Лекция 5

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА.

§ 1. Определение топологического пространства

Определение 1. *Произвольное множество X с выделенной системой подмножеств τ множества X называется топологическим пространством (X, τ), если выполнены следующие свойства:*

(i) $X,\ \varnothing \in \tau$;

(ii) *произвольное объединение множеств из τ есть множество из τ;*

(iii) *конечное пересечение множеств из τ есть множество из τ,*

при этом система подмножеств τ называется топологией.

Пример 1. Рассмотрим произвольное множество X и топологию $\tau = \{X, \varnothing\}$. Это топологическое пространство, которое называется антидискретным или слипшимся.

Пример 2. Рассмотрим множество X и топологию $\tau = 2^X$, т.е. τ состоит из всех подмножеств множества X. Это топологическое пространство называется дискретным, поскольку топологии τ принадлежат все одноточечные множества $\{x\}$ при $x \in X$.

Пример 3. В силу теоремы о топологии метрического пространства (X, d), топология этого пространства порождена всеми открытыми множествами метрического пространства.

Замечание. Заметим, что в силу той же теоремы о топологии замкнутые множества метрического пространства и вообще любого заданного топологического пространства (X, τ), в качестве топологического пространства можно взять само множества X с системой замкнутых множеств $\tau^{'} = X \backslash \tau$, но при этом определение топологического пространства измениться:

Определение 2. *Произвольное множество X с выделенной системой подмножеств $\tau^{'}$ множества X называется топологическим пространством $(X, \tau^{'})$, если выполнены следующие свойства:*

$(\mathrm{i})_1$ $X,\ \varnothing \in \tau^{'}$;

$(\mathrm{ii})_1$ *конечное объединение множеств из $\tau^{'}$ есть множество из $\tau^{'}$;*

$(\mathrm{iii})_1$ *произвольное пересечение множеств из $\tau^{'}$ есть множество из $\tau^{'}$,*

при этом система подмножеств $\tau^{'}$ называется топологией.

При этом хоть по смыслу множества из τ' замкнутые (как дополнительные к открытым) их тоже можно **определить** как открытые, тогда все теоремы остаются в силе. Например, теорема об открытом отображении остается в силе, поскольку в силу дополнительности прообраз при непрерывном отображении всякого замкнутого множества является замкнутым множеством.

Определение 2. *Окрестностью точки $x \in X$ топологического пространства (X, τ) называется произвольное множество $U \in \tau$, что $x \in U$.*

Замечание. Ясно, что по определению окрестность — это открытое множество.

§ 2. Фундаментальная Система Окрестностей

Заметим, что задавать всю систему множеств τ довольно трудно на практике, поэтому вводят понятие Фундаментальной Системы Окрестностей (ФСО). С этой целью обозначим через τ_x — все множества из топологии τ, содержащие точку x.

Определение 3. *Локальной базой топологии в точке $x \in X$ называется семейство множеств $\nu_x \subset \tau_x$ такое, что для всякого $U \in \tau_x$ найдется такое $V \in \nu_x$, что $V \subset U$.*

Замечание. Заметим, что по смыслу локальная база топологии ν_x в каждой точке может заменить исходную топологию τ_x в этой точке, поскольку для целей последующих рассмотрений нам нужна не топология как таковая а система окрестностей точки, обладающей определенными свойствами, которые и указаны в определении топологического пространства. Однако, при этом система множеств ν может уже и не обладать указанными свойствами в определении топологии и поэтому саму систему ν нельзя взять в качестве новой топологии.

Действительно, ни откуда не следует, что объединение двух множеств U_x, V_x из ν_x есть множество из ν_x, а можно лишь утверждать, что найдется третье множество W_x из ν_x такое, что

$$W_x \subset U_x \cup V_x.$$

Если же мы можем выделить систему, обладающей этим свойством, то мы приходим к новому понятию *базы топологии*.

Пример 4. Отметим, что в качестве локальной базы точки x метрического пространства (X, d) можно взять шары

$$O_n\left(x, \frac{1}{n}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

П р и м е р 5. А в качестве локальной базы метрического пространства (X, δ) с дискретной метрикой

$$\delta(x,y)=\begin{cases}1, & \text{при } x=y\,;\\ 0, & \text{при } x\neq y\end{cases}$$

в качестве локальной базы можно взять одноточечное множество $\{x\}$.

Теперь мы фиксируем локальную базу окрестностей ν_x в каждой точке x топологического пространства (X, τ). Справедливо представление для этого семейства множеств

$$\nu_x = \{V_{x,\alpha} :\ \alpha \in A_x\}\,, \quad V_{x,\alpha} \in \tau_x \subset \tau, \tag{2.1}$$

где A_x — это для каждого $x \in X$ семейство индексов, нумерующее семейство множеств ν_x.

З а м е ч а н и е. Отметим, что, вообще говоря, это множество индексов A_x в каждой точке $x \in X$ может быть несчетным ножеством, например, множеством мощности континуум. Как мы уже выяснили в примере 4 в случае метрического пространства множество индексов счетно.

С этим, как мы покажем далее, связана неэквивалентность понятий непрерывности по Коши и непрерывности по Хайне, поскольку при доказательстве соответствующей теоремы в предыдущей лекции мы **существенно** пользовались тем, что множество индексов счетно.

С другой стороны, можно ввести определение, обобщающее определение непрерывности по Хайне, когда вместо последовательности точек топологического пространства нужно ввести понятие направленности.

Попросту направленность определяется также как и последовательность. Например, сходящаяся к точке x последовательность $\{x_n\} \subset X$ в метрическом пространстве (X, d) определялась как произвольные точки из локальной базы топологии в точке x

$$x_n \in O_n(x, 1/n) \backslash \{x\} \Rightarrow x_n \xrightarrow{d} x.$$

Теперь в случае произвольной базы топологии ν_x в точке $x \in X$ направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A_x}$ сходящаяся к этой точке выбирается так

$$\text{пусть}\quad x_\alpha \in V_{x,\alpha} - \text{произвольная точка}.$$

Далее в точке x_α рассмотрим снова локальную базу топологии $\nu_{x_\alpha} = \{V_{x_\alpha,\alpha_1}\} \subset \tau_x$ и следующую точку x_{α_1} выбираем из пересечения

$$x_{\alpha_1} \in V_{x,\alpha} \cap V_{x_\alpha,\alpha_1} \in \tau,$$

поскольку по определение локальной базы топологии $V_{x,\alpha}, V_{x_\alpha,\alpha_1} \in \tau$. Теперь рассмотрим локальную базу топологии $\nu_{x_{\alpha_1}} = \{V_{x_{\alpha_1},\alpha_2}\}$ в точке x_{α_1} и рассмотрим произвольную точку из пересечения

$$x_{\alpha_2} \in V_{x,\alpha} \cap V_{x_\alpha,\alpha_1} \cap V_{x_{\alpha_1},\alpha_2} \in \tau$$

и так далее. В результате мы и получаем некоторое обобщение последовательности сходящейся к точке.

