline{1,3}$. Таким образом получаем 1-ю формулу Грина

$$\int_{D_e} u \Delta \varphi d\tau = \oint_S u \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds - \int_{D_e} \nabla u \nabla \varphi d\tau. \quad (4.30)$$

Из формулы (4.30) следует необходимое условие разрешимости задачи (4.27), (4.28). Полагая в (4.30) $u = 1$ (очевидно, что эта функция принадлежит рассматриваемому классу функций), имеем условие

$$\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds = 0,$$

которое выполняется, т.к. при $r = a$ имеет место граничное условие (4.29).

Если классическое решение задачи (4.29) существует, то оно определено с точностью до произвольной функции времени. Докажем это. Пусть $\varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0)$ - решение задачи (4.29). Покажем, что любое другое решение $\varphi_2(r, \theta, \lambda, t_0)$ отличается от решения $\varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0)$ на произвольную функцию времени $C(t_0)$. Рассмотрим функцию $\varphi_0(r, \theta, \lambda, t_0) = \varphi_2(r, \theta, \lambda, t_0) - \varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0)$. Функция $\varphi_0(r, \theta, \lambda, t_0)$ удовлетворяет задаче (4.29) с условием на границе $\partial \varphi_0 / \partial r = 0$ при $r = a$. Полагая в формуле (4.30) $u = \varphi = \varphi_0$, имеем:

$$\int_{D_e} \varphi_0 \Delta \varphi_0 d\tau = \oint_S \varphi_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} ds - \int_{D_e} (\nabla \varphi_0)^2 d\tau.$$

Отсюда $\nabla \varphi_0 = 0$ в D_e . Учитывая условие на бесконечности, находим: $\varphi_0(r, \theta, \lambda, t_0) = C(t_0)$. Следовательно $\varphi_2(r, \theta, \lambda, t_0) = \varphi_1(r, \theta, \lambda, t_0) + C(t_0)$.

Ограниченные на бесконечности частные решения уравнения из системы (4.29) ищем в соответствии с методом разделения переменных [5] в виде

$$\varphi(r, \theta, \lambda) = R(r)u(\theta, \lambda).$$

Подставляя искомый вид решения в соответствующее уравнение, получим

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{\Delta_{\theta\lambda} u}{u} = \mu,$$

где $\Delta_{\theta\lambda} u = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2}$ - сферический оператор Лапласа, $\mu = const$.

Отсюда приходим к задаче Штурма-Лиувилля для сферического оператора Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta\lambda} u + \mu u &= 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \lambda \leq 2\pi, \\ u(\theta, \lambda) &= u(\theta, \lambda + 2\pi), \\ |u(0, \lambda)| &< \infty, \quad |u(\pi, \lambda)| < \infty \end{aligned}$$

собственными функциями которой являются сферические функции [5]

$$u = u_{nm}(\theta, \lambda) = P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\lambda, \\ \sin m\lambda, \end{cases}$$

а собственные значения равны $\mu = \mu_n = n(n+1)$, $n = 0, 1, \dots, \infty$, $m = 0, 1, \dots, n$.

Здесь $P_n^m(\cos \theta) = \sin \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_n(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра, $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра [5].

Функция $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$r^2 R'' + 2rR' - n(n+1)R = 0,$$

общее решение которого представимо как

$$R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}.$$

Таким образом, ограниченное на бесконечности решение уравнения из задачи (4.29) ищем в виде

$$\varphi(r, \theta, \lambda, t_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n r^{-(n+1)} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) + C(t_0),$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени. Поскольку $P_1^0(\cos \theta) = P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, то граничное условие из (4.29) можно записать как

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Далее

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (n+1) a^{-(n+2)} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_n^m(\cos \theta) = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Отсюда ясно, что отличны от нуля только члены с $n = 1$, $m = 0$:

$$-2a^{-3} A_{10} P_1^0(\cos \theta) = v_0(t_0) P_1^0(\cos \theta).$$

Следовательно

$$\varphi(r, \theta, t_0) = -\frac{v_0(t_0)a^3}{2r^2} \cos \theta + C(t_0) \quad (4.31)$$

для любого момента времени $t = t_0$.

