Лекция 7

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Определение и примеры.

Определение 1. *Банаховым пространством $\mathbb{B}$ называется нормированное пространство, которое является полным как метрическое пространство относительно метрики*

$$d(x,y) = \|x-y\|,$$

где $\|\cdot\|$ — это норма данного нормированного пространства.

Вопрос: является ли всякое нормированное пространство линейным пространством? Ответ — да, поскольку произвольная линейная комбинация его элементов принадлежит самому пространству.

Пример 1. Прежде всего докажем, что пространство Лебега $\mathbb{L}^p(X,\mu)$ при $p \in [1,+\infty)$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_p = \left(\int\limits_X |f(x)|\,d\mu\right)^{1/p}.$$

Теорема 1. *Пространство Лебега $\mathbb{L}^p(X,\mu)$ при $p \geqslant 1$ является банаховым.*

Доказательство.

Шаг 1. Полнота $\mathbb{L}^1(X,\mu)$.

1. Пусть $\{x_n(t)\}_{n=1}^{+\infty} \subset \mathbb{L}^1(X,\mu)$ фундаментальная последовательность.

Можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}(t)\} \subset \{x_n(t)\}$ такую, что

$$\|x_{n_k}(t) - x_{n_{k+1}}(t)\| < \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

□ Действительно, докажем по индукции. Пусть $k=1$ и $\varepsilon = 1/2$, тогда найдется $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_1$ имеем

$$\|x_n(t) - x_{n_1}(t)\| < \frac{1}{2}.$$

Теперь пусть $k = 2$ возьмем $\varepsilon = 1/4$, тогда найдется $n_2 > n_1$, что для всех $n \geqslant n_2$ имеем
$$\|x_n(t) - x_{n_2}(t)\| < \frac{1}{4}.$$
Продолжая этот процесс мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}(t)\} \subset \{x_n(t)\}$ такую, что
$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad \boxtimes$$

2. Заметим, что имеет место равенство
$$x_{n_N} = x_{n_1}(t) + \sum_{k=1}^{N-1} \left(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}(t)\right), \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \|x_{n_{k+1}}(t) - x_{n_k}(t)\| < +\infty.$$
Следовательно,
$$x_{n_N}(t) \to x(t) \quad \text{при} \quad N \to +\infty \quad \mu - \text{почти всюду на } X. \tag{1.2}$$

3. В силу фундаментальности последовательности $\{x_n(t)\}$, а значит фундаментальности любой ее подпоследовательности $\{x_{n_k}(t)\} \subset \subset \{x_n(t)\}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $k, l > > N_0$ справедливо следующее неравенство:
$$\int\limits_X |x_{n_k}(t) - x_{n_l}(t)|\, d\mu < \varepsilon. \tag{1.3}$$
По лемме Фату можно перейти к пределу при $n_l \to +\infty$ и получить отсюда следующее неравенство:
$$\int\limits_X |x_{n_k}(t) - x(t)|\, d\mu < \varepsilon. \tag{1.4}$$
Отсюда вытекает, что

а) $x_{n_k}(t) - x(t) \in \mathbb{L}^1(X, \mu)$;

б) $x(t) = (x(t) - x_{n_k}(t)) + x_{n_k}(t) \in \mathbb{L}^1(X, \mu)$;

в) $x_{n_k}(t) \to x(t)$ сильно в $\mathbb{L}^1(X, \mu)$.

Наконец, имеет место неравенство
$$\|x_n(t) - x(t)\| \leqslant |x_n(t) - x_{n_k}(t)\| + \|x_{n_k}(t) - x(t)\| \to +0 \quad \text{при} \quad n, n_k \to +\infty. \tag{1.5}$$

Шаг 2. Докажем полноту $\mathbb{L}^p(X, \mu)$ в предположении $\mu(X) < +\infty$.

1. Пусть $\{x_n(t)\} \subset \mathbb{L}^p(X, \mu)$ фундаментальна в $\mathbb{L}^p(X, \mu)$.
$$\|x_n(t) - x_m(t)\| = \int\limits_X |x_n(t) - x_m(t)|\, d\mu \leqslant$$

$$\leqslant [\mu(X)]^{1/p} \left(\int\limits_X |x_n(t) - x_m(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p} \to +0$$

при $n, m \to +\infty$. Стало быть, $\{x_n(t)\} \subset \mathbb{L}^1(X, \mu)$ фундаментальна.

Значит, согласно шагу 1 найдется такая подпоследовательность $\{x_{n_k}(t)\} \subset \{x_n(t)\}$, что

$$x_{n_k}(t) \to x(t) \quad \mu - \text{почти всюду на} \quad X. \tag{1.6}$$

2. Для подпоследовательности $\{x_{n_k}(t)\} \subset \{x_n(t)\}$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n_k, n_l \geqslant N_0$

$$\left(\int\limits_X |x_{n_k}(t) - x_{n_l}(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{1.7}$$

По лемме Фату в пределе при $l \to +\infty$ имеем

$$\left(\int\limits_X |x_{n_k}(t) - x(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Отсюда вытекают следующие свойства:

а) $x_{n_k}(t) - x(t) \in \mathbb{L}^p(X, \mu)$;

б) $x(t) = (x(t) - x_{n_k}(t)) + x_{n_k}(t) \in \mathbb{L}^p(X, \mu)$;

в) $x_{n_k}(t) \to x(t)$ сильно в $\mathbb{L}^p(X, \mu)$.