Таким образом, в каждой точке $x \in X$ локальная база топологии определяет новую систему окрестностей. Дадим определение ФСО.

Определение 4. *Фундаментальной Системой Окрестностей (ФСО) называется семейство множеств*

$$\nu = \{V_{x,\alpha} : \ x \in X, \ \alpha \in A_x\}. \tag{2.2}$$

Справедливы следующие свойства ФСО:

Теорема 1. *Семейство множеств $\nu = \{V_{x,\alpha} : \ x \in X, \ \alpha \in A_x\}$ является ФСО для некоторой единственной топологии τ, тогда и только тогда, когда выполнены следующие свойства*

(i)$_2$ *для любой точки $x \in X$ множество $\nu_x \neq \varnothing$ и для каждого $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ имеем $x \in V_{x,\alpha}$;*

(ii)$_2$ *для каждых $V_{x,\alpha_1}, V_{x,\alpha_2} \in \nu_x$ найдется такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что*

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2};$$

(iii)$_2$ *для любого $x \in X$ и каждого $V_{x,\alpha} \in \nu_x$ и для любого $y \in V_{x,\alpha}$ найдется $V_{y,\beta} \in \nu_y$, что $V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}$.*

Доказательство.

Итак, пусть семейство ν является ФСО для некоторой топологии τ. Докажем, что выполнены свойства (i)$_1$ – (iii)$_1$.

□ Действительно,

1.Тогда свойство (i)$_2$ выполнено по определению.

2. Свойство (ii)$_2$ выполнено поскольку множество $V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \in \tau_x$ и следовательно по определению ν_x найдется такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2}.$$

3. Докажем, что имеет место свойство (iii)$_2$. Пусть $x \in X$ и $V_{x,\alpha} \in$ $\in \nu_x$. Тогда поскольку

$$\nu_x \subset \tau_x \subset \tau,$$

то в силу свойства (i)$_1$ для каждого

$$y \in V_{x,\alpha} \subset \tau$$

найдется такое

$$V_{y,\beta} \in \nu_y \Rightarrow V_{y,\beta} \subset V_{x,\alpha}.$$

Таким образом, семейство ν — ФСО. ⊠

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть задано семейство множеств ν вида (2.2), удовлетворяющая свойствам (i)$_1$ – (iii)$_1$. Докажем, что ν_x порождает единственную топологию пространства X, для которой в свою очередь ν является ФСО.

Определим топологию τ как такое семейство множеств $\{U\} = \tau$, что для каждого $x \in U$ найдется такое множество

$$V_{x,\alpha} \in \nu_x \Rightarrow V_{x,\alpha} \subset U.$$

З а м е ч а н и е. Таким образом, семейство множеств τ определяется в обратную сторону по семейству ν, исходя из определения локальной базы топологии.

Понятно, что X и $\varnothing$ принадлежат топологии τ.

Проверим свойства топологии τ.

1. *Объединение любого числа множеств из топологии τ есть множество из топологии τ.*

□ Пусть

$$U_\alpha \in \tau,\ \alpha \in A \quad \text{и} \quad B = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Тогда для каждого $x \in B$ найдется такое $\alpha_0 \in A$, что $x \in U_{\alpha_0}$ и, следовательно, по определению семейства множеств τ найдется такое $V_{x,\alpha_0} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_0} \in U_{\alpha_0} \subset B \Rightarrow B \in \tau.\boxtimes$$

2. *Пересечение двух множеств из τ есть множество из τ.*

□ Действительно, Пусть $U_1, U_2 \in \tau$ и $x \in U_1 \cap U_2$. Тогда найдутся такие V_{x,α_1} и V_{x,α_2} из ν_x, что

$$V_{x,\alpha_1} \subset U_1 \quad \text{и} \quad V_{x,\alpha_2} \subset U_2.$$

Тогда по свойству $(\mathrm{ii})_1$ найдется такое $V_{x,\alpha_3} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha_3} \subset V_{x,\alpha_1} \cap V_{x,\alpha_2} \subset U_1 \cap U_2.$$

Стало быть,

$$U_1 \cap U_2 \in \tau.$$

Таким образом, семейство множеств τ — это топология. Однако, вообще говоря, не очевидно, что семейство множеств ν является ФСО для этой построенной топологии τ.

Теперь наша задача доказать, что ν — это ФСО для данной топологии τ и единственность так введенной топологии.

1. *ФСО* В силу свойства $(\mathrm{iii})_1$ для каждого $U_x \in \nu_x$ и для любой точки $y \in U_x$ найдется такое $V_{y,x} \in \nu_y$, что $V_{y,x} \subset U_x$ и, следовательно, $U_x \in \tau_x \subset \tau$.

2. Теперь наша задача доказать единственность так введенной топологии τ.

Итак, пусть существуют две топологии τ и τ', причем $\nu \in \tau$ и $\nu \in \tau'$. Пусть $U \in \tau$, тогда для всякой точки $x \in U$ найдется такое $V_{x,\alpha(x)} \in \nu_x$, что

$$V_{x,\alpha(x)} \subset U,$$

но тогда
$$U = \bigcup_{x\in U}\{x\} \subset \bigcup_{x\in U} V_{x,\alpha(x)} \subset U.$$
Значит,
$$U = \bigcup_{x\in U} V_{x,\alpha(x)} \subset \tau^{'},$$
поскольку $V_{x,\alpha(x)} \in \nu \subset \tau^{'}$.

Итак, $U \in \tau^{'}$. Аналогично в обратную сторону. Следовательно, $\tau = \tau^{'}$.

Теорема доказана.

Пример 6. Рассмотрим множество $\mathbb{C}(X)$ — линейное пространство непрерывных функций на не пустом множестве X. Введем топологию равномерной сходимости τ, порожденную согласно теоремы о ФСО, следующей системой окрестностей
$$V_{x,\varepsilon} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t\in X} |x(t) - y(t)| < \varepsilon \right\}.$$
Соответствующая топология τ называется топологией равномерной сходимости.

$\square$ Действительно, проверим свойства $(\mathrm{i})_2 - (\mathrm{iii})_2$.

1. $x(t) \in V_{x,\varepsilon} \neq \varnothing$, то $\nu_x \neq \varnothing$.