Поскольку в сферической системе координат выражение для скорости имеет вид

$$\mathbf{v}(r, \theta, \lambda, t) = \mathbf{e}_r \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\lambda \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda},$$

где \mathbf{e}_r , \mathbf{e}_θ , \mathbf{e}_λ – орты сферической системы координат, то

$$\mathbf{v}(r, \theta, t) = \mathbf{e}_r \frac{v_0(t)a^3}{r^3} \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \frac{v_0(t)a^3}{2r^3} \sin \theta. \quad (4.32)$$

Заметим, что потенциал скорости (4.31) определен с точностью до произвольной функции времени, а распределение скоростей определяется однозначно и дается формулой (4.32).

4.5. Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением. (Тема: “Начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности в круге.”). Пусть в горизонтальной цилиндрической трубе радиуса a с покоящейся жидкостью внутри в момент времени $t = 0$ задается постоянный продольный градиент давления $-\frac{\partial p}{\partial z} = \gamma$, который остается постоянным в последующие моменты времени. Если ось Z декартовой системы координат совпадает с осью трубы, то $v_z \neq 0$, $v_x = v_y = 0$, $\partial p / \partial x = \partial p / \partial y = 0$. Пренебрегая действием силы тяжести из системы (3.9), (3.10) с учетом дополнительных условий (3.18), (3.19) получаем модельную начально-краевую задачу в круге K^a с границей ∂K^a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\rho} \gamma, \quad |v_z| < \infty, \quad (x, y) \in K^a, \\ v_z(x, y, t) &= 0, \quad (x, y) \in \partial K^a, \quad t \geq 0, \\ v_z(x, y, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Перейдем в полярную систему координат (r, φ) и введем новую неизвестную функцию:

$$u(r, \varphi, t) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2) - v_z(r, \varphi, t).$$

Тогда из системы (4.33) для определения функции $u(r, \varphi, t)$ получаем задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(a, \varphi, t) &= 0, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u(r, \varphi, 0) &= \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2), \quad 0 \leq r \leq a.\end{aligned}\tag{4.34}$$

Частные решения уравнения (4.34), удовлетворяющие граничному условию при $r = a$, ищем в соответствии с методом разделения переменных [5]:

$$u(r, \varphi, t) = \bar{u}(r, \varphi)T(t).$$

Тогда, подставляя это представление в уравнение из системы (4.34), находим

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2}}{\bar{u}} = -\frac{\lambda}{a^2},$$

где λ - произвольная постоянная величина. Учитывая граничное условие из системы (4.34), для нахождения функции $\bar{u}(r, \varphi)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{\lambda}{a^2} \bar{u} &= 0, \quad 0 \leq r < a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ \bar{u}(a, \varphi) &= 0, \quad |\bar{u}| < \infty.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Решение задачи (4.35) ищем в виде $\bar{u}(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставляя этот вид в уравнение и разделяя переменные, имеем

$$\frac{r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\lambda}{a^2} r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu,$$

где ν – произвольная постоянная величина. Для определения функции $\Phi(\varphi)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля на отрезке с условиями периодичности

$$\Phi'' + \nu \Phi = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi).$$

Решение этой задачи дается в [5]: $\nu_n = n^2$, $\Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{cases}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При каждом значении $\nu_n = n^2$ имеем задачу Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя:

$$\begin{aligned}r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \left(\frac{\lambda}{a^2} r^2 - n^2 \right) R &= 0, \quad 0 \leq r < a, \\ R(a) &= 0, \quad |R| < \infty.\end{aligned}$$

Решение этой задачи также построено в [5]:

$$R_n(r) = J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n} r}{a}\right),$$

где J_n – функция Бесселя n – го порядка, λ_k^n – k -тый корень уравнения $J_n(\sqrt{\lambda^n}) = 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Далее, приходим к уравнению

$$T' + \frac{\nu \lambda_k^n}{a^2} T = 0$$

общее решение которого представимо как

$$T_{nk}(t) = A e^{-\frac{\nu \lambda_k^n}{a^2} t}.$$

Решение задачи (4.34) будем искать в виде ряда

$$u(r, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n} r}{a}\right) (A_{nk} \cos n\varphi + B_{nk} \sin n\varphi) e^{-\frac{\nu \lambda_k^n}{a^2} t}.$$

Учитывая вид начального условия из системы (4.34), полученное представление можно несколько упростить:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^0} r}{a}\right) e^{-\frac{\nu \lambda_k^0}{a^2} t}. \quad (4.36)$$

С целью нахождения коэффициентов разложения (4.36) воспользуемся следующим свойством ортогональности собственных функций задачи Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя [5]:

$$\int_0^a r J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^n} r}{a}\right) J_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^n} r}{a}\right) dr = \frac{a^2}{2} J_n'^2(\sqrt{\lambda_k^n}) \delta_{kk'}, \quad (4.37)$$

