Лекция 6

ВЕКТОРНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Линейные функционалы

Напомним некоторые понятия линейной алгебры. Действительно, пусть $\mathcal{L}$ — это линейное пространство над полем либо вещественных либо комплексных чисел.

Рассмотрим множество всех линейных функционалов над линейным пространством $\mathcal{L}$.

Определение 1. *Линейным функционалом f над линейным пространством $\mathcal{L}$ называется произвольное линейное отображение*

$$f : \mathcal{L} \to \mathbb{C},\ f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2),\ x_1, x_2 \in \mathcal{L},\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

Ясно, что это множество, которое мы обозначим через

$$\mathcal{L}^{\#}$$

также является линейным пространством над тем же полем.

Введем в рассмотрение так называемые скобки двойственности.

Вместо того, чтобы обозначать действие линейного функционала $f \in \mathcal{L}^{\#}$ на элементе $x \in \mathcal{L}$ как $f(x)$ нам удобно ввести следующее новое обозначение:

$$\langle f, x \rangle : \mathcal{L}^{\#} \otimes \mathcal{L} \to \mathbb{C}^1 \quad \text{или} \quad \mathbb{R}^1.$$

Отметим, что скобка двойственности $\langle f, x \rangle$ является билинейным функционалом своих аргументов.

□ Действительно, это следствие того что

1. Функционал $f \in \mathcal{L}^{\#}$ является линейной функцией на линейном пространстве $\mathcal{L}$, что по старому обозначению записывается как

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathcal{L}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}.$$

2. Линейные функционалы $\mathcal{L}^{\#}$ сами образуют линейное пространство, т. е. имеет место равенство

$$f \overset{def:}{=} \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{L}^{\#}. \quad \boxtimes$$

Возникает вопрос о существовании линейных функционалов и о размерности этого пространства. Справедлива следующая теорема в конечномерном случае:

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{L}_n$ — n–мерное линейное пространство с базисом $\{e_i\}_{i=1}^n$. Тогда пространство $\mathcal{L}_n^\#$ тоже n–мерно и возможный базис этого пространства определяется следующими $\{e^{*j}\}_{j=1}^n$ линейными функционалами:*

$$\left\langle e^{*j}, e_i \right\rangle = \delta_i^j. \tag{1.1}$$

Доказательство.

1. Прежде всего заметим, что формулы (1.1) действительно задают линейные функционалы. Итак,

$$\left\langle e^{*j}, x \right\rangle = x^j, \quad x = x^i e_i,$$

$$\left\langle e^{*j}, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \right\rangle = \alpha_1 x_1^j + \alpha_2 x_2^j = \alpha_1 \left\langle e^{*j}, x_1 \right\rangle + \alpha_2 \left\langle e^{*j}, x_2 \right\rangle.$$

2. Докажем, теперь, что набор линейных функционалов $\{e^{*j}\}$ образуют базис пространства $\mathcal{L}_n^\#$.

Действительно, докажем линейную независимость. Пусть $\{\beta_j\}_{j=1}^n$ — произвольный набор комплексных чисел. Тогда

$$\beta_j e^{*j} = \vartheta^* \Rightarrow 0 = \langle \beta_j e^{*j}, e_i \rangle = \beta_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Теперь докажем, что это максимальный набор линейно независимых линейных функционалов. Предположим, что существует еще один линейный функционал e^{*0}. Рассмотрим следующее выражение:

$$x = x^i e_i, \quad \left\langle e^{*0}, x \right\rangle = \gamma_i x^i, \quad \gamma_i = \langle e^{*0}, e_i \rangle,$$

$$c_0 e^{*0} + \sum_{j=1}^n c_j e^{*j} \Rightarrow \left\langle c_0 e^{*0} + \sum_{j=1}^n c_j e^{*j}, x \right\rangle = 0,$$

$$(c_0 \gamma_i + c_i) x^i = 0 \quad \text{для всех} \quad \{x^i\}_{i=1}^n \Rightarrow c_0 = -\frac{c_i}{\gamma_i}.$$

Следовательно, набор функционалов $\{e^{*0}, e^{*j}\}_{j=1}^n$ является линейно зависимым.

Наше предположение неверно.

Теорема доказана.

Этот результат можно распространить и на бесконечно мерный случай. Действительно, пусть $\mathcal{L}$ — это бесконечномерное линейное пространство со счетным базисом $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$. Тогда можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{L}_n, \quad \mathcal{L}_n = \overline{\{e_1, ..., e_n\}} - \text{линейная оболочка}, \quad \mathcal{L}_n \subset \mathcal{L}_{n+1}$$

В силу результата теоремы 1 имеем

$$\mathcal{L}_n^{\#} = \overline{e^{*1}, ..., e^{*n}}, \quad \langle e^{*j}, e_i \rangle = \delta_i^j,$$

причем по индуктивному построению базис $\{e^{*1}, ..., e^{*n+1}\}$ отличается от базиса $\{e^{*1}, ..., e^{*n}\}$ вектором e^{*n+1}.

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Базис линейного пространства линейных функционалов $\mathcal{L}^{\#}$, действующих на линейном пространстве $\mathcal{L}$ со счетным базисом, может быть задан в следующем виде:*

$$\left\langle e^{*j}, e_i \right\rangle = \delta_i^j, \quad \{e_i\}_{i=1}^{+\infty} - \textit{базис} \quad \mathcal{L}. \tag{1.2}$$

В случае линейных пространств $\mathcal{L}$ с несчетным базисом мы можем с уверенностью утверждать, что базис $\{e^{*\beta}\}_{\beta \in B}$ линейного пространства линейных функционалов $\mathcal{L}^{\#}$ равномощен базису $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

§ 2. Определение векторного топологического пространства (ВТП)

Итак, начнем со следующего определения.

Определение 1. *Векторное пространство X над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, на котором задана топология τ, называется векторным топологическим пространствам (X, τ), если операции сложения элементов и умножения на число являются непрерывными отображениями из (X, τ) в (X, τ).*

Рассмотрим по подробнее это определение. Прежде всего отметим, что можно ввести понятие декартова произведения топологических пространств $(X_1, \tau_1) \times (X_2, \tau_2)$ как топологическое пространство (X, τ), где

$$X = X_1 \times X_2, \quad \tau = \tau_1 \times \tau_2,$$
$$X = \{x = (x_1, x_2) : \ x_1 \in X_1, \ x_2 \in X_2\},$$
$$\tau = \tau_1 \times \tau_2 = \{(U_1, U_2) : \ U_1 \in \tau_1, \ U_2 \in \tau_2\}.$$

Требует расшифровки непрерывность отображения

$$F_1(x, y) : (X, \tau) \times (X, \tau) \to (X, \tau), \tag{2.1}$$

задаваемое как $F_1(x, y) = x + y$, а также непрерывность отображения

$$F_2(\lambda, x) : \left(\mathbb{C}^1, d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|\right) \times (X, \tau) \to (X, \tau), \tag{2.2}$$

задаваемое как $F_2(\lambda, x) = \lambda \cdot x$.

1. Итак, непрерывность $F_1(x, y)$ означает, что для всякой окрестности V_{x+y} точки $x + y$ найдутся такие окрестности U_x и U_y, что $F_1(U_x, U_y) = U_x + U_y \subset V_{x+y}$.

2. Непрерывность отображения $F_2(\lambda, x)$ означает, что для любой окрестности точки $V_{\lambda x}$ найдутся такие окрестности $U_\lambda = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu -$

$-\lambda| < \varepsilon\}$ и U_x точек λ и x соответственно, что $F_2(U_\lambda, U_x) = \mu U_x \subset V_{\lambda\cdot x}$ при всех $\mu \in U_\lambda$.