2. Пусть заданы V_{x,ε_1} и V_{x,ε_2}, тогда при $\varepsilon_3 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ имеем, очевидно,
$$V_{x,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_1}, \quad V_{x,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_2} \Rightarrow V_{x,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_1} \cap V_{x,\varepsilon_2}.$$

3. Пусть $y(t) \in V_{x,\varepsilon_1}$. Пусть $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ и
$$V_{x,\varepsilon_1} = \left\{ y(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t\in X} |y(t) - x(t)| < \varepsilon_1 \right\},$$
$$\sup_{t\in X} |y(t) - x(t)| = \varepsilon_2 < \varepsilon_1,$$
$$V_{y,\varepsilon_3} = \left\{ z(t) \in \mathbb{C}(X) : \sup_{t\in X} |z(t) - y(t)| < \varepsilon_3 \right\}, \quad \varepsilon_3 + \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$
Докажем, что $V_{y,\varepsilon_3} \subset V_{x,\varepsilon_1}$. Справедлива следующая цепочка неравенств:
$$\sup_{t\in X} |z(t) - x(t)| \leqslant \sup_{t\in X} |z(t) - y(t)| + \sup_{t\in X} |y(t) - x(t)| < \varepsilon_3 + \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$
для всех $z(t) \in V_{y,\varepsilon_3}$. $\boxtimes$

Таким образом, согласно теореме 1 семейство множеств ν_x, состоящее из указанных окрестностей, порождает некоторую топологию τ, для которой это семейство множеств является ФСО.

Пример 7. Рассмотрим тоже множество $\mathbb{C}(X)$. Пусть
$$\{t_i\}_{i=1}^{n} \subset X,$$

тогда определим ФСО, состоящим из следующих окрестностей

$$V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} = \left\{y(t) \in \mathbb{C}(X) : |y(t_i) - x(t_i)| < \varepsilon,\ i = \overline{1,n}\right\}.$$

Точно также, как и ранее, проверяется, что построенное семейство окрестностей удовлетворяет условиям теоремы 1 и порождает некоторую топологию, для которой является ФСО.

Соответствующая топология τ_p называется топологией поточечной сходимости. Пространство $\mathbb{C}(X)$, наделенное такой топологией обозначается как $\mathbb{C}_p(X)$.

Поскольку каждый набор точек $\{t_i\}_{i=1}^n \subset X$, то при фиксированном $x(t) \in \mathbb{C}(X)$ имеет место неравенство

$$\sup_{t \in \{t_i\}_{i=1}^n} |y(t_i) - x(t_i)| \leqslant \sup_{t \in X} |y(t) - x(t)|.$$

Поэтому из условия $y(t) \in V_{x,\varepsilon}$ вытекает, что $y(t) \in V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$. Следовательно, $V_{x,\varepsilon} \subset V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$. Ясно, что окрестностей $V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$ больше, чем окрестностей $V_{x,\varepsilon}$.

Возникает вопрос о том, как связаны эти две топологии, поскольку это два семейства множеств на одном и том же множестве $\mathbb{C}(X)$.

Согласно определению топологии, порожденной ФСО имеют место следующие свойства:

$$U \in \tau_p, \quad \text{если} \quad \forall\, x \in U \quad \text{найдется} \quad V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} \in \nu_{px}, \quad V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon} \subset U;$$

$$U \in \tau, \quad \text{если} \quad \forall\, x \in U \quad \text{найдется} \quad V_{x,\varepsilon} \in \nu_x, \quad V_{x,\varepsilon} \subset U.$$

Поскольку как мы уже доказали $V_{x,\varepsilon} \subset V_{x,t_1,\ldots,t_n,\varepsilon}$. Поэтому, если $U \in \tau_p$, то $U \in \tau$. Таким образом, имеет место вложение $\tau_p \subset \tau$.

§ 3. Сравнение топологий и метризуемые топологические пространства.

Когда на одном и том же множестве X заданы две топологии τ_1 и τ_2 возникает вопрос о том, как они соотносятся.

О п р е д е л е н и е 5. *Пишем $\tau_1 \geqslant \tau_2$, если имеет место множественное вложение $\tau_2 \subset \tau_1$. При этом говорят, что топология τ_1 сильнее топологии τ_2, а топология τ_2 слабее топологии τ_1. Если эти топологии*

$$\tau_1 \not\subset \tau_2 \quad \text{и} \quad \tau_2 \not\subset \tau_1,$$

то говорят, что топологии несравнимы. Если же имеет место строгое вложение

$$\tau_2 \subset \tau_1,$$

то говорят, что топология τ_1 существенно сильнее, а топология τ_2 существенно слабее.

Определение 6. *Топологическое пространство* (X, τ) *называется метризуемым, если существует такая метрика* d*, что ФСО, определенное этой метрикой, состоящее из окрестностей*

$$\nu = \{\nu_x,\ x \in X\}\,, \quad \nu_x = \{V_{x,\varepsilon} = (y \in X:\ d(x,y) < \varepsilon)\,, \quad \varepsilon > 0\}\,.$$

порождает топологию τ.

Замечание. В качестве ФСО метрического пространства можно взять такую систему окрестностей, что локально в каждой точке $x \in X$ ФСО состоит из окрестностей

$$V_{x,n} = \left\{ y \in X:\ d(x,y) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Справедливо следующее очевидное утверждение:
Лемма 1. *Для того чтобы топологическое пространство* (X, τ) *было метризуемым, необходимо, чтобы локальная база топологии в каждой точке порождалась счетным семейством окрестностей.*

Доказательство.

Необходимость очевидна.

Лемма доказана.

§ 4. База топологии и относительная топология

Несмотря на относительную простоту ФСО на практике для произвольного топологического пространства задать ФСО все таки довольно сложно. Поэтому приходим к необходимости задавать так называемую *базу топологии*.

Определение 7. *Базой* $\mathfrak{B}$ *топологии* τ *называется такая система множеств, что*

$$\mathfrak{B} \subset \tau,$$

причем для каждого $U \in \tau$ *найдется такая система множеств*

$$\{V_\alpha:\ \alpha \in A\} \subset \mathfrak{B}, \quad \textit{что} \quad U = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha.$$

Определение 8. *Топологическое пространство* (X, τ) *удовлетворяет первой аксиоме счетности, если в каждой точке существует конечная или счетная локальная база. Топологическое пространство* (X, τ) *удовлетворяет второй аксиоме счетности, если существует конечная или счетная база.*

Пример 8. Метризуемое топологическое пространство (X, τ) является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности. А пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, является пространством, удовлетворяющим первой аксиоме счетности.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а $A \subset X$ — это некоторое подмножество. Рассмотрим топологию на A, определенную следующим образом:

$$\tau_A = \{V \cap A : V \in \tau\}.$$

Такое множество A вместе с введенной топологией τ_A является топологическим пространством

$$(A, \tau_A) \subset (X, \tau).$$

§ 5. Точки прикосновения и замыкание множества

Напомним, как мы определяли замкнутое множество в случае метрического пространства (X, d).

Определение 9. *Замкнутое множество — дополнение открытого.*

Дадим определение операции замыкания множества.

Определение 10. *Замыканием $\overline{A}$ множества A называется*

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} \overline{U}_\alpha,$$

где пересечение берется по всем замкнутым множествам $\overline{U}_\alpha \supset A$.

Дадим определение точки прикосновения.

Определение 11. *Точкой x прикосновения множества A называется такая точка, что для любого $U \in \tau_x$ имеем $U \cap A \neq \varnothing$.*

Справедливо следующее важное утверждение:

Лемма 1. *Операция замыкания и операция добавления всех точек прикосновения совпадают.*

Доказательство.