Шаг 3. Докажем полноту $\mathbb{L}^p(X, \mu)$ в предположении $\mu(X) = +\infty$.

1. Пусть

$$X = \bigcup_{k=1}^{+\infty} X_k, \quad \mu(X_k) < +\infty, \quad X_k \cap X_l = 0 \quad \text{при} \quad k \neq l$$

и последовательность $\{x_n(t)\}$ фундаментальна в $\mathbb{L}^p(X, \mu)$. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеет место неравенство

$$\|x_n(t) - x_m(t)\|_p < \varepsilon. \tag{1.9}$$

2. Введем следующую функцию:

$$x_n^{(k)}(t) = \begin{cases} x_n(t), & \text{если} \quad t \in X_n; \\ 0, & \text{если } t \notin X_n. \end{cases} \tag{1.10}$$

Тогда имеет место следующее выражение:

$$\|x_n(t) - x_m(t)\|_p^p = \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{X_k} |x_n^{(k)}(t) - x_m^{(k)}(t)|^p \, d\mu < \varepsilon. \tag{1.11}$$

Стало быть, на каждом X_n последовательность $\{x_n^{(k)}(t)\}$ фундаментальна в $\mathbb{L}^p(X_k,\mu)$. Итак, найдется такая функция $x^{(k)}(t) \in \mathbb{L}^p(X_k)$, что

$$x_n^{(k)}(t) \to x^{(k)}(t) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{L}^p(X_k). \tag{1.12}$$

3. Из (1.11) вытекает следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{M} \int\limits_{X_k} |x_n^{(k)}(t) - x_m^{(k)}(t)|^p \, d\mu < \varepsilon^p. \tag{1.13}$$

В этом неравенстве переходим к пределу при $m \to +\infty$ в силу леммы Фату получим следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{M} \int\limits_{X_k} |x_n^{(k)}(t) - x^{(k)}(t)|^p \, d\mu < \varepsilon^p. \tag{1.14}$$

Теперь перейдем к пределу при $M \to +\infty$ и получим следующее неравенство:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{X_k} |x_n^{(k)}(t) - x^{(k)}(t)|^p \, d\mu < \varepsilon^p. \tag{1.15}$$

4. Введем следующее обозначение:

$$x(t) = \{x^{(k)}(t), \quad t \in X_k\} \quad \text{при} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Итак, имеем

$$\left(\int\limits_{X} |x_n(t) - x(t)|^p \, d\mu \right)^{1/p} < \varepsilon. \tag{1.17}$$

Из этого неравенства получаем, что

а) $x_n(t) - x(t) \in \mathbb{L}^p(X,\mu)$;

б) $x(t) = (x(t) - x_n(t)) + x_n(t) \in \mathbb{L}^p(X,\mu)$;

в) $x_n(t) \to x(t)$ сильно в $\mathbb{L}^p(X,\mu)$.

Теорема доказана.

Пример 2. Пространство l^p при $p \in [1,+\infty)$ является банаховым относительно нормы

$$\|\{x\}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}.$$

Пример 3. Докажем теперь, что пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является банаховым относительно нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

□ Действительно,

1. пусть $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ — это фундаментальная последовательность. Следовательно, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon) > 0$, что для всех $n, m \geqslant N$ имеет место следующее неравенство:

$$\|f_n(x) - f_m(x)\| = \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{1.18}$$

2. Поскольку для каждого фиксированного $x \in [0,1]$ последовательность $\{f_n(x)\}$ фундаментальна в $\mathbb{R}^1$, то для каждого $x \in [0,1]$ определена функция $f(x)$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$, получим следующее неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{1.19}$$

3. Докажем, что $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$. Действительно, справедливо неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|,$$

из которого для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое достаточно большое $n_0 \in \mathbb{N}$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ имеют место неравенства

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon).$$

Следовательно, получаем неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \quad \boxtimes$$

П р и м е р 4. Докажем, что $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым относительно следующей нормы:

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|.$$

$\square$ Действительно, пусть $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ — фундаментальна, тогда $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ и $\{f_n'(x)\} \subset \mathbb{C}[0,1]$ обе фундаментальны. Следовательно,

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \in \mathbb{C}[0,1], \quad f_n'(x) \rightrightarrows g(x) \in \mathbb{C}[0,1]. \tag{1.20}$$

Надо доказать, что $g(x) = f'(x)$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ — фиксированного и для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $|x - - x_0| < \delta(\varepsilon)$ имеем

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Перейдем к пределу в этом неравенстве при $n \to +\infty$ и получим неравенство

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - g(x_0)\right| < \varepsilon \Rightarrow f^{'}(x_0) = g(x_0). \quad \boxtimes$$

§ 2. Эквивалентные нормы.