Пример 1. Метрическое пространство $(\mathbb{R}^1, d(x,y) = |x-y|)$ является векторным топологическим над полем $\mathbb{R}^1$. Докажем, что выполнены условия непрерывности отображений $F_1(x,y)$ и $F_2(\lambda, x)$.

$\square$ Непрерывность $F_1(x,y)$. Действительно, непрерывность по Коши в данном случае эквивалентна непрерывности по Хайне. Пусть

$$x_n \xrightarrow{d} x, \quad y_m \xrightarrow{d} y,$$

$$d(F_1(x_n, y_m), F_1(x,y)) = |x_n - x + y - y_m| \leqslant |x - x_n| + |y - y_m| \to +0$$

при $n \to +\infty$ и при $m \to +\infty$. $\boxtimes$

$\square$ Непрерывность $F_2(x,y)$. Действительно, пусть

$$\lambda_n \to \lambda, \quad x_m \xrightarrow{d} x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_0(F_2(\lambda_n, x_m), F_2(\lambda, x)) \overset{def:}{=} |\lambda_n - \lambda| + |x_m - x| \to +0$$

при $n \to +\infty$ и $m \to +\infty$. $\boxtimes$

Пример 2. Метрическое пространство $L(X,\mu)$ классов интегрируемых по Лебегу измеримых функций относительно метрики

$$d(\{f\},\{g\}) = \int\limits_X |f(x) - g(x)|\, d\mu$$

является векторным топологическим над полем $\mathbb{R}^1$. Действительно,

$\square$ Непрерывность $F_1(\{f\},\{g\})$. Действительно,

$$\{f_n(x)\} \xrightarrow{d} \{f(x)\}, \quad \{g_m(x)\} \xrightarrow{d} \{g(x)\},$$

$$\begin{aligned} d(F_1(\{f\},\{g\}), F_1(\{f_n\},\{g_m\})) &= \\ &= d(\{f\} + \{g\} - \{f_n\} - \{g_m\}) = \\ &= \int\limits_X |f(x) + g(x) - f_n(x) - g_m(x)|\, d\mu \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_X |f(x) - f_n(x)|\, d\mu + \int\limits_X |g(x) - g_m(x)|\, d\mu \to +0 \end{aligned}$$

при $n, m \to +\infty$. $\boxtimes$

$\square$ Непрерывность $F_2(\lambda, \{f\})$. Действительно,

$$\{f_m\} \xrightarrow{d} \{f(x)\}, \quad \lambda_n \to \lambda,$$

$$d_0(F_2(\lambda,\{f\}), F_2(\lambda_n,\{f_m\})) = |\lambda - \lambda_n| + \int\limits_X |f_m(x) - f(x)|\, d\mu \to +0$$

при $m \to +\infty$ и $n \to +\infty$. $\boxtimes$

Справедлива следующая важная лемма:
Лемма 1. *Топология τ_x в точке $x \in X$ ВТП (X, τ) может быть представлена в следующем виде:*

$$\tau_x = \{x + V_\vartheta, \quad V_\vartheta \in \tau_\vartheta\},$$

где τ_ϑ — это топология нулевого элемента $\vartheta \in X$.

Доказательство.

Достаточно доказать, что для любой окрестности $U_x \in \tau_x$ точки $x \in \in X$ найдется такая окрестность нуля $V_\vartheta \in \tau_\vartheta$, что

$$U_x = x + V_\vartheta.$$

□ Действительно, пусть $U_x \in \tau_x$. Докажем, что

$$V_\vartheta \stackrel{def:}{=} U_x - x \in \tau_\vartheta.$$

1. Прежде всего понятно, что $\vartheta \in V_\vartheta$, поскольку $x \in U_x$.

2. Пусть $y \in V_\vartheta$, тогда согласно определению этого множества найдется такое $z \in U_x$, что $y = z - x$. Согласно свойству топологии τ ВТП (X, τ) отображение

$$z \stackrel{def:}{=} x + y$$

непрерывно в точке y. Тогда для окрестности $U_x \ni z$ найдется такая окрестность $W_y \in \tau_y$ точки y, что

$$x + W_y \subset U_x \Rightarrow W_y \subset U_x - x = V_\vartheta \Rightarrow V_\vartheta \in \tau_\vartheta. \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

§ 3. Выпуклые, уравновешенные, ограниченные и поглощающие множества

Дадим определение выпуклого множества.

Определение 1. *Выпуклым множеством E в векторном пространстве X называется такое множество, что для всех пар точек $x, y \in E$ и для всякого $\lambda \in [0, 1]$ имеем $\lambda x + (1 - \lambda)y \in E$.*

Пример 1. Примером выпуклого множества является, например, множество $\{x \in X : \|x - x_0\| < d_0\}$ в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$.

□ Действительно, имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned}\|\lambda x + (1-\lambda)y - (1-\lambda+\lambda)x_0\| \leqslant \\ \leqslant \|\lambda x - \lambda x_0\| + \|(1-\lambda)y - (1-\lambda)x_0\| \leqslant \\ \leqslant \lambda\|x - x_0\| + (1-\lambda)\|y - x_0\| < \lambda d_0 + (1-\lambda)d_0 = d_0. \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Дадим определение уравновешенного множества.

Определение 2. *Множество E в векторном пространстве X называется уравновешенным, если для всякого $\lambda \in \mathbb{C}$ с $|\lambda| \leqslant 1$ имеем $\lambda E \subset E$.*

Пример 2. Уравновешенным множеством в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ является множество $\{x \in X : \|x - x_0\| < d_0\}$, поскольку

$$\|\lambda(x - x_0)\| = |\lambda|\|x - x_0\| \leqslant \|x - x_0\| < d_0 \quad \text{при} \quad |\lambda| \leqslant 1.$$

Замечание. Оба этих определения даны для произвольного линейного пространства. Следующие определения существенно используют понятие ВТП (векторного топологического пространства).

Определение 3. *Множество E в векторном топологическом пространстве (X, τ) называется ограниченным, если для всякой окрестности нуля U_ϑ найдется такое $s > 0$, что $E \subset tU_\vartheta$ при $t > s$.*

Замечание. Иначе говоря, любая окрестность нуля в ВТП поглощает ограниченное множество.

Лемма 2. *Множество $\{x\} \in X$ является ограниченным множеством в любом векторном топологическом пространстве (X, τ).*

Доказательство.

Заметим, что по определению ВТП (X, τ) имеем функция

$$F_2(\lambda, x) = \lambda x : \mathbb{C} \times (X, \tau) \to (X, \tau)$$

непрерывна, в частности, в точке $(0, x)$. Поэтому согласно определению по Коши имеем для любой окрестности $U_\vartheta \in \tau$ точки ϑ найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $0 < \lambda < \varepsilon$ имеем

$$\lambda x \in U_\vartheta \Rightarrow x \in \frac{1}{\lambda} U_\vartheta.$$

Теперь введем обозначение

$$s = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow t > s. \boxtimes$$

Лемма доказана.

Пример 3. Конечное семейство точек $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ является тоже ограниченным множеством. Действительно, для каждой окрестности нуля $U_\vartheta \in \tau$ найдутся такие $s_i > 0$, что для всех $t > s_i$ имеем $x_i \in tU_\vartheta$. Поэтому при $t > \max\{s_1, ..., s_n\}$ имеем

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{x_i\} \subset tU_\vartheta.$$

Дадим определение поглощающего множества.

Определение 4. *Множество E в векторном топологическом пространстве (X, τ) называется поглощающим, если для всякой точки $x \in X$ найдется такое $t = t(x) > 0$, что $x \in t \cdot E$.*

Пример 4. Например, каждая окрестность нуля является поглощающим множеством, поскольку по доказанному точка ограниченное множество.

Дадим определение абсолютно выпуклого множества.