1. Докажем, что замыкание $\overline{A}$ содержит все точки прикосновения множества A.

$\square$ Пусть x — точка прикосновения множества A. Тогда для любого $U_x \in \tau_x$

$$U_x \cap A \neq \varnothing.$$

С другой стороны,

$$\overline{A} = \bigcap_{\alpha} \overline{U}_\alpha, \quad A \subset \overline{U}_\alpha.$$

Предположим, что $x \notin \overline{A}$, тогда найдется такое замкнутое множество $\overline{U}_\alpha \supset A$, что $X \backslash \overline{U}_\alpha$ — открыто и $x \in X \backslash \overline{U}_\alpha$. Значит найдется такое открытое $U_x \in X \backslash \overline{U}_\alpha$, причем $A \notin X \backslash \overline{U}_\alpha$. Следовательно, $A \cap U_x = \varnothing$. Противоречие. $\boxtimes$

2. $\square$ Пусть теперь

$$x \in \overline{A} = \bigcap_{\alpha} \overline{U}_\alpha, \quad A \subset \overline{U}_\alpha,$$

но существует така окрестность точки $x \in U_x \in \tau_x$, что $U_x \cap A = \varnothing$. С другой стороны,

$$A \subset X \backslash U_x - \text{замкнутое множество} \Rightarrow x \in \overline{A} \subset X \backslash U_x \quad \text{и} \quad x \in U_x.$$

Противоречие. $\boxtimes$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Справедливы следующие свойства:*

(i)$_2$ $A \subset \overline{A}$; *если* $A \subset B$, *то* $\overline{A} \subset \overline{B}$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

(ii)$_2$

$$\overline{\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma, \quad \overline{\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right)} \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A}_\gamma.$$

(iii)$_2$

$$\overline{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i$$

Доказательство.

Первые два свойства в (i)$_2$ очевидны.

Рассмотрим последнее утверждение в (i)$_2$.

$\square$ Действительно, $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$. Докажем обратное включение. Итак, пусть $x \in \overline{\overline{A}}$, тогда

$$\overline{A} \cap V_x \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad V_x \in \tau_x.$$

Фиксируем некоторую точку $y \in \overline{A} \cap V_x$, тогда $y \in \overline{A}$ и $V_x \in \tau_y$. Следовательно,

$$A \cap V_x \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad V_x \in \tau_x \Rightarrow x \in \overline{A}. \boxtimes$$

Докажем теперь первое свойство в (ii)$_2$.

$$A_\gamma \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \Rightarrow \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \Rightarrow \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma} \subset \overline{\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma}.$$

Докажем теперь второе свойство в (ii)$_2$.

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subset A_\gamma \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \subset \overline{A_\gamma} \Rightarrow \overline{\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma} \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \overline{A_\gamma}.$$

Докажем свойство (iii)$_2$.

$\square$ Действительно, в силу первого свойства (ii)$_2$ имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Докажем обратное вложение. Пусть

$$x \in \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.$$

Предположим, что $x \notin \overline{A}_i$ для всех $i = \overline{1,n}$. Значит, найдутся такие $V_{xi} \in \tau_x$, что

$$V_{xi} \cap A_i = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1,n}.$$

Пусть

$$V_x = \bigcap_{i=1}^{n} V_{xi} \in \tau_x,$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap V_x = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap V_x \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap V_{xi} = \varnothing.$$

Значит,

$$x \notin \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}.\boxtimes$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

З а м е ч а н и е. Отметим, что в $(\mathrm{ii})_2$ нельзя заменить вложения на равенства множеств. Действительно,

$$\overline{\left(\bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x\right)} = \mathbb{R}, \quad \text{но} \quad \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} \overline{x} = \bigcup_{x\in\mathbb{Q}} x = \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

Кроме того,

$$\overline{\mathbb{Q} \cap \mathbb{J}} = \overline{\varnothing} = \varnothing, \quad \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{J}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

§ 6. Замкнутые множества и замыкание множества

Как дополнения открытых замкнутые множества обладают следующими свойствами:

Т е о р е м а 3. *Замкнутые множества обладают следующими свойствами:*

$(\mathrm{i})_3$ *$\varnothing$ и X являются замкнутыми множествами;*

$(\mathrm{ii})_3$ *пересечение любого числа замкнутых множеств является замкнутым множеством;*

$(\mathrm{iii})_3$ *объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством.*

Обозначим семейство всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) через φ.

Т е о р е м а 4. *Пусть $A \subset X$. Тогда $\overline{A}$ — замкнутое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть $x \in X \backslash \overline{A}$. Значит,

$$x \notin \overline{A} = \overline{\overline{A}}.$$

Следовательно, найдется такое $V_x \in \tau_x$, что

$$V_x \cap \overline{A} = \varnothing \Rightarrow V_x \subset X \backslash \overline{A}.$$

Следовательно,

$$X \backslash \overline{A} = \bigcup_{x \in X \backslash \overline{A}} V_x \in \tau.$$

Значит, $\overline{A}$ — замкнутое множество.

Теорема доказана.

§ 7. Внутренние точки множества

Определение 11. *Внутренней точкой x множества $A \subset X$ называется такая точка, что существует $U \in \tau_x$ и*

$$U \subset A.$$

Определение 12. *Внутренностью* $\operatorname{int} A$ *множества $A \subset X$ называется совокупность всех внутренних точек множества A.*

Справедливы следующие свойства *внутренности* множеств.

Теорема 5. *Имеет место следующее равенство:*

$$\operatorname{int} A = X \backslash \left(\overline{X \backslash A}\right).$$

Доказательство.

Для любой точки $x \in A$ реализуется одна из возможностей: существует $U_x \in \tau_x$, что $U_x \subset \operatorname{int} A$, либо всякая окрестность $U_x \in \tau_x$ не содержится целиком в $\operatorname{int} A$. Значит, в последнем случае

$$U_x \cap (X \backslash A) \neq \varnothing \quad \text{для всех} \quad U_x \in \tau_x,$$

но тогда

$$x \in \overline{X \backslash A} \Rightarrow X = \operatorname{int} A \cup \overline{X \backslash A}.$$

Теорема доказана.

Справедливы следующие свойства внутренностей множеств.

Теорема 6. $(\mathrm{i})_2$

$$\operatorname{int} A \subset A, \quad A \subset B \Rightarrow \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B, \quad \operatorname{int}\operatorname{int} A = \operatorname{int} A;$$

$(\mathrm{ii})_2$

$$\operatorname{int}\left(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \supset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma, \quad \operatorname{int}\left(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma\right) \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \operatorname{int} A_\gamma.$$

(iii)$_2$

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{int} A_i$$

Доказательство.

Доказательство основано на том, что $\operatorname{int} A$ — это открытое множество, тогда дополнение является замкнутым множеством, т. е. замыканием множества

$$X \setminus \operatorname{int} A.$$

Далее из результатов, доказанных для замыканий множеств, переходом к дополнениям получим все утверждения теоремы.