где $\delta_{kk'}$ - символ Кронекера. Коэффициенты A_{0k} определяются путем подстановки решения (4.36) в начальное условие из системы (4.34):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_{0k} J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_k^0} r}{a}\right) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2).$$

Умножая обе части полученного выражения на $r J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^0} r}{a}\right)$, интегрируя по r от 0 до a и используя формулу (4.37), имеем

$$A_{0k'} \frac{a^2}{2} J_1^2(\sqrt{\lambda_{k'}^0}) = \frac{\gamma}{4\mu_0} \int_0^a r(a^2 - r^2) J_0\left(\frac{\sqrt{\lambda_{k'}^0}}{a} r\right) dr.$$

Отсюда

$$A_{0k'} = \frac{2\gamma a^2}{\mu \lambda_{k'}^{0\ 3/2} J_1(\sqrt{\lambda_{k'}^0})}.$$

Итак, решение задачи (4.33) представимо в виде

$$v_z(r, t) = \frac{\gamma}{4\mu} (a^2 - r^2) - \frac{2\gamma a^2}{\mu} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\sqrt{\lambda_k^0} r/a)}{\lambda_k^{0\ 3/2} J_1(\sqrt{\lambda_k^0})} e^{-\frac{\nu \lambda_k^0 t}{a^2}},$$

где $\lambda_k^0 - k$ -тый корень уравнения $J_0(\sqrt{\lambda^0}) = 0$. При $t \rightarrow \infty$ получаем распределение скоростей (4.19), отвечающее течению Пуазейля.

4.6. Нестационарные слоистые течения. Рассмотрим нестационарное течение вязкой жидкости, полагая, что, относительно выбранной системы координат жидкость движется в направлении оси X . В этом случае $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_z = 0$. Поскольку, в соответствии с уравнением непрерывности (3.10), $\partial v_x / \partial x = 0$, то функция v_x не зависит от переменной x . Поэтому уравнения движения принимают вид (см. (3.9)):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Так как левая часть в первом уравнении из системы (4.38) зависит только от переменных x и t , а правая – от переменных y , z и t , то уравнение разрешимо, если $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = f(t)$.

Здесь $f(t)$ - произвольная функция времени. При условии, что $f(t) = 0$, функция $v_x(y, z, t)$ удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right). \tag{4.39}$$

Если же $f(t) \neq 0$, то замена

$$v_x(y, z, t) = \tilde{v}_x(y, z, t) - \int_0^t f(t) dt$$

сводит соответствующее уравнение к уравнению (4.39), но уже относительно функции $\tilde{v}_x(y, z, t)$.

Вид частных решений уравнения (4.39) определяется видом начальных и граничных условий. Так, если эти условия не зависят от переменной y , то и решение задачи также не будет зависеть от этой переменной. Такие математические модели описывают течения из класса *одномерных нестационарных течений*.

Пусть требуется найти решение уравнения (4.39) в бесконечной области при условии, что начальная функция не зависит от переменной y . Таким образом, приходим к начальной задаче для одномерного уравнения теплопроводности на бесконечной прямой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}, \quad t > 0, \quad z \in R^1, \\ v_x(z, 0) &= F(z), \quad z \in R^1. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Частные решения уравнения (4.40) ищем в виде

$$v_x(z, t) = Z(z)T(t). \quad (4.41)$$

Подставляя (4.41) в уравнение (4.40), находим

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{Z''}{Z} = -\lambda,$$

где λ - произвольная константа. Для определения функции $Z(z)$ получаем задачу Штурма-Лиувилля на бесконечной прямой:

$$\begin{aligned} Z'' + \lambda Z &= 0, \quad z \in R^1, \\ |Z| < M, \quad M > 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

При $\lambda > 0$ задача (4.42) имеет систему ограниченных линейно независимых решений: $e^{\pm i\sqrt{\lambda}z}$, $z \in R^1$. Пусть $\lambda = k^2$, $-\infty < k < \infty$. Тогда совокупность частных решений системы (4.42) можно представить в виде

$$Z_k(z) = e^{ikz}, \quad \lambda_k = k^2, \quad z \in R^1, \quad k \in R^1.$$

Функция $T(t)$ удовлетворяет уравнению

$$T' + \nu \lambda_k T = 0,$$

общее решение которого

$$T_k(t) = Ce^{-\nu k^2 t} \quad (4.43)$$

стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, ограниченные частные решения уравнения из системы (4.40) представимы как

$$v_{xk}(z, t) = C(k)e^{-\nu k^2 t + ikz}.$$

Поскольку спектр задачи (4.42) непрерывен, то решение задачи (4.40) будем искать в виде интеграла:

$$v_x(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{-vk^2 t + ikz} dk. \quad (4.44)$$