Определение 5. *Выпуклое и уравновешенное множество E векторного топологического пространства (X, τ) называется абсолютно выпуклым.*

Пример 5. Например, окрестность $\|x - x_0\| < \varepsilon$ является выпуклым уравновешенным множеством в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$.

§ 4. Пространство линейных и непрерывных функционалов над ВТП (X, τ)

Дадим определение.

Определение 6. *Множество всех линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X, τ) называется сопряженным пространством и обозначается как X^*.*

Замечание. Напомним, что это означает. Действительно, пусть $f \in X^{\#}$, тогда его непрерывность в точке $x \in X$ определяется следующим образом: *для всякой окрестности $U(f(x)) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - f(x)| < \varepsilon\}$ найдется такая окрестность $U(x)$ точки $x \in X$, что имеет место вложение $f(U(x)) \subset U(f(x))$. При этом линейный функционал $f(x)$ должен быть непрерывен в каждой точке векторного топологического пространства (X, τ).*

Пример 6. Рассмотрим следующий функционал

$$\langle I, f\rangle \stackrel{def:}{=} \int\limits_X f(x)\, d\mu : L(X, \mu) \to \mathbb{R}^1.$$

Докажем, что он принадлежит $L^*(X, \mu)$.

1. Линейность функционала I следует из линейности интеграла Лебега.

2. Непрерывность в топологии нормированного пространства $L(X, \mu)$ вытекает из оценки

$$|\langle I, f\rangle - \langle I, f_0\rangle| \leqslant \int\limits_X |f(x) - f_0(x)|\, d\mu < \varepsilon$$

для любой ε–окрестности точки $\{f_0(x)\}$, которая и имеет вид

$$\left\{ \{f(x)\} \in L(X, \mu) : \|\{f(x)\} - \{f_0(x)\}\| = \int\limits_X |f(x) - f_0(x)|\, d\mu < \varepsilon \right\}.$$

§ 5. Полунормы, функционал Минковского

Топологию векторного топологического пространства (X, τ) можно задавать различными способами, но нас будет интересовать один частный, но важный случай, когда топология задается при помощи *полунорм.*

Прежде всего дадим определение полунормы.

Определение 7. *Вещественная функция $p(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$, определенная на векторном пространстве X называется полунормой, если выполнены следующие два свойства*:

(i) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ *для всех* $\lambda \in \mathbb{C}$ *и всех* $x \in X$;

(ii) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* $x, y \in X$.

Пример 7. Рассмотрим следующую вещественную функцию на линейном пространстве $\mathbb{C}^{(1)}([0,1])$:

$$p(f) = \sup_{x \in [0,1]} \left| f^{'}(x) \right|.$$

Ясно, что эта функция удовлетворяет всем условиям полунормы. Однако, из условия, что $p(f) = 0$ вытекает всего лишь на всего, что $f(x) = constant$.

Определение 8. *Функционалом Минковского $p_{\mathrm{A}}(x)$ абсолютно выпуклого и поглощающего множества $\mathrm{A} \subset X$ векторного топологического пространства (X, τ) называется следующая функция*:

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^1_+ : x \in \lambda \cdot \mathrm{A} \right\}. \tag{5.1}$$

Теорема 3. *Функционал Минковского полунорма.*

Доказательство.

1. Докажем свойство (i).

☐ Действительно, пусть $\alpha > 0$, тогда имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{A}}(\alpha x) &= \inf \{ \lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A} \} = \\ &= \alpha \inf \left\{ \alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \alpha^{-1}\lambda \mathrm{A} \right\} = \alpha \inf \left\{ \overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda} \mathrm{A} \right\} = \\ &= \alpha p_{\mathrm{A}}(x). \boxtimes \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha < 0$.

☐ Действительно, в этом случае справедливы аналогичные соотношения в силу уравновешенности множества A

$$\begin{aligned} p_{\mathrm{A}}(\alpha x) &= \inf \{ \lambda : \ \lambda > 0, \ \alpha x \in \lambda \mathrm{A} \} = \\ &= -\alpha \inf \left\{ -\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ -x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A} \right\} = \\ &= -\alpha \inf \left\{ -\alpha^{-1}\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in -\alpha^{-1}\lambda \mathrm{A} \right\} = \\ &= -\alpha \inf \left\{ \overline{\lambda} : \ \overline{\lambda} > 0, \ x \in \overline{\lambda} \mathrm{A} \right\} = -\alpha p_{\mathrm{A}}(x). \boxtimes \end{aligned}$$

Случай $\alpha = 0$ очевиден.

2. Докажем теперь справедливость свойства (ii). Действительно, имеет место следующие рассуждения. Пусть $x, y \in \mathrm{X}$, тогда выберем числа a и b следующим образом:

$$p_{\mathrm{A}}(x) < a < p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon, \quad p_{\mathrm{A}}(y) < b < p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{5.2}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{x}{a}, \ \frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

□ Действительно, по определению чисел a, b имеем

$$1 > p_{\mathrm{A}}\left(\frac{x}{a}\right) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \quad \frac{x}{a} \in \lambda\mathrm{A}\right\},$$

значит при некотором $\lambda \in (0, 1)$ имеет место вложение

$$\frac{x}{a} \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A}$$

в силу уравновешенностью множества A.

Аналогично доказывается, что

$$\frac{y}{b} \in \mathrm{A}.$$

Но множество A выпуклое поэтому оно вместе с точками

$$\frac{x}{a} \quad \text{и} \quad \frac{y}{b}$$

содержит и отрезок их соединяющий, т. е., в частности, точку

$$\frac{a}{a+b}\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b} \in \mathrm{A}. \tag{5.3}$$

Значит, в силу определения функционала Минковского из (5.3) имеем

$$p_{\mathrm{A}}(x+y) = \inf\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x+y \in \lambda\mathrm{A}\} \quad \text{при} \quad \lambda \leqslant a+b.$$

Стало быть, отсюда и из (5.2) имеем неравенство

$$p_{\mathrm{A}}(x+y) \leqslant a+b = p_{\mathrm{A}}(x) + \varepsilon + p_{\mathrm{A}}(y) + \varepsilon.$$

Откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу о справедливости свойства (ii). ⊠

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Теперь мы можем доказать теорему о связи функционала Минковского и абсолютно выпуклых поглощающих множеств ВТП.

Т е о р е м а 4. *Пусть $p(x)$ — это полунорма на векторном топологическом пространстве (X, τ), тогда следующие множества являются абсолютно выпуклыми и поглощающими*:

$$\mathrm{A} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \ p(x) < \alpha\} \quad и \quad \mathrm{B} \equiv \{x \in \mathrm{X} : \ p(x) \leqslant \alpha\}.$$

Обратно, пусть $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ — *это абсолютно выпуклое и поглощающее множество, тогда справедливы вложения*

$$\{x: \, p_{\mathrm{A}}(x) < 1\} \subset \mathrm{A} \subset \{x: \, p_{\mathrm{A}}(x) \leqslant 1\}.$$

Доказательство.

1. Докажем, что множества A и B абсолютно выпуклые и поглощающие.

□ Действительно, рассмотрим, например, множество A. Проверим его *выпуклость*: пусть $x, y \in \mathrm{A}$, тогда в силу свойства (ii) имеет место следующее неравенство:

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) < t\alpha + (1-t)\alpha = \alpha.$$

Уравновешенность этого множества следует из свойства (i). Действительно, имеем

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leqslant p(x) < \alpha.$$

Таким образом, приходим к выводу, что A абсолютно выпуклое множество.