Теорема доказана.

§ 8. Граница множества

Определение 13. *Точка $x \in X$ называется граничной точкой множества A, если для любого $U \in \tau_x$ имеем*

$$A \cap U \neq \varnothing, \quad (X \setminus A) \cap U \neq \varnothing.$$

При этом множество всех граничных точек множества A обозначается как

$$\partial A.$$

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Справедливо следующее представление*

$$A = \operatorname{int} A \cup \partial A, \quad \operatorname{int} A \cap \partial A = \varnothing,$$

причем ∂A — это замкнутое множество.

Доказательство.

Пусть $x \in A$, тогда

$$x \in \operatorname{int} A \quad \text{либо} \quad x \in X \setminus \operatorname{int} A.$$

Причем $\operatorname{int} A$ — открытое, а $X \setminus \operatorname{int} A$ — замкнутое множества. Следовательно, либо $x \in \operatorname{int} A$ либо $x \in X \setminus \operatorname{int} A$ и в последнем случае имеют место следующие свойства:

1. для всех $U_x \in \tau_x$ имеем $U_x \cap A \neq \varnothing$ (поскольку $x \in A$);
2. для всех $U_x \in \tau_x$ имеем $U_x \cap (X \setminus \operatorname{int} A) \neq \varnothing$.

В силу свойства 2 имеем $U_x \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.

□ Действительно, в противном случае

$$U_x \subset A \Rightarrow U_x \subset \operatorname{int} A \Rightarrow x \in \operatorname{int} A$$

Пришли к противоречию. ⊠

Значит, $x \in \partial A$.

Лемма доказана.

§ 9. Всюду плотные множества

Определение 14. *Множество $A \subset X$ называется всюду плотным, если*

$$\overline{A} = X.$$

Определение 15. *Множество $A \subset X$ называется нигде не плотным, если*

$$\operatorname{int} \overline{A} = \varnothing.$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 7. *Для того чтобы множество $A \subset X$ было нигде не плотным, необходимо и достаточно, чтобы для любого непустого множества $U \in \tau$ нашлось непустое подмножество $V \subset U$ и $V \in \tau$ что*

$$A \cap V = \varnothing.$$

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть $A \subset X$ и нигде не плотно и $U \in \tau$ — непустое множество. Пусть

$$V = U \backslash \overline{A},$$

тогда

$$\text{либо} \quad V = \varnothing \quad \text{либо} \quad V \subset U \quad \text{и} \quad V \cap \overline{A} = \varnothing.$$

1. Докажем, что $V \in \tau$. Действительно, справедливо следующее представление:

$$V = U \backslash \overline{A} = U \cap (X \backslash \overline{A}),$$

но $U \in \tau$, $\overline{A}$ — замкнуто и тогда $X \backslash \overline{A}$ — открыто. Стало быть, V — открыто.

2. Теперь поскольку $\operatorname{int} \overline{A} = \varnothing$, то $U \not\subset \overline{A}$, значит,

$$V = U \backslash \overline{A} \neq \varnothing.$$

Причем по построению $V \cap A = \varnothing$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть выполнено достаточное условие теоремы. Предположим, что при этом

$$\operatorname{int} \overline{A} \neq \varnothing,$$

тогда

$$\exists\, U = \operatorname{int} \overline{A}, \quad \forall\, V \subset U \subset \overline{A}, \quad V \in \tau$$

имеем

$$A \cap V \neq \varnothing,$$

поскольку $\overline{A}$ содержит все свои точки прикосновения. Противоречие.

Теорема доказана.

Лемма 3. *Множество $A \subset X$ нигде не плотно, тогда и только тогда, когда множество $X \backslash \overline{A}$ всюду плотно.*

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть A нигде не плотно и $x \in X$. Докажем, что $x \in \overline{X \backslash \overline{A}}$. Надо доказать, что для всех $U_x \in \tau_x$

$$U_x \cap \big(X \backslash \overline{A}\big) \neq \varnothing.$$

Предположим противное, тогда найдется такое $U_x \neq \varnothing$, что

$$U_x \cap \big(X \backslash \overline{A}\big) = \varnothing \Rightarrow U_x \subset \operatorname{int} \overline{A} = \varnothing.$$

Противоречие. Значит, x — точка прикосновения множества $X \backslash \overline{A}$.

Шаг 2. Достаточность. Пусть $X \backslash \overline{A}$ всюду плотно в X. Докажем, что $\operatorname{int} \overline{A} = \varnothing$. Пусть нет и найдется $U \in \tau$ такое, что $U \subset \operatorname{int} \overline{A} \subset \overline{A}$, но тогда

$$U \not\subset X \backslash \overline{A}.$$

С другой стороны, согласно определению всюду плотного множества все точки X являются точками прикосновения для множества $X \backslash \overline{A}$ для всякого $U \in \tau$ должно быть

$$U \cap X \backslash \overline{A} \neq \varnothing.$$

Теорема доказана.

§ 10. Непрерывные отображения

Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — это два топологических пространства и f это отображение множества X_1 во множество X_2.

Дадим определение непрерывности по Коши отображения.

Определение 16. *Отображение*

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) называется непрерывным по Коши в точке $x \in X_1$, если для всякой окрестности U_2 точки $f(x) \in U_2$ найдется такая окрестность U_1 точки $x \in U_1$, что имеет место вложение $f(U_1) \subset U_2$.

Напомним определение непрерывности по Хайне отображения двух метрических пространств (Y_1, d_1) и (Y_2, d_2).

Определение 17. *Функция*

$$f(y) : (Y_1, d_1) \to (Y_2, d_2)$$

называется непрерывной по Хайне в точке $y_0 \in Y_1$, если для произвольной последовательности $\{y_n\} \subset Y_1$, сходящейся в метрическом пространстве (Y_1, d_1), соответствующая последовательность $\{f(y_n)\} \subset Y_2$ является сходящейся в метрическом пространстве (Y_2, d_2).

Однако, если ввести понятие сходящейся последовательности в топологическом пространстве (X, τ), то можно ввести и понятие непрерывности по Хайне и в топологическом пространстве.

Дадим определение сходящейся последовательности.

Определение 18. *Последовательность $\{x_n\} \subset X$ называется сходящейся к точке $x_0 \in X$ в топологическом пространстве (X, τ), если для всякой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 найдется такое $N \in \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$ имеем $x_n \in U(x_0)$.*

Теперь дадим определение непрерывности по Хайне.

Определение 19. *Отображение*

$$f(x) : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

двух топологических пространств (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) называется непрерывным по Хайне в точке $x_0 \in X_1$, если для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset X_1$, сходящейся к x_0 в топологическом пространстве (X_1, τ_1), соответствующая последовательность $\{f(x_n)\} \subset X_2$ сходится к точке $f(x_0) \in X_2$ в топологическом пространстве (X_2, τ_2).