Неизвестный коэффициент $C(k)$ определяется в соответствии с начальным условием:

$$v_x(z, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikz} dk = F(z).$$

Отсюда, используя обратное преобразование Фурье, имеем

$$C(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi.$$

Итак,

$$v_x(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right] e^{-vk^2 t + ikz} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(z, \xi, t) F(\xi) d\xi, \quad (4.45)$$

где $G(z, \xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vk^2 t + ik(z-\xi)} dk$. Определим функцию $G(z, \xi, t)$, вычислив соответствующий интеграл. Введем обозначения:

$$I(\beta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk, \quad \alpha^2 = vt > 0, \quad \beta = z - \xi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\beta} &= i \int_{-\infty}^{\infty} k e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk = -\frac{i}{2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\beta} d e^{-\alpha^2 k^2} = -\frac{i}{2\alpha^2} \left(e^{ik\beta} e^{-\alpha^2 k^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2} d e^{ik\beta} \right) = \\ &= -\frac{\beta}{2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2 + ik\beta} dk = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I(\beta). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $I(\beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dI}{d\beta} = -\frac{\beta}{2\alpha^2} I(\beta).$$

Отсюда

$$I(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

где

$$C = I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 k^2} dk = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Итак,

$$G(z, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4vt}}.$$

В соответствии с формулой (4.45) для решения задачи (4.40) получаем представление

$$v_x(z, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4vt}} F(\xi) d\xi, \quad (4.46)$$

называемое *интегралом Пуассона*.

Заметим, что интеграл Пуассона был получен в предположении непрерывности и ограниченности начальной функции $F(z)$. Однако, в приложениях нередко встречаются случаи, для которых начальная функция является кусочно непрерывной и ограниченной с конечным числом точек разрыва. Здесь формула (4.46) также применима, но решение соответствующей задачи непрерывно примыкает к начальной функции только в точках ее непрерывности, оставаясь при этом везде ограниченным при конечных t .

4.6.1. Тангенциальный разрыв. (Тема: “Задача Коши для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой.”) Пусть в начальный момент времени задано распределение скоростей, отвечающее тангенциальному разрыву в плоскости $z = 0$:

$$v_x(z, 0) = \begin{cases} v_0, & z > 0, \\ -v_0, & z < 0. \end{cases}$$

Найдем распределение скоростей при $t > 0$, пользуясь представлением (4.46). Подставляя начальное распределение в (4.46), имеем

$$v_x(z, t) = -\frac{v_0}{2\sqrt{\pi vt}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4vt}} d\xi + \frac{v_0}{2\sqrt{\pi vt}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(z-\xi)^2}{4vt}} d\xi.$$

Делая замену переменной интегрирования

$$\lambda = \frac{-z + \xi}{2\sqrt{vt}}, \quad d\lambda = \frac{d\xi}{2\sqrt{vt}},$$

$$-\infty < \xi < 0 \Rightarrow -\infty < \lambda < -\frac{z}{2\sqrt{vt}},$$

$$0 < \xi < \infty \Rightarrow -\frac{z}{2\sqrt{vt}} < \lambda < \infty,$$

приходим к следующему результату

$$\begin{aligned}
v_x(z, t) = & - \int_{-\infty}^{-\frac{z}{2\sqrt{vt}}} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda + \int_{-\frac{z}{2\sqrt{vt}}}^{\infty} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda = - \left[\int_{-\infty}^0 e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda + \right. \\
& \left. + \int_0^{-\frac{z}{2\sqrt{vt}}} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda \right] + \int_0^{\infty} e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda + \int_{-\frac{z}{2\sqrt{vt}}}^0 e^{-\lambda^2} \frac{v_0}{\sqrt{\pi}} d\lambda = v_0 \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{vt}}\right),
\end{aligned} \tag{4.47}$$

где $\Phi(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\lambda^2} d\lambda$ - функция ошибок. Так как $\Phi(\pm\infty) = \pm 1$, $\Phi(0) = 0$, то скорость в любой точке пространства изменяется по абсолютной величине от v_0 при $t = 0$ до 0 при $t \rightarrow \infty$.