Докажем теперь, что это множество является *поглощающим*. Действительно, пусть $y \in \mathrm{X}$. Введем обозначение

$$\lambda(y) \equiv \frac{p(y)}{\alpha},$$

тогда получим, что для всех $\lambda > \lambda(y)$ имеют место неравенства

$$p(y) < \lambda\alpha, \quad p\left(\frac{y}{\lambda}\right) < \alpha \Rightarrow \frac{y}{\lambda} \in \mathrm{A} \Rightarrow y \in \lambda\mathrm{A}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для множества B. ⊠

Осталось доказать последнее утверждение теоремы. Действительно, пусть

$$p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\{\lambda: \, \lambda > 0, \, x \in \lambda\mathrm{A}\} < 1,$$

значит, $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0, 1)$, тогда из уравновешенности множества A получаем

$$x \in \lambda\mathrm{A} \subset \mathrm{A} \Rightarrow \{x: \, p_A(x) < 1\} \subset \mathrm{A}.$$

Стало быть, первое вложение доказано.

Пусть теперь $x \in \mathrm{A}$. Тогда имеем $x \in \lambda\mathrm{A}$ при некотором $\lambda \in (0, 1]$ в силу уравновешенности. Значит,

$$x \in A \Rightarrow p_{\mathrm{A}}(x) \equiv \inf\{\lambda: \, \lambda > 0, \, x \in \lambda\mathrm{A}\} \leqslant 1.$$

Теорема доказана.

§ 6. Локально выпуклые пространства

Дадим определение *локально выпуклого пространства.*

Определение 9. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется локально выпуклым, если его базис окрестностей нуля* $\mathfrak{B}_\vartheta$ *может быть выбран, состоящим из выпуклых множеств.*

Важным свойством локально выпуклого векторного топологического пространства есть то, что базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ может быть выбран состоящим из абсолютно выпуклых окрестностей нуля.

Теорема 5. *В топологическом векторном пространстве* (X, τ)

(i) каждая окрестность нуля содержит уравновешенную окрестность нуля;

(ii) каждая выпуклая окрестность нуля содержит выпуклую уравновешенную окрестность нуля.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем свойство (i).

□ Действительно, пусть $U_\vartheta \in \tau_\vartheta$. Согласно определению топологии отображение
$$F_2(\lambda, \vartheta) = \lambda \cdot \vartheta = \vartheta - \text{непрерывно.}$$
Поэтому найдется такое $V_\vartheta \in \tau_\vartheta$, что
$$\mu V_\vartheta \subset U_\vartheta \quad \text{при} \quad |\mu| < \varepsilon.$$
Тогда множество
$$W = \bigcup_{|\mu|<\varepsilon} \mu V_\vartheta \in \tau_\vartheta.$$
Докажем, что W уравновешенно.
$$\lambda W = \bigcup_{|\mu|<\varepsilon} \lambda\mu V_\vartheta \in \tau_\vartheta \subset W, \quad |\lambda\mu| \leqslant |\mu| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad |\lambda| \leqslant 1. \boxtimes$$

Шаг 2. Докажем свойство (ii). Пусть $U_\vartheta \in \tau_\vartheta$ — выпукло.

1. Введем множество
$$A = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U_\vartheta,$$
причем пусть в соответствии с результатом шага 1
$$\exists\, V_\vartheta \in \tau_\vartheta, \quad \mu V_\vartheta \subset U_\vartheta, \quad |\mu| < \varepsilon \Rightarrow W = \bigcup_{|\alpha|<\varepsilon} \alpha V_\vartheta \in \tau_\vartheta.$$

2. Окрестность W уравновешенна.

□ Действительно, имеем
$$\lambda W = \bigcup_{|\alpha|<\varepsilon} \lambda\alpha V_\vartheta \subset W,$$
поскольку $|\lambda\alpha| \leqslant |\alpha| < \varepsilon$ при $|\lambda| \leqslant 1$. $\boxtimes$

3. Имеет место вложение $W \subset A \Rightarrow W \subset \operatorname{int} A$.

$\square$ Прежде всего заметим, что в силу уравновешенности W

$$\lambda W \subset W \quad \text{при} \quad |\lambda| = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} W \subset W \quad \text{т. к.} \quad |1/\lambda| = 1/|\lambda| = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\lambda} W \subset W \subset U_\vartheta \Rightarrow W \subset \lambda U_\vartheta \Rightarrow W \subset \bigcap_{|\lambda|=1} \lambda U_\vartheta = A. \quad \boxtimes$$

4. Имеет место вложение $\operatorname{int} A \subset U$.

$\square$ Действительно,

$$\operatorname{int} A = \operatorname{int} \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U_\vartheta \subset \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha \operatorname{int} U_\vartheta = \bigcap_{|\alpha|=1} \alpha U_\vartheta \subset U_\vartheta,$$

поскольку U_ϑ уравновешенно. $\boxtimes$

5. Множество A выпукло и множество $\operatorname{int} A$ выпукло.

$\square$ Действительно, пусть $x, y \in A$, тогда

$$\begin{aligned} &x, y \in \alpha U_\vartheta \quad \text{для всех} \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \exists\, x_1, y_1 \in U_\vartheta,\ x = \alpha x_1,\ y = \alpha y_1,\ t x_1 + (1-t) y_1 \in U_\vartheta \Rightarrow \\ &\quad\quad \Rightarrow tx + (1-t)y \in \alpha U_\vartheta \Rightarrow tx + (1-t)y \in A. \boxtimes \end{aligned}$$

Кроме того, *со всяким выпуклым множеством A его внутренность $\operatorname{int} A$ тоже выпукла.*

$\square$ Пусть $x, y \in \operatorname{int} A \subset A$, тогда

$$tx + (1-t)y \in A \quad \text{при} \quad t \in [0, 1].$$

В силу непрерывности функции $f(x, y) = tx + (1-t)y$ (по определению топологии ВТП) найдутся такие окрестности $U_x \in \tau_x$ и $U_y \in \tau_y$, что

$$tU_x + (1-t)U_y \subset \operatorname{int} A \Rightarrow tx + (1-t)y \in \operatorname{int} A. \boxtimes$$

6. Множество A уравновешенно.

$\square$ Действительно, пусть $\lambda = r\beta$ при $r \in [0, 1]$ и $|\beta| = 1$. Тогда

$$\lambda A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U_\vartheta = \bigcap_{|\beta\alpha|=1} r\beta\alpha U_\vartheta = \bigcap_{|\gamma|=1} r\gamma U_\vartheta.$$

С другой стороны, имеем $\vartheta \in \gamma U$ — выпуклое множество и поэтому

$$(1-r)\vartheta + r\gamma U_\vartheta \subset \gamma U_\vartheta \Rightarrow \bigcap_{|\gamma|=1} r\gamma U_\vartheta \subset \bigcap_{|\gamma|=1} \gamma U_\vartheta = A.$$

Итак,

$$\lambda A \subset A \quad \text{при} \quad |\lambda| = r|\beta| = r \leqslant 1. \boxtimes$$

7. Со множеством A его внутренность $\operatorname{int} A$ тоже уравновешенна.

□ Действительно,

$$\lambda A \subset A \quad \text{при} \quad |\lambda| \leqslant 1 \Rightarrow \operatorname{int}(\lambda A) \subset \operatorname{int} A \Rightarrow \lambda \operatorname{int} A \subset \operatorname{int} A. \boxtimes$$

8. Итак, построенная окрестность $\operatorname{int} A \in \tau_\vartheta$ является выпуклой и уравновешенной.

Теорема доказана.

§ 7. Локально выпуклые пространства. Построение с помощью полунорм.

Начнем с процедуры построения базы топологии на основе произвольного семейства полунорм $\mathrm{P}(X)$ на произвольном линейном пространстве.

1. Введем окрестности нуля $\vartheta \in X$.

$$V(p,n) = \left\{x : \; p(x) < \frac{1}{n}\right\} \quad \text{при} \quad p \in \mathrm{P}(X) \quad \text{и} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{7.1}$$

Действительно, $\vartheta \in V(p,n)$, поскольку $p(\vartheta) = 0$.