Совершенно нетрудно показать, что из непрерывности по Коши вытекает непрерывность по Хайне. Однако, обратное утверждение, вообще говоря, не выполнено. По смыслу непрерывность по Хайне — это секвенциальная непрерывность, а для получения эквивалентного определения непрерывности в смысле сходимости нужно более общее понятие последовательности — направленности. Поэтому для того чтобы ввести понятие такой сходимости, которое бы давало бы в результате определение непрерывности эквивалентное определение непрерывности по Коши нужно ввести ряд новых понятий.

§ 11. Направленность

Определение 20. *Говорят, что на множестве X выделен частичный порядок или что множество X частично упорядоченно, если выделено некоторое семейство пар $(x, y) \in \mathcal{P} \subset X \otimes X$, для которых пишут $x \leqslant y$, причем для порядка «$\leqslant$» выполнены следующие свойства*:

(i) *$x \leqslant x$;*
(ii) *если $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, то $x = y$;*
(iii) *если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$.*

Замечание. Знак $\leqslant$ может не иметь ничего общего со знаком сравнения вещественных чисел. Знак равенства $=$ в последнем свойстве это знак равенства элементов множества.

Замечание. Отметим, что в третьей лекции нами был введено определение отношения эквивалентности $\overset{\mathcal{L}}{\sim}$, которое не упорядочивает множество, а лишь определяет принцип по которому элементы множества множества можно считать эквивалентными.

Вторые свойства отношения эквивалентности $\stackrel{\mathcal{L}}{\sim}$ и частичного порядка $\leqslant$ разные. Так если $x \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} y$, то и $y \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} x$. Однако, если $x \leqslant y$, то вообще говоря нельзя сказать, что и $y \leqslant x$, а только в том случае если эти два элемента совпадают.

Пример 1. На множестве $\mathcal{L}(X, \mu)$ измеримых и интегрируемых по Лебегу функций можно ввести отношение эквивалентности

$$f(x) \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} g(x) = \{f(x) = g(x) \text{ почти всюду } x \in X\},$$

а можно ввести частичный порядок

$$f(x) \leqslant g(x) = \{f(x) \leqslant g(x) \text{ почти всюду } x \in X\}.$$

Терминологическая разница понятна.

Пример 9. На плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^1$, которая, конечно, сама по себе не упорядочена, можно ввести частичный порядок следующим образом:

$$x = (x_1, x_2) \leqslant y = (y_1, y_2) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

если выполнены неравенства $x_1 \leqslant y_1$ и $x_2 \leqslant y_2$. Заметим, что при такой частичной упорядоченности имеется место следующее свойство: для всех $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$ найдется третья точка $z = (z_1, z_2)$, что имеет место упорядоченность

$$x \leqslant z \quad \text{и} \quad y \leqslant z.$$

Дадим определение *направленного множества.*

Определение 21. *Множество* A *называется направленным, если на нем введена частичная упорядоченность «$\leqslant$», причем таким образом, что для любых* $x, y \in \mathrm{A}$ *найдется третий элемент* $z \in \mathrm{A}$ *такой, что*

$$x \leqslant z, \quad y \leqslant z.$$

Теперь мы можем дать определение *направленности*, обобщающей понятие последовательности.

Определение 22. *Множество элементов* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *индексируемое направленным множеством* A *называется направленностью.*

Дадим определение сходящейся направленности.

Определение 23. *Направленность* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset X$ *называется сходящейся к элементу* $x_0 \in X$ *в топологическом пространстве* (X, τ), *если для всякой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0 *найдется такой элемент* $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, *что для всех элементов* $\alpha \in \mathrm{A}$ *таких, что* $\alpha_0 \leqslant \alpha$ *имеем* $x_\alpha \in U(x_0)$.

Наконец, мы можем доказать результат об эквивалентности непрерывности по Коши и непрерывности по Хайне в смысле направленностей.

Теорема 8. *Для того чтобы отображение*

$$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$$

было непрерывным в точке $x \in X_1$, *необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *сходящейся к* x *в топологическом пространстве* (X_1, τ_1), *соответствующая направленность* $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *сходилась к точке* $f(x) \in X_2$ *в топологическом пространстве* (X_2, τ_2).

Доказательство.

Необходимость. Итак, пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in \in X_1$. Пусть V — это окрестность точки $f(x)$, тогда найдется такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$. Пусть теперь $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная направленность, сходящаяся к x. Выберем элемент $\alpha_0 \in \in \mathrm{A}$ таким образом, чтобы $x_\alpha \in U$ при $\alpha_0 \leqslant \alpha$, но тогда $f(x_\alpha) \in f(U) \subset \subset V$, т. е. направленность $\{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ сходится к $f(x)$.

Достаточность. Докажем теперь утверждение в другую сторону. Действительно, пусть V — это окрестность точки $f(x)$.

1. Выберем направленное множество следующим образом. Пусть ν_x — это ФСО точки x, частично упорядоченное следующим образом: для $U_1, U_2 \in \nu_x$ пишем $U_1 \leqslant U_2$, если $U_2 \subset U_1$. Ясно, что ν_x с указанным порядком является направленным множеством.

□ Действительно, нужно лишь проверить, что для любых окрестностей $U_1, U_2 \in \nu_x$ найдется третья $U_3 \in \nu_x$, что

$$U_3 \subset U_1, \quad U_3 \subset U_2.$$

Это следствие того, что $U_1 \cap U_2 \in \tau_x$ и, следовательно, по определению ФСО найдется $U_3 \in \nu_x$ такое, что $U_3 \subset U_1 \cap U_2$. ⊠

2. Предположим, что для каждого $U \in \nu_x$ найдется такая точка x_U, что $f(x_U) \notin V$. Таким образом, мы построили направленность $\{x_U\}_{U \in \nu_x}$, которая сходится к точке x. Докажем это. Действительно, пусть U_0 — это окрестность точки x (т. е. $U_0 \in \nu_x$), тогда для всякого $U \in \nu_x$ такого, что $U_0 \leqslant U$ имеем по построению $x_U \in U \subset U_0$. Но при этом по построению направленность $\{f(x_U)\}_{U \in \mathfrak{U}}$ не сходится к точке $f(x)$.

Значит, наше предположение не верно, т. е. для всякой окрестности V точки $f(x)$ найдется такая окрестность U точки x, что $f(U) \subset V$.

Теорема доказана.

§ 12. Хаусдорфовы топологические пространства

Определение 24. *Топологическое пространство* (X, τ) *называется хаусдорфовым или отделимым, если для любых двух точек* $x \neq y$ *найдутся непересекающиеся окрестности* $U(x)$ *и* $U(y)$, *т. е.* $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Пример 1. Всякое метрическое пространство является хаусдорфовым. Действительно, пусть $x \neq y$ и $x, y \in X$ и $d = d(x, y)$ метрика. Пусть $d_0 = d(x, y) > 0$. Рассмотрим окрестности

$$O(x, d_0/4) = \{z \in X : \ d(z, x) < d_0/4\},$$
$$O(y, d_0/4) = \{z \in X : \ d(z, y) < d_0/4\}.$$

Докажем, что эти окрестности не пересекаются. Действительно, пусть противное

$$z \in O(x, d_0/4) \cap O(y, d_0/4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_0 = d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < \frac{d_0}{4} + \frac{d_0}{4} = \frac{d_0}{2}.$$

Пример 2. Приведем пример нехаусдорфова топологического пространства. Рассмотрим множество

$$X = \{0, 1\}, \quad \tau = \{\varnothing, \{0\}, X\}.$$

Таким образом в топологию τ не входит множество $\{1\}$. Тогда у точек $\{0\}$ и $\{1\}$ все их окрестности пересекаются.