Рассмотрим решение (4.47). Вычислим следующие пределы

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z > 0}} v_x(z, t) = v_0 \text{ так как } z/2\sqrt{vt} \rightarrow +\infty, \quad \Phi \rightarrow 1,$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z < 0}} v_x(z, t) = -v_0 \text{ так как } z/2\sqrt{vt} \rightarrow -\infty, \quad \Phi \rightarrow -1.$$

Более того, если рассмотреть одновременный переход при $z \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ вдоль кривой $z/2\sqrt{vt} = \alpha$, где α - произвольная величина, $-\infty < \alpha < +\infty$, то значение предела будет зависеть от вида кривой:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} v_x(z, t) = v_0 \Phi(\alpha).$$

Таким образом, решение (4.47), оставаясь везде ограниченным, при $z \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$ предела не имеет, что связано с разрывными свойствами начальной функции на плоскости $z = 0$ при $t = 0$.

4.6.2. Движение твердой поверхности. (Тема: "Начально-краевая задача Дирихле для уравнения теплопроводности на полупрямой."). Пусть неподвижная непроницаемая стенка $z = 0$, ограничивающая жидкость снизу, в момент времени $t = 0$ начинает движение с постоянной скоростью U_0 в своей плоскости. Будем считать, что направление движения совпадает с направлением оси X . Тогда

$$\begin{aligned}
v_x(z, 0) &= \begin{cases} U_0, & z = 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases} \\
v_x(0, t) &= U_0, \quad t \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

В силу симметрии задачи $v_y = v_z = 0$, $v_x = v_x(z)$, причем $v_x(z)$ удовлетворяет уравнению из системы (4.40). Однако, представлением (4.46) воспользоваться нельзя, так как исследуемая задача является начально-краевой.

Рассмотрим функцию

$$v_x(z, t) = U_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{z}{2\sqrt{vt}} \right) \right], \quad z \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (4.49)$$

Функция (4.49) удовлетворяет одномерному уравнению теплопроводности при $z > 0, \quad t > 0$. Если $z > 0, \quad t \rightarrow 0$, то $z/2\sqrt{vt} \rightarrow +\infty$. Поэтому $\Phi(z/2\sqrt{vt}) \rightarrow 1$, и

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ z > 0}} v_x(z, t) = 0.$$

Если рассмотреть одновременный переход к пределу при $z \rightarrow +0, \quad t \rightarrow 0$, например, вдоль кривой $\frac{z}{2\sqrt{vt}} = \alpha, \quad 0 \leq \alpha < \infty$, то в результате получим

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0+0 \\ t \rightarrow 0 \\ \frac{z}{2\sqrt{vt}} = \alpha}} v_x(z, t) = U_0 [1 - \Phi(\alpha)].$$

Таким образом, значение искомого предела зависит от значения α . Итак, функция (4.49) является решением уравнения (4.40) при $z > 0$ с дополнительными условиями (4.48). Это решение не имеет предела при $z \rightarrow +0, \quad t \rightarrow 0$.

Заметим, что решение задачи о движении твердой поверхности, как решение начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на полупрямой, может быть получено при помощи общего метода исследования данного класса линейных начально-краевых задач, известного под названием принципа Дюамеля [5].

4.6.3. Течение под действием касательного напряжения. (Тема: "Начально-краевая задача Неймана для уравнения теплопроводности на полупрямой"). Исследуем проблему возникновения морских течений под действием ветра постоянной силы с помощью простейшей математической модели, описывающей это явление.

Пусть жидкость, занимающая полупространство $z \leq 0$, в начальный момент времени покоится:

$$v_x(z, 0) = 0, \quad z \leq 0. \quad (4.50)$$

При $t = 0$ на свободную поверхность жидкости в направлении оси X начинает действовать постоянное касательное напряжение величины τ , которое остается постоянным в последующие моменты времени, так что $p_{zx}|_{z=0} = \tau, \quad t \geq 0$, где p_{zx} – соответствующая компонента тензора напряжений (см. (3.4)). Поскольку $v_y = v_z = 0, \quad v_x = v_x(z)$, то на границе выполняется условие

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = \tau, \quad t \geq 0. \quad (4.51)$$

Определим распределение скоростей в жидкости, течение которой описывается одномерным уравнением теплопроводности с дополнительными условиями (4.50), (4.51).