либо

2.1. Базис топологии окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ определим как всевозможные *конечные* пересечения

$$V_\alpha = \bigcap_{p \in \{p_1, p_2, \ldots, p_m\},\; n \in \{n_1, n_2, \ldots, n_k\}} V(p,n), \quad \alpha = \{p_1, \ldots, p_m; n_1, \ldots, n_k\}.$$

либо

2.2. Определим ФСО ν_ϑ точки $\vartheta \in X$ определим следующим образом:

$$\nu_\vartheta = \{V(p,n) : \; p \in P(X), \; n \in \mathbb{N}\}.$$

Тогда

3.1. либо произвольный элемент топологии τ_ϑ на линейном пространстве X определим исходя из определения базы топологии можно определить так

$$U_\vartheta = \bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau.$$

3.2. либо произвольный элемент топологии τ_ϑ на линейном пространстве X определим исходя из определения ФСО топологии ν_ϑ как

$$U_\vartheta \in \tau_\vartheta : \; \forall\, x \in U_\vartheta \; \exists\, V(p,n) \in \nu_\vartheta, \; x + V(p,n) \subset U_\vartheta.$$

Свойства окрестностей $V(p,n)$.

1. Заметим, что построенные окрестности нуля $V(p,n)$ являются *выпуклыми множествами*, т. е.

$$tV(p,n) + (1-t)V(p,n) \subset V(p,n) \quad \text{при} \quad t \in [0,1].$$

$\square$ Действительно, в силу свойств (i)–(ii) полунормы имеет место неравенство

$$p(tx+(1-t)y) \leqslant tp(x)+(1-t)p(y) < \frac{t}{n}+\frac{1-t}{n} = \frac{1}{n} \quad \forall\, x,y \in V(p,n). \boxtimes$$

2. Кроме того, окрестности $V(p,n)$ являются *уравновешенными множествами*, т. е. $\alpha V(p,n) \subset V(p,n)$ при $|\alpha| \leqslant 1$. Это также следствие свойства (ii) полунормы.

$\square$ Действительно, имеем при $0<|\alpha|\leqslant 1$

$$p(\alpha x)=|\alpha|p(x) < \frac{|\alpha|}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{для всех} \quad x \in V(p,n). \quad \boxtimes$$

§ 8. Теорема о непрерывности полунорм

Справедлива следующая теорема:

Теорема 6. *Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве X, непрерывна в топологии τ тогда и только тогда, когда она непрерывна в нуле.*

Функционал Минковского $p_U(x)$ абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in X$ является непрерывным в топологии τ тогда и только тогда, когда U — окрестность нуля.

Доказательство.

Шаг 1. Докажем первую часть теоремы.

$\square$ Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле векторного топологического пространства (X,τ), тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое множество $U_\varepsilon \in \tau$, что $\vartheta \in U_\varepsilon$ и имеет место неравенство

$$p(x)<\varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon.$$

В силу неравенства треугольника (ii) в определении полунормы для произвольного $a \in$ X имеем неравенство

$$|p(x)-p(a)| \leqslant p(x-a).$$

Поэтому для произвольного $\varepsilon>0$ взяв указанное U_ε, получим неравенство

$$|p(x)-p(a)| \leqslant p(x-a) < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in a+U_\varepsilon \backslash \{\vartheta\},$$

т. е. $p(x)$ непрерывна в произвольной точке $a \in X$. Утверждение в обратную сторону вытекает из того, что, в частности, полунорма непрерывна в нуле. $\boxtimes$

Шаг 2. Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы.

1. Пусть $U \in X$ — абсолютно выпуклая окрестность нуля. Рассмотрим соответствующий функционал Минковского

$$p_U(x) \equiv \inf\{\lambda:\ \lambda>0,\ x \in \lambda U\}.$$

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ при $x \in \varepsilon U \equiv U_\varepsilon$ имеем $\lambda \leqslant \varepsilon$ и, значит,

$$p_U(x) \leqslant \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in U_\varepsilon,$$

т. е. функционал Минковского $p_U(x)$ непрерывен в нуле и из предыдущего утверждения — на всем X.

2. Докажем обратное утверждение.

□ Действительно, пусть функционал Минковского абсолютно выпуклого, поглощающего множества $U \in \mathrm{X}$ непрерывен в нуле. Тогда множество

$$A = \{x : \ p_U(x) \leqslant 1\}$$

замкнуто, т. е. принадлежит $X \backslash \tau$ как прообраз замкнутого множества $[0, 1]$. Граница ∂A этого множества имеет следующий вид:

$$\partial A = \overline{A} \cap (\overline{X \backslash A}) = \{x : \ p_U(x) = 1\} \Rightarrow \operatorname{int} A = \{x : \ p_U(x) < 1\} \in \tau.$$

причем ясно, что $\vartheta \in \operatorname{int} A$. ⊠

Теорема доказана.

Имеет место следующее важное утверждение, вытекающее из этой теоремы и которое мы приведем без доказательств.

Лемма 3. *Пусть $p(x)$ — это полунорма, определенная на векторном топологическом пространстве (X, τ), тогда если множество $\mathrm{A}_p \equiv \equiv \{x : \ p(x) < 1\}$ содержит открытое множество $\Theta \in \tau$ либо множество $\mathrm{B}_p \equiv \{x : \ p(x) \leqslant 1\}$ содержит открытое множество $\Theta \in \tau$, то $p(x)$ непрерывна в топологии τ.*

Доказательство.

1. Пусть

$$\tau \ni U \in A_p = \{x : \ p(x) < 1\} .$$

Как мы уже доказали по свойству полунорм множество A_p является абсолютно выпуклым и поглощающим. Поэтому

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}U \subset A_p, \quad -x \in U \Rightarrow V \overset{def:}{=} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}U \subset A_p, \quad V \in \tau, \quad V \neq \varnothing.$$

Следовательно,

$$V \subset \operatorname{int} A_p \in \tau, \quad \operatorname{int} A_p \neq \varnothing.$$

Как мы ранее доказали вместе со множеством его внутренность обладает свойством абсолютной выпуклости. Кроме того, всякая окрестность нуля является поглощающим множеством.

Итак, $\operatorname{int} A_p$ — абсолютно выпуклая окрестность нуля.

2. Прежде всего заметим, что если $A \subset B$ — это абсолютно выпуклые и поглощающие множества, то и

$$p_B(x) \leqslant p_A(x) \quad \text{при} \quad A \subset B.$$

3. Докажем теперь , что $p(x) \leqslant p_{A_p}(x)$.

□ Действительно, согласно определению функционала Минковского имеем

$p_{A_p}(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ x \in \lambda A_p\} \Rightarrow$
$$\Rightarrow p\left(\frac{x}{\lambda}\right) < 1 \Rightarrow p(x) < \lambda \Rightarrow p(x) < p_{A_p}(x). \boxtimes$$

4. Имеет место следующая цепочка неравенств:

$$p(x) < p_{A_p}(x) \leqslant p_{\mathrm{int}\, A_p}(x).$$

Теперь согласно теореме 6 имеем функционал $p_{\mathrm{int}\, A_p}(x)$ является непрерывным в нуле, поскольку множество $\mathrm{int}\, A_p$ является абсолютно выпуклой окрестностью нуля. Стало быть, полунорма $p(x)$ тоже непрерывна в нуле.

Лемма доказана.

Теорема 7. *Полунорма $p(x)$, определенная на векторном топологическом пространстве (X, τ), непрерывна в топологии τ, порожденной счетным семейством полунорм* P, *тогда и только тогда, когда найдутся такие конечное семейство полунорм $p_i(x)$ из* P *при $i = \overline{1, n}$ и постоянная $\beta > 0$, что имеет место следующее неравенство*:

$$p(x) \leqslant \beta \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x). \tag{8.1}$$

Доказательство.