□ Действительно, у точки $\{0\}$ их две — это $\{0\}$ и X. У точки $\{1\}$ окрестность одна — это X. Итак,

$$\{0\} \cap X = \{0\}, \quad X \cap X = X. \boxtimes$$

Важное свойство хаусдорфовых пространств в том, что всякая сходящаяся направленность (в частности, последовательность) имеет единственный предел.

Теорема 9. *Для того чтобы топологическое пространство (X, τ) было хаусдорфовым, необходимо и достаточно, чтобы всякая сходящаяся направленность имела единственный предел.*

Доказательство.

Необходимость. Итак, пусть топологическое пространство (X, τ) является хаусдорфовым. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ — это произвольная сходящаяся к точке x и к точке y направленность. Докажем, что $x = y$. Пусть нет, тогда найдутся такие окрестности $U(x)$ и $U(y)$, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$. Поскольку направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ является сходящейся к x, то для окрестности $U(x)$ найдется такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_1 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U(x).$$

Аналогичным образом найдется такое $\alpha_2 \in \mathrm{A}$, что при всех $\alpha \in \mathrm{A}$ таких, что $\alpha_2 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \in U(y).$$

Поскольку множество A является направленным, то для α_1 и α_2 найдется такое α_3, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3.$$

Поэтому
$$x_{\alpha_3} \in U(x) \cap U(y) = \varnothing.$$
Противоречие. Следовательно, $x = y$ в силу хаусдорфовости.

Достаточность. Пусть топологическое пространство (X, τ) не является хаусдорфовым. Тогда найдутся такие две его точки $x \neq y$, что любые их окрестности $U(x)$ и $U(y)$ соответственно имеют не пустое пересечение:
$$U(x) \cap U(y) \neq \varnothing.$$

1. Рассмотрим направленное множество $\mathfrak{U}$, состоящее из пар $(U(x), U(y))$ окрестностей (ФСО) ν_x и ν_y точек x и y частично упорядоченное следующим образом
$$\alpha_1 = (U_1(x), U_1(y)) \leqslant \alpha_2 = (U_2(x), U_2(y)),$$
если
$$U_2(x) \subset U_1(x) \quad \text{и} \quad U_2(y) \subset U_1(y).$$
Ясно, что множество $\mathfrak{U}$ является направленным, поскольку свойство направленности очевидно.

2. Поскольку $U(x) \cap U(y) \neq \varnothing$, то можно выделить направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ как $x_U \in U(x) \cap U(y)$, когда множества $U(x)$ и $U(y)$ пробегают все окрестности этих точек. Докажем, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Действительно, для всякой окрестности $U_0(x)$ найдется $U(x)$ такое, что
$$x_U \in U(x) \subset U_0(x) \quad \text{при} \quad U_0 \leqslant U.$$
Значит, направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к точке x. Аналогичным образом доказывается, что направленность $\{x_U\}_{U \in \mathfrak{U}}$ сходится к y. Поскольку в силу единственности предела $x = y$, то мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Теорема 10. *Для того чтобы множество B топологического пространства (X, τ) было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы для всякой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}} \subset B$, сходящейся к x, имело место $x \in B$.*

Доказательство.

1. Пусть B замкнуто ($\overline{B} = B$) и $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset B$, причем
$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x.$$
Тогда для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ найдется $\alpha_0 \in A$, что для всех $\alpha : \alpha_0 \leqslant \alpha$ имеем
$$x_\alpha \in U_x \subset A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B} = B.$$

2. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset B$, причем
$$x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \in B.$$

Тогда для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ найдется $\alpha_0 \in A$, что для всех $\alpha : \alpha_0 \leqslant \alpha$ имеем
$$x_\alpha \in U_x \subset A \neq \varnothing \Rightarrow x \in \overline{B}.$$
Стало быть, $B = \overline{B}$.

Теорема доказана.

§ 13. Предельные точки направленностей. Поднаправленности

Определение 26. Направленность $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ называется поднаправленностью направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, если существует такое отображение
$$\pi : \mathrm{B} \to \mathrm{A},$$
что $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$, причем для каждого $\alpha_0 \in \mathrm{A}$ найдется такое $\beta_0 \in \mathrm{B}$, что
$$\alpha_0 \leqslant \pi(\beta) \quad \text{при всех} \quad \beta_0 \leqslant \beta.$$

Замечание. Обсудим определение поднаправленности.

1. Свойство $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$ означает, что $\{y_\beta\}_{\beta\in B} \subset \{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

2. Свойство $\forall\ \alpha_0 \in A$ найдется $\beta_0 \in B$, что $\alpha_0 \leqslant \pi(\beta)$ для всех $\beta \in B$ такий, что $\beta_0 \leqslant \beta$ означает, что направленное множество B при отображении π сохраняет частичный порядок $\leqslant$ направленного множества A.

Пример 9. В частном случае, когда $A = \mathbb{N}$ и $B \subset \mathbb{N}$ — некоторое упорядоченное счетное подмножество мы имеем дело с определением подпоследовательности.

Определение 27. *Говорят, что направленность $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ часто бывает во множестве $E \subset X$, если для всякого $\alpha \in \mathrm{A}$ найдется такой индекс $\alpha' \in \mathrm{A}$, для которого $\alpha \leqslant \alpha'$ и $x_{\alpha'} \in E$.*

Определение 28. *Точка $x \in X$ в топологическом пространстве (X, τ) называется предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, если эта направленность часто бывает в любой окрестности $U(x)$ точки x.*

Замечание. Дадим сначала определение предельной точки множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$:

точка x называется предельной точкой множества $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$, если в любой окрестности $U(x)$ точки x есть хотя бы одна точка x_α отличная от x.

Теперь определение предельной точки направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$.

точка x называется предельной точкой направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, если эта направленность часто бывает в любой окрестности $U(x)$ этой точки x.

Ясно, что если $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$ — это направленность, то не всякая предельная точка этого множества является предельной точкой этой направленности.

§ 14. Теорема о предельной точки направленности

Теорема 11. *Точка* $x \in X$ *в топологическом пространстве* (X, τ) *является предельной точкой направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ *тогда и только тогда, когда существует поднаправленность* $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$ *направленности* $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$, *сходящаяся к точке* x.

Доказательство.

Необходимость. Итак, пусть x — есть предельная точка направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$.