Выполним замену неизвестной функции:

$$w(z, t) = \mu \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Очевидно, что новая неизвестная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0,$$

причем

$$\begin{aligned} w(z, 0) &= 0, \quad z \leq 0, \\ w(0, t) &= \tau, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи представимо формулой (4.49) с заменой U_0 на τ , z на $-z$:

$$w(z, t) = \tau \left[1 - \Phi \left(-\frac{z}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right], \quad z \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Итак,

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial z} = \tau \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \tau \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\xi^2} d\xi + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\xi^2} d\xi \right) = \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Дифференцируя это выражение по z , находим производную $\partial^2 v_x / \partial z^2$:

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{\partial}{\partial z} \int_a^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2\tau}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{\nu t}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} - e^{-a^2} \frac{da}{dz} \right) = \frac{\tau}{\sqrt{\pi \nu t}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

в силу выполнения уравнения $\partial v_x / \partial t - \nu \partial^2 v_x / \partial z^2 = 0$. Следовательно,

$$v_x(z, t) = \int_0^t \frac{\tau}{\sqrt{\pi \mu \rho \bar{t}}} e^{-\frac{z^2}{4\nu \bar{t}}} d\bar{t},$$

где учтено, что $v_x(z, 0) = 0$. Полагая $z/2\sqrt{\nu \bar{t}} = \lambda$, находим

$$\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt = -\frac{z}{2\sqrt{\nu}} \lambda^{-2} d\lambda, \quad 0 \leq \bar{t} \leq t \Rightarrow -\infty < \lambda \leq \frac{z}{2\sqrt{\nu t}}.$$

Поэтому

$$v_x(z, t) = \frac{z\tau}{\mu\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}} e^{-\lambda^2} d\frac{1}{\lambda}.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, окончательно имеем

$$v_x(z, t) = \frac{\tau}{\mu} \left[2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} + z + z\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right], \quad z \leq 0.$$

Отсюда видим, что скорость на свободной поверхности равна

$$v_x(0, t) = \frac{2\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}.$$

При больших временах ($t \gg 1$) и фиксированных z оказываются справедливыми оценки: $\Phi(z/2\sqrt{\nu t}) \approx 0$, $\sqrt{\nu t/\pi} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} = ze^{-\lambda^2}/2\sqrt{\pi}\lambda \approx z/2\sqrt{\pi}\lambda \gg z$, где $\lambda = z/2\sqrt{\nu t} \ll 1$. Следовательно,

$$v_x(z, t) = \frac{2\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}}, \quad z \leq 0, \quad t \gg 1,$$

и, значит, жидкость стремится принять скорость свободной поверхности. Определим, за какое время скорость на фиксированной глубине z будет равна $v_x(0, t)/2$. Для этого нужно решить уравнение:

$$\frac{\tau}{\mu} \sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} = \frac{\tau}{\mu} \left[2\sqrt{\frac{\nu t}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4\nu t}} + z + z\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{\nu t}}\right) \right], \quad z < 0.$$

Если положить $z/2\sqrt{\nu t} = \lambda$, то численное решение алгебраического уравнения

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\lambda^2} + \lambda + \lambda\Phi(\lambda) \right]$$

дает значение $\lambda \approx 0.35$. Отсюда,

$$z \approx 0.7\sqrt{\nu t}.$$

В соответствии с полученной формулой на глубине в 100 м частицы воды будут двигаться со скоростью свободной поверхности только спустя 359 лет. Такое описание является примером простейшего моделирования течения жидкости в приповерхностном слое под действием ветра постоянной силы.

Методическое пособие составлено по материалам учебного пособия [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений.-М: Научный мир, 2007.

2. *М.А. Давыдрва.* Лекции по гидродинамике. М.: Наука. Физматлит . (Принято к печати).
3. *Б.М. Будаков, С.В. Фомин.* Кратные интегралы и ряды. М.: Наука. Физматлит, 2002.
4. *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Гидродинамика. М.: Наука. Физматлит, 2001.
5. *А. Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов.* Лекции по математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1993.
6. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Часть 1, 2. М.: ФМГИЗ, 1963.
7. *Г. Ламб.* Гидродинамика. М.: Ижевск: РХД., 2003.
8. *Л. Г. Лойцянский.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1970.
9. *В.Я. Шкадов, З.Д. Запрянов.* Течения вязкой жидкости. – М.: Изд-во МГУ, 1984.