1. Докажем сначала достаточность условия (8.1). Пусть для полунормы $p(x)$ выполнено неравенство (8.1) при некотором конечном семействе полунорм $\{p_i(x)\} \subset$ P. Поскольку топология τ порождена счетным семейством полунорм P, то множества

$$\{x : \ p_i(x) < 1\} \in \tau \quad \text{для всех} \quad i = \overline{1, n},$$
$$\{x : \ p(x) < 1\} \supset \{x : \ \beta \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) < 1\} \in \tau,$$

т. е. открыты, значит, в силу леммы 1 полунормы $p_i(x)$ непрерывны в топологии τ. Из неравенства (8.1) вытекает непрерывность полунормы $p(x)$ в нуле и, следовательно, — на всем пространстве X.

2. Докажем теперь необходимость условия (8.1). Пусть $p(x)$ непрерывна в нуле пространства X. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$ и конечный набор полунорм $\{p_i(x)\} \subset$ P, что для всех x из X, удовлетворяющих условию

$$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(x) < \delta$$

выполняется неравенство
$$p(x) < \varepsilon.$$

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ выберем теперь число $\lambda = \lambda(x, \varepsilon) >$ > 0 таким образом, чтобы
$$p(\lambda x) < \varepsilon \tag{8.2}$$

и при этом $\delta = \delta(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon, x) \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x).$$

Тогда из неравенства (8.2) вытекает неравенство

$$p(x) < \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} \max_{i=\overline{1,n}} p_i(x).$$

Замечание. Определения "$\varepsilon - \delta$".

Теорема доказана.

Теорема 8. *Базис окрестностей нуля $\mathfrak{B}_\vartheta$ (напоминаем, что это базис, построенный с помощью полунорм) на векторном пространстве X порождает локально выпуклое векторное топологическое пространство (X, τ).*

§ 9. Метризуемые ВТП.

Векторное топологическое пространство при нашем его определении не является автоматически хаусдорфовым. Поэтому в дальнейшем мы будем строить только хаусдорфовы топологии. Заметим теперь, что, как мы уже говорили, из условия $p(x) = 0$ вовсе не вытекает, что $x = \vartheta$, однако есть одно свойство системы полунорм P, которое роднит семейство полунорм с нормой. Именно, относительно системы полунорм P мы будем требовать, чтобы она была *разделяющей*, т. е. для всякой точки $x \in X$ существует такая полунорма $p \in \mathrm{P}$, что $p(x) \neq 0$.

Определение метризуемости. *ВТП (X, τ) называется метризуемым относительно некоторой метрики $d(x, y)$, если система множеств*

$$V_n(x) = \left\{ y \in X : \ d(x, y) < \frac{1}{n} \right\}$$

образуют ФСО ν_x исходной топологии τ_x.

Справедлива следующая теорема о метризуемости.

Теорема 9. *Пусть $\mathrm{P}(X)$ — есть счетное и разделяющее семейство полунорм, тогда построенное по этой системе полунорм локально выпуклое векторное топологическое пространство является метризуемым пространством.*

Доказательство.

Предположим теперь, что наше семейство полунорм $\mathrm{P}(X)$ счетно и разделяющее. Тогда на построенном топологическом пространстве (X, τ) можно ввести метрику

$$d(x, y) \equiv \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1 + p_k(x-y)} \leqslant \min_{l \in \{n_1, \dots, n_m\}} p_l(x-y) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}. \qquad (9.1)$$

Проверим, что это метрика на (X, τ).

1. Докажем, что $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

□ Действительно, в силу того, что семейство полунорм является разделяющим, то $d(x, y) = 0$, тогда и только тогда, когда $x = y$, поскольку, если $d(x, y) = 0$, но $x - y \neq \vartheta$, то найдется такой номер $k = n_0$, что $p_{n_0}(x - y) > 0$, а значит, $d(x, y) > 0$. Противоречие.

2. Докажем неравенство треугольника

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y), \quad x, y, z \in X.$$

Прежде всего заметим, что

$$f(p) = \frac{p}{1+p} \Rightarrow f^{'}(p) = \frac{1}{(1+p)^2} > 0 \Rightarrow f(p) \leqslant f(p_1 + p_2) \text{ при } p \leqslant p_1 + p_2,$$

$$\frac{p}{1+p} \leqslant \frac{p_1 + p_2}{1 + p_1 + p_2} \leqslant \frac{p_1}{1 + p_1 + p_2} + \frac{p_2}{1 + p_1 + p_2} \leqslant \frac{p_1}{1 + p_1} + \frac{p_2}{1 + p_2}.$$

отсюда и следует неравенство треугольника.

3. Докажем теперь, что метрика d порождает исходную топологию τ. В силу неравенства (9.1) мы приходим к выводу о том, что

$$\forall\, x \in U_{n_1, \ldots, n_m} = \left\{ x \in X : d(x) \leqslant c_1 \min_{l \in \{n_1, \ldots, n_m\}} p_l(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

найдется окрестность

$$V_m(x) = \left\{ y \in X :\ d(x - y) < \frac{1}{m} \right\} \subset U_{n_1, \ldots, n_m}, \quad d(x) = a < \frac{1}{n},$$

которую выберем из условия $m = 2n$ и неравенства для всех $y \in V_m(x)$

$$d(y) \leqslant d(y - x) + d(x) < \frac{1}{m} + a < \frac{1}{n} \quad \text{при достаточно большом} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Теорема доказана.

Дадим определение пространства Фреше.

Определение 10. *Полное, метризуемое и локально выпуклое пространство называется пространством Фреше.*

Замечание 2. Как видно из теоремы 5 — она не гарантирует того, что построенное по данной системе полунорм метрическое пространство является автоматически полным, т. е. пространством Фреше. Действительно, это не так и полноту построенного пространства надо проверять «вручную».

§ 10. Слабая, сильная и $*$-слабая топологии.

Итак, пусть $f \in X^{\#}$, а $x \in X$, причем X — это векторное пространство. Теперь рассмотрим следующую функцию на $x \in X$:

$$p(x) = |\langle f, x \rangle| \quad \text{для всех} \quad x \in X \quad \text{при} \quad f \in X^{\#}. \qquad (10.1)$$

Докажем, что функция $p(x)$ — это полунорма.

□ Действительно, имеют место следующие очевидные неравенства:

$$p(x_1+x_2)=|\langle f,x_1+x_2\rangle|=|\langle f,x_1\rangle+\langle f,x_2\rangle|\leqslant \\ \leqslant|\langle f,x_1\rangle|+|\langle f,x_2\rangle|=p(x_1)+p(x_2), \quad (10.2)$$

$$p(\lambda x)=|\langle f,\lambda x\rangle|=|\lambda\langle f,x\rangle|\leqslant|\lambda|\,|\langle f,x\rangle|=|\lambda|p(x). \quad \boxtimes \qquad (10.3)$$

Таким образом, в силу (10.2) и (10.3) функция (10.1) является полунормой.

Пока у нас нет топологии в векторном пространстве $X^{\#}$, поэтому мы не можем сказать, что такое *ограниченное множество* в $X^{\#}$. Мы можем говорить только о конечных множествах из $X^{\#}$, т. е. о множествах, состоящих из конечного числа элементов из $X^{\#}$.

Таким образом, будем рассматривать произвольные конечные множества $A_n=\{f_1,f_2,...,f_n\}\subset X^{\#}$. Тогда семейство

$$\mathrm{P}\equiv\left\{p(x;A_n):\ A_n\subset X^{\#}\right\}, \qquad (10.4)$$

где

$$p(x;A_n)=\sup_{f\in A_n}|\langle f,x\rangle|\,.$$

Введем соответствующее ФСО точки $\vartheta\in X$

$$\nu_\vartheta=\{V_{nm}:\ n,m\in\mathbb{N}\}\,,\quad V_{nm}=\left\{x\in X:\ p(x;A_n)<\frac{1}{m}\right\}.$$

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию τ_w на векторном пространстве X, которая называется *слабой топологией*.