1. Рассмотрим ФСО ν_x точки x. Значит, для всякой окрестности $U \in \nu_x$ найдется такое $\alpha \in \mathrm{A}$, что $x_\alpha \in U$. Поэтому можно ввести направленное множество B, состоящее из пар (α, U) таких, что при $\alpha \in \mathrm{A}$, $x_\alpha \in U \in \nu_x$.

Замечание. Отметим, что мы по каждой окрестности $U_x \in \tau_x$ выбираем элемент α из направленного множества A.

Упорядочим множество B следующим образом:

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U), \quad \text{если} \quad \alpha_1 \leqslant \alpha \quad \text{и} \quad U_1 \supset U.$$

Ясно, что для любых пар

$$(\alpha_1, U_1),\ (\alpha_2, U_2) \in \mathrm{B}$$

найдется пара $(\alpha_3, U_3) \in \mathrm{B}$, для которой

$$(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha_3, U_3), \quad (\alpha_2, U_2) \leqslant (\alpha_3, U_3).$$

$\square$ Действительно, свойство, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$ найдется $\alpha_3 \in \mathrm{A}$, что

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_3 \quad \text{и} \quad \alpha_2 \leqslant \alpha_3$$

следует из того, что множество A направленное (см. определение 14). Наконец, то, что для любых $U_1, U_2 \in \nu_x$ найдется $U_3 \in \nu_x$, что $U_3 \subset \subset U_1 \cap U_2$ вытекает из определения базиса окрестности ν_x. $\boxtimes$

Итак, множество B пар (α, U) является направленным множеством.

2. Теперь мы можем определить поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta \in \mathrm{B}}$, где $\beta = (\alpha, U) \in \mathrm{B}$, как $y_{(\alpha, U)} = x_\alpha$.

Проверим, что это действительно поднаправленность направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$.

$\square$ Действительно, это следствие того, что в данном случае отображение π имеет следующий вид (см. определение 17):

$$\pi : (\alpha, U) \to \alpha.$$

Докажем, что отображение π сохраняет порядок $\leqslant$, заданный на множестве A. Проверим это. Для заданного $\alpha_0 \in A$ найдется $\beta_0 = = (\alpha_0, X) \subset B$, что для всех $\beta \in B$ при $\beta_0 \leqslant \beta$ имеем $\alpha_0 \leqslant \pi(\beta)$, поскольку при таких $\beta = (\alpha, U)$ имеет место $\alpha_0 \leqslant \alpha = \pi(\beta)$, поскольку всегда $U \subset X$. $\boxtimes$

Докажем теперь, что поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ сходится к точке x. Действительно, для любой окрестности $U_1(x) \in \nu_x$ найдется такое $\alpha_1 \in \mathrm{A}$, что $x_{\alpha_1} \in U_1(x)$. Тогда для всех (α, U) таких, что $(\alpha_1, U_1) \leqslant (\alpha, U)$ имеем

$$x_\alpha = y_{(\alpha,U)} \in U \subset U_1.$$

Итак, построенная поднаправленность $\{y_\beta\}_{\beta\in\mathrm{B}}$ сходится к x.

Достаточность. Пусть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — это направленность и $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ — заданная поднаправленность, которая, очевидно, тоже является направленностью и к тому же сходящуюся к точке x.

Следовательно, направленность $\{y_\beta\}_{\beta\in B}$ часто бывает в любой окрестности точки x.

Стало быть, x — это предельная точка и направленности $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Теорема доказана.

§ 15. Теорема о компактности

Дадим определение компактного множества в топологическом пространстве (X, τ).

Определение 25. *Множество $K \subset X$ топологического пространства (X, τ) называется компактным, если из любого покрытия этого множества*

$$K \subset \bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} U_\alpha, \quad U_\alpha \in \tau \quad \textit{для всех} \quad \alpha \in \mathrm{A}$$

можно выделить конечное подпокрытие

$$K \subset \bigcup_{\alpha_i} U_{\alpha_i} \quad \textit{при} \quad i = \overline{1,n}.$$

Теорема 12. *Топологическое хаусдорфово пространство (X, τ) является компактным, тогда и только тогда, когда всякая бесконечная направленность имеет предельную точку.*

Доказательство.

Необходимость. Пусть (X, τ) — компактно и хаусдорфово и $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — бесконечная направленность.

Докажем, что *найдется такая точка $x \in X$, что $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ часто бывает в любой окрестности $x \in U_x \in \tau$.*

□ Пусть нет. Тогда для каждой $x \in X$ найдется такая $U_x \in \tau$ и такой индекс $\alpha_x \in A$, что для всех $\alpha \in A$, $\alpha_x \leqslant \alpha$ и $x_\alpha \notin U_x$. Тогда

$$X = \bigcup_{x\in X} U_x \Rightarrow \exists\, i = \overline{1,n}, \quad X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}.$$

Тогда по свойству направленного множества A найдется такой индекс α_0, что для всех $\alpha \in A$ с $\alpha_0 \leqslant \alpha$ имеем

$$x_\alpha \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \Rightarrow x_\alpha \notin X.$$

Противоречие. $\boxtimes$

Достаточность. $\square$ Пусть

$$X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha.$$

Предположим. что не существует такого конечного набора $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset A$, что

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}.$$

Стало быть, для каждого конечного набора $t = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset A$ найдется такая точка

$$x_t \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}. \tag{15.1}$$

Таким образом,

1. Мы получаем новое множество индексов $T = \{t\}$, которое является частично упорядоченным по включению

$$t_1 \leqslant t_2, \quad \text{если} \quad t_2 = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \subset t_1 = \{\beta_1, ..., \beta_m\}.$$

По этому частичному порядку множество индексов T является направленным множеством.

2. Мы построили направленность $\{x_t\}_{t \in T}$, обладающее тем свойством, что для каждого $t = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in T$ найдутся такие окрестности U_{α_i}, что выполнено свойство (15.1).

3. По условию эта направленность имеет поднаправленность $\{x_s\}_{s \in S}$, сходящуюся к некоторому $x \in X$.

4. Выберем такой индекс $\alpha_0 \in A$, что $x \in U_{\alpha_0}$. Стало быть, в силу сходимости поднаправленности $\{x_s\}_{s \in S}$ найдется такой индекс $s_0 \in S$, что найдется такой $s_1 \in S$, что $s_0 \leqslant s_1$ и $\{\alpha_0\} \leqslant s_1$ одновременно и $x_{s_1} \in U_{\alpha_0}$.

Замечание. Индекс $\alpha_0 \in A$ как одноточеченое множество $\{\alpha_0\} \in \in T$ при этом по включению $\{\alpha_0\} \subset s_1$.

5. По определению направленного множества индексов T индекс $s_1 = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \in S \subset T$, причем один из индексов $\alpha_i = \alpha_0$ и

$$x_{s_1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i} \Rightarrow x_{s_1} \notin U_{\alpha_0}.$$

Противоречие. $\boxtimes$

Теорема доказана.