

Вопросы к коллоквиуму по курсу “Методы математической физики” (2012-первый поток).

В билете 5 вопросов, по одному из каждого раздела. Разделы отделены чертой.

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0, x \in (a, b)$ , где  $k(x) = (x - a)\varphi(x), \varphi(a) \neq 0$ , в особых точках. Как она доказывается?
2. Напишите уравнение Бесселя, его фундаментальные системы решений. Дайте определение функций, входящих в эти системы решений, приведите графики функций.
3. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуполого порядка можно выразить через элементарные функции?
4. Дайте определение функций Ханкеля и Неймана. Напишите интегральное представление для функции Бесселя и функций Ханкеля первого и второго рода. Как связаны между собой эти функции? Приведите график функции Неймана нулевого порядка. Могут ли функции Ханкеля иметь вещественные нули?
5. Напишите асимптотические формулы при больших и малых значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Каким образом получают эти формулы?
6. Поставьте задачу на собственные значения для оператора Бесселя. Напишите общую формулу для квадрата нормы собственной функции.
7. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Приведите фундаментальную систему решений этого уравнения. Дайте определение функции Инфельда и Макдональда, приведите их графики. Укажите поведение этих функций при больших и малых значениях аргумента.
8. Какие из цилиндрических функций образуют пары линейно-независимых решений уравнения Бесселя? Напишите выражения для определителя Вронского для функций Бесселя положительного и отрицательного порядков, для функций Бесселя и Неймана, для функций Бесселя и Ханкеля.

---

9. Дайте определение классических ортогональных полиномов. Напишите уравнение которому удовлетворяют эти функции. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов. Образуют ли производные КОП систему КОП, если да, то с каким весом? Откуда это следует?
10. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках. Напишите формулу для собственных значений этой задачи. Как получают эту формулу?
11. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (формулу Родрига). Как она выводится? Приведите формулу Родрига для полиномов Лежандра. С ее помощью постройте  $P_0$  и  $P_1$ .
12. Дайте определение полиномов Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений этой задачи и выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра. Как получают эти выражения?
13. Дайте определение полиномов Лагерра и полиномов Эрмита. Сформулируйте задачи, решениями которой они являются. Приведите формулу Родрига. Напишите выражения для квадрата нормы.
14. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов. Напишите для нее общую формулу. Как она получается? Напишите

выражение производящей функции полиномов Лежандра, Лагерра и Эрмита. Как получают это выражение?

-----

15. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра и выражение для квадрата нормы.
16. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для этих функций. Напишите условие ортогональности для сферических функций. Приведите выражение квадрата нормы. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости в ряд по сферическим функциям. Дайте определение шаровых функций.
17. Дайте определение полиномов Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений этой задачи и выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра. Как получают эти выражения?

-----

18. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных? Приведите уравнения характеристик и объясните, откуда они следуют для случая гиперболического, параболического и эллиптического уравнений.
19. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае многих переменных. Напишите для них канонические формы. Приведите пример уравнения смешанного типа.
20. Дайте определения уравнений эллиптического, нормального гиперболического, ультрагиперболического и параболического типов в случае многих переменных. Напишите для них канонические формы. В каком случае можно привести уравнение к канонической форме в подобласти, где уравнение принадлежит к одному типу.

-----

21. Напишите уравнение малых продольных колебаний упругого стержня. Каким образом оно выводится? Какие делаются допущения при выводе уравнения? Что такое лагранжевые и эйлеровые координаты? В каких координатах написано уравнение колебаний стержня? К какому типу принадлежит уравнение колебаний?
22. Напишите уравнение теплопроводности. Каким образом оно выводится? Какие физические законы используются при выводе уравнения теплопроводности и получения граничного условия? К какому типу принадлежит уравнение теплопроводности?
23. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения гиперболического типа. Дайте определение классического решения этой задачи. Напишите условие согласования начальных и граничного условий. Какие предельные случаи поставленной задачи Вы знаете?
24. Поставьте начально-краевую задачу для уравнения параболического типа. Дайте определение классического решения этой задачи. Напишите условие согласования начального и граничного условий. Какие предельные случаи поставленной задачи Вы знаете?
25. Поставьте краевую задачу для уравнения эллиптического типа. Дайте определение классического решения этой задачи. Приведите примеры физических задач, приводящих к уравнениям эллиптического типа.