Замечание. Заметим теперь, что выражение, которое стоит в левой части равенства (10.1) можно рассматривать как функцию от аргумента $f\in X^{\#}$ при фиксированном $x\in X$. Но тогда эта функция тоже полунорма, но уже на линейном пространстве $X^{\#}$.

Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#}\equiv\{p(f;B_n);B_n\subset X\}\,, \qquad (10.5)$$

где

$$p(f;B_n)=\sup_{x\in B_n}|\langle f,x\rangle|\,,\quad B_n=\{x_1,x_2,...,x_n\}\subset X.$$

Введем соответствующее ФСО точки $\vartheta^*\in X^{\#}$

$$\nu_{\vartheta^*}=\{V_{nm}:\ n,m\in\mathbb{N}\}\,,\quad V_{nm}=\left\{x\in X:\ p(f;B_n)<\frac{1}{m}\right\}.$$

Это семейство согласно теореме 4 порождает топологию $\tau^*_{w^*}$, но уже на сопряженном векторном пространстве $X^{\#}$. Эта топология носит название *$*-$слабой топологии.*

Возникает вопрос: почему мы в данном случае говорим не о слабой топологии, а о $*-$слабой топологии?

А вот почему — потому что на векторном пространстве $X^{\#}$ может быть еще задана и слабая топология следующим образом.

Поскольку множество $X^{\#}$ является векторным пространством, то на нем в свою очередь однозначно определено векторное пространство $X^{\#\#}$ линейных функционалов, но уже над $X^{\#}$. Определим соответствующие скобки двойственности между $X^{\#}$ и $X^{\#\#}$ следующим образом:

$$\left\langle x^{\#}, f\right\rangle_{\#} : X^{\#\#} \otimes X^{\#} \to \mathbb{C}. \tag{10.6}$$

Но тогда рассмотрим топологию на $X^{\#}$ при помощи следующего семейства полунорм:

$$\mathrm{P}^{\#\#} \equiv \left\{p^{\#}(f; A_n^{\#}); A_n^{\#} \subset X^{\#\#}\right\}, \tag{10.7}$$

где

$$p^{\#}(f; A_n^{\#}) = \sup_{x^{\#} \in A_n^{\#}} \left|\langle x^{\#}, f\rangle_{\#}\right|,$$

где $A_n^{\#}$ — это произвольное конечное подмножество из $X^{\#\#}$. Введем соответствующее ФСО точки $\vartheta^* \in X^{\#}$

$$\nu_{\vartheta^*} = \left\{V_{nm}^{\#} : \ n, m \in \mathbb{N}\right\}, \quad V_{nm}^{\#} = \left\{x \in X : \ p^{\#}(f; A_n^{\#}) < \frac{1}{m}\right\}.$$

Порожденная согласно теореме 3 топология τ_w^* является по своему смыслу слабой топологией на $X^{\#}$ и эти две топологии τ_w^* и $\tau_{w^*}^*$ вообще говоря не совпадают.

Рассмотрим вопрос о том, когда эти две топологии являются эквивалентными. Заметим, что имеет место вложение (инъективное отображение)

$$J : X \to X^{\#\#}.$$

□ Действительно, это следствие того, что каждый элемент $x \in X$ порождает линейный функционал на $X^{\#}$ по формуле

$$\langle f, x\rangle. \quad \boxtimes$$

Но вложение J может не быть сюръекцией, т. е. $J(X) = X^{\#\#}$.

Однако тот случай, когда все-таки такое вложение имеет место очень важен. В этом случае линейное пространство X называется *рефлексивным*.

И в этом случае имеет место равенство скобок двойственности

$$\langle f, x\rangle = \langle x^{\#}, f\rangle_{\#},$$

причем каждому элементу $x \in X$ взаимно однозначно соответствует элемент $x^{\#} \in X^{\#\#}$. Поэтому из сравнения формул (10.8) и (10.7) мы приходим к выводу о том, что топологии τ_w и τ_w^* совпадают на $X^{\#}$ и, значит, понятия слабой топологии и $*-$слабой топологии — это одно и тоже. В общем случае, как нетрудно убедиться, топология τ_w^* состоит из большего числа множеств, чем топология $\tau_{w^*}^*$ и, значит, топология τ_w^* *сильнее* топологии $\tau_{w^*}^*$ на $X^{\#}$.

Теорема 10. *Топология τ_w^* сильнее топологии $\tau_{w^*}^*$.*

Доказательство.

Рассмотрим стандартную окрестность нуля в ФСО ν_{ϑ^*} в $*$-слабой топологии $\tau^*_{w^*}$.

$$V_{n,m} = \left\{ f \in X^{\#} : \quad p(f, B_n) < \frac{1}{m} \right\},$$
$$p(f; B_n) = \sup_{x \in B_n} |\langle f, x \rangle|, \quad B_n = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X.$$

Но в силу естественного вложения

$$J(B_n) = \{x_1^* = Jx_1, ..., x_n^* = Jx_n\}.$$

Поэтому имеем

$$V_{nm} = V_{nm}^{\#} = \left\{ x \in X : \ p^{\#}(f; J(B_n)) < \frac{1}{m} \right\} \in \tau_w^*,$$

поскольку по определению отображения J

$$\langle f, x \rangle = \langle Jx, f \rangle_{\#} \quad \text{для всех} \quad x \in X, \quad f \in X^{\#}.$$

Теорема доказана.

Теперь мы займемся введением *сильной топологии* на пространстве X^* — линейном пространстве линейных непрерывных функционалов над векторным топологическим пространством (X, τ). Заметим, что для введения сильной топологии на X^* нам нужно понятие ограниченного множества в X и поэтому, естественно, нужна какая-то топология на векторном пространстве X.

Пусть $B \subset X$ — это произвольное ограниченное множество (см. определение 3) в векторном топологическом пространстве (X, τ).

Поскольку всякое конечное множество, в частности, точка поглощается всякой окрестностью нуля, то конечное множество — это пример ограниченного множества, однако, естественно, существуют ограниченные множества, не сводящиеся к конечным. Теперь введем следующее семейство полунорм:

$$\mathrm{P}_s^{\#} \equiv \{p(f; B); B \subset X\}, \tag{10.8}$$

где

$$p(f; B) = \sup_{x \in B} |\langle f, x \rangle|, \quad B \subset X,$$

где B — это произвольное ограниченное множество в (X, τ).

Тогда топология порожденная этой системой множеств согласно теореме 4, называется *сильной топологией* пространства X^* и обозначается как τ_s^*. Ясно, что поскольку всякое конечное множество — это ограниченное множество, то слабая топология τ_w^* и уж тем более $*$—слабая топология пространства X^* *слабее* топологии τ_s^*.

Таким образом, сильная топология τ_s является *сильнейшей* топологией на сопряженном пространстве X^* среди указанных «топологизаций».

Полученное локально выпуклое векторное топологическое пространство обозначается как (X_s^*, τ_s^*). Локально выпуклое векторное топологическое пространство, порожденное $*-$слабой топологией, обозначается как $(X_{w^*}^*, \tau_{w^*}^*)$.

§ 11. Нормируемые векторные топологические пространства.

Важное свойство ВТП заключается в возможности введения на нем нормы, относительно которой топология нормы совпадает с исходной топологией.

Определение 11. *Векторное топологическое пространство* (X, τ) *называется нормируемым, если на нем можно ввести такую норму, что топология нормы и исходная топология* τ *являются эквивалентными.*

Теорема о нормируемости. *Локально выпуклое пространство, содержащее ограниченную окрестность нуля, является банаховым относительно функционала Минковского этой окрестности с топологией, эквивалентной исходной и обратное верно.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть V — есть выпуклая ограниченная окрестность нуля в локально выпуклом векторном топологическом пространстве (X, τ).

1. Тогда как известно найдется открытая в топологии τ абсолютно выпуклая, окрестность нуля $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, которая, естественно, тоже ограничена.

2. Тогда это пространство можно представить в виде

$$X = \bigcup_{\alpha > 0} \alpha \mathrm{U},$$

поскольку множество U является окрестностью нуля и, следовательно, является поглощающим множеством, т. е. для всех $x \in X$ найдется такое $\alpha > 0$, что $x \in \alpha U$.

3. Рассмотрим функционал Минковского множества U :

$$p_{\mathrm{U}}(x) = \inf\left\{\lambda : \ \lambda > 0, \ x \in \lambda \mathrm{U}\right\}.$$

Поскольку U есть выпуклое, поглощающее и уравновешенное множество (как окрестность нуля), то по теореме 1 функционал Минковского этого множества является полунормой на этом пространстве.

4. Осталось проверить только свойство, что

$$p_{\mathrm{U}}(x) = 0 \Leftrightarrow x = \vartheta.$$

$\Box$ Действительно, пусть $x \neq \vartheta$ и $x \notin \lambda_0 \mathrm{U}$ при $\lambda_0 > 0$. Такое $\lambda_0 > 0$ существует, поскольку в противном случае $x \in 0 \cdot \mathrm{U} = \vartheta$.

Поэтому для всех $\lambda \leqslant \lambda_0$ в силу ограниченности U оно поглощается окрестностью λ_0U

$$x \notin \lambda \mathrm{U} \subset \lambda_0 \mathrm{U}.$$

Тогда по определению функционала Минковского имеем

$$p_{\mathrm{U}}(x) \geqslant \lambda_0 > 0.$$

Таким образом, $p_{\mathrm{U}}(x)$ есть норма на (X, τ).

5. Осталось доказать, что $p_{\mathrm{U}}(x)$ порождает ту же топологию на X, что и исходная топология τ. Это есть следствие ранее установленного нами равенства множеств

$$\mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} : \ p_{\mathrm{U}}(x) < 1\} \Rightarrow \alpha \mathrm{U} = \{x \in \mathrm{X} : \ p_{\mathrm{U}}(x) < \alpha\}.$$

Шаг 2. Обратное утверждение вытекает из того, что

$$U = \{x \in X : \ \|x\| < 1\}$$

— это ограниченная абсолютно выпуклая окрестность нуля.

Теорема доказана.

§ 12. Строгие индуктивные пределы и полнота.

В дальнейшем мы будем рассматривать следующую общую ситуацию — имеется счетное семейство локально выпуклых векторных топологических пространств (X_n, τ_n) таких, что

$$(X_n, \tau_n) \subset (X_{n+1}, \tau_{n+1})$$

и топология τ_{n+1} порождает на X_n исходную топологию τ_n.

Индуктивная топология τ на

$$X \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n,$$

порожденная семейством (X_n, τ_n), определяется как сильнейшая (т. е. максимальная по включению всех таких топологий) топология τ, для которой все операторы канонического вложения

$$g_n : X_n \to X$$

непрерывны.

Справедлива следующая теорема:

Теорема 11. *Индуктивная топология τ на каждом из X_n совпадает с τ_n.*

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем, что $\tau|_{X_n} \subset \tau_n$.

□ Действительно, так как

$$g_n : \ X_n \to X$$

непрерывно, поэтому для всякого $U \in \tau$ найдется $V_n \in \tau_n$, что $g_n(V_n) \subset \subset U$.

Следовательно,

$$U \cap X_n = V_n \in \tau_n. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Докажем теперь, что $\tau_n \subset \tau|_{X_n}$.

$\square$ Действительно,

1. Пусть $U_n \in \tau_n$. Докажем, что найдется такое

$$U \in \tau \Rightarrow \quad U \bigcap X_n = U_n.$$

Так как $\tau_n \subset \tau_{n+1}$, то найдется такое $U_{n+1} \in \tau_{n+1}$, что

$$U_{n+1} \bigcap X_n \subset U_n \Rightarrow \ \exists\, U_{n+2} \in \tau_{n+2}, \quad U_{n+2} \bigcap X_{n+1} \subset U_{n+1}$$

$$\exists\, U_{n+m} \in \tau_{n+m} \Rightarrow \ U_{n+m} \bigcap X_{n+l} \subset U_{n+l} \quad \text{при} \quad l \leqslant m.$$

2. Введем следующее множество:

$$U = \operatorname{absconvex} \bigcup_{m=0}^{+\infty} U_{n+m}, \quad U_{n+m} \subset U \bigcap X_{n+m}, \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Пусть $x \in U$, тогда по построению найдется такое минимальное $m \in \mathbb{N}$, что

$$x \in \operatorname{absconvex} \{U_n \cup U_{n+1} \cup \dots \cup U_{n+m}\} \subset X_{n+m}, \quad x \notin X_{n+m-1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$U \cap X_n = U_n \quad \text{и} \quad U \cap X_m = U_n \cap X_m \Rightarrow \ U \in \tau. \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 12. *Строгий индуктивный предел (X, τ) последовательности отделимых локально выпуклых пространств (X_n, τ_n) отделим.*

Доказательство.

Пусть $x \neq \vartheta$ и $x \in X$, тогда найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $x \in X_n$. В силу отделимости X_n и инвариантности топологии ВТП относительно сдвигов найдется такое $U_n \in \tau_n$, что

$$x \notin U_n.$$

С другой стороны, в силу предыдущей теоремы найдется такая окрестность $U \in \tau$, что

$$U \cap X_n = U_n \Rightarrow x \in X_n \quad \text{и} \quad x \notin U_n, \quad \text{то} \quad x \notin U.$$

Теорема доказана.

§ 13. Полнота.

Дадим определение фундаментальной направленности.

Определение 13. *Фундаментальной направленностью или направленностью Коши называется такая направленность* $\{x_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{A}}$, *что для всякой окрестности нуля* U *найдется такое* $\alpha_0 \in \mathrm{A}$, *что для всех таких* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{A}$, *для которых* $\alpha_0 \leqslant \alpha_1$ *и* $\alpha_0 \leqslant \alpha_2$ *имеет место выражение*

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \in U.$$

Дадим определение полного ВТП.

Определение 14. *Полным ВТП* (X, τ) *называется пространство, в котором всякая фундаментальная направленность сходится.*

Теперь дадим определение пополнения ВТП.

Определение 15. *Пополнением ВТП* (X, τ) *называется полное отделимое ВТП* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$, *в котором* (X, τ) *является и топологическим и векторным подпространством, причем*

$$(X, \tau) \overset{ds}{\subset} (\widehat{X}, \widehat{\tau}).$$

Справедлива следующая теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема 13. *Всякое отделимое ВТП* (X, τ) *обладает единственным с точностью до изоморфизма пополнением* $(\widehat{X}, \widehat{\tau})$.

Теорема 14. *Справедливы следующие свойства строгих индуктивных пределов*:

(i) *Строгий индуктивный предел полных локально выпуклых пространств полон*;

(ii) *Пусть* (X, τ) *есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств* (X_n, τ_n). *Множество* $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$ *ограничено в* (X, τ) *тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором* (X_n, τ_n) *и ограничено в нем.*

(iii) *Пусть* (X, τ) *есть строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств* (X_n, τ_n), *причем* (X_n, τ_n) *замкнуто в* $(\mathrm{X}_{n+1}, \tau_{n+1})$. *Тогда* (X, τ) *не метризуемо.*