Определение 2. *Норма $\|\cdot\|_1$ на банаховом пространстве $\mathbb{B}, \|\cdot\|$ называется эквивалентной исходной, если найдутся такие положительные числа c_1 и c_2, что имеет место неравенство*

$$c_1\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant c_2\|f\| \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathbb{B}.$$

Очевидно, что $c_1 \leqslant c_2$.

Замечание. Заметим, что при этом соответствующее линейное нормированное пространство $\mathbb{B}$ будет тоже банаховым относительно эквивалентной нормы $\|\cdot\|_1$.

Пример эквивалентных нормы. Рассмотрим банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$ относительно стандартной нормы

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Теперь рассмотрим новую норму

$$\|f\|_1 = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Докажем, что это эквивалентная норма.

□ Имеет место цепочка неравенств

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1 \leqslant 2\|f\|.$$

Стало быть, нормированное относительно нормы $\|\cdot\|_1$ линейное пространство $\mathbb{C}[0,1]$ является также банаховым. ⊠

Пример неэквивалентных норм. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$, на котором введем следующую норму:

$$\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f^{'}(x)|.$$

Относительно этой нормы линейное пространство $\mathbb{C}^{(1)}[0,1]$ является банаховым.

Рассмотрим на этом же линейном пространстве другую норму

$$\|f\|_1 = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Относительно, этой нормы рассматриваемое линейное пространство не является банаховым. Если применить процедуру пополнения, то его пополнением окажется банахово пространство $\mathbb{C}[0,1]$.

§ 3. Линейные ограниченные операторы в банаховых пространствах.

Пусть $(\mathbb{N}_1, \|\cdot\|_1)$ и $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ — это два нормированных пространства, причем

$$A : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_2$$

это линейный непрерывный оператор. Все такие операторы образуют линейное пространство (с очевидными операциями сложения и умножения на число), которое мы обозначим через

$$\mathcal{L}(N_1, N_2).$$

Введем норму на $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ следующим образом:

$$\|A\| \equiv \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in \mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1}.$$

Л е м м а 1. *Величина* $\|\cdot\|$ *норма.*

Д о к а з а т е л ь с т в о .

1. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\|\lambda A\| = \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in N_1} \frac{\|\lambda Ax\|_2}{\|x\|_1} = |\lambda| \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in N_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = |\lambda| \|A\|.$$

2. Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\|A_1 + A_2\| = \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in N_1} \frac{\|(A_1 + A_2)x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in N_1} \frac{\|A_1 x\|_2 + \|A_2 x\|_2}{\|x\|_1} \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|.$$

3. Докажем, что если $\|A\| = 0$, то отсюда следует, что $A = \vartheta$.

$$0 = \|A\| \equiv \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in \mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} \Rightarrow \|Ax\|_2 = 0 \quad \text{для всех} \quad \|x\|_1 \neq 0 \Rightarrow A = \vartheta.$$

Л е м м а д о к а з а н а .

Заметим, что в силу свойств нормы имеет место следующая цепочка равенств:

$$\|A\| \equiv \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in \mathbb{N}_1} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{x \neq \vartheta,\ x \in \mathbb{N}_1} \left\| A \frac{x}{\|x\|_1} \right\|_2 = \sup_{\|y\|_1 = 1} \|Ay\|_2.$$

Возникает вопрос о том, при каких условиях линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ является банаховым относительно введенной операторной нормы?

Т е о р е м а 2. *Пусть* $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ *является банаховым пространством, тогда* $\mathcal{L}(N_1, N_2)$ *банахово.*

Д о к а з а т е л ь с т в о .

1. Пусть $\{A_n\}$ — это фундаментальная по операторной норме последовательность операторов, т. е.

$$\|A_n - A_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

Докажем, что существует

$$A \in \mathcal{L}(N_1, N_2),$$

такой что

$$\|A_n - A\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

2. Для всякого $x \in \mathbb{N}_1$ последовательность $\{A_n x\}$ фундаментальна в банаховом пространстве $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$. Действительно,

$$\|A_n x - A_m x\|_2 \leqslant \|A_n - A_m\| \|x\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty.$$

В силу полноты $(\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2)$ имеем

$$A_n x \to y \quad \text{в} \quad (\mathbb{N}_2, \|\cdot\|_2).$$

Введем оператор

$$Ax = y.$$

Докажем его линейность.

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A_n x_1 + \alpha_2 A_n x_2$$

причем

$$A_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$

и

$$A_n x_1 \to A x_1 \quad \text{и} \quad A_n x_2 \to A x_2.$$

Значит,

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2.$$

3. Докажем теперь ограниченность оператора A.

$$|\|A_n\| - \|A_m\|| \leqslant \|A_n - A_m\|.$$

Итак, из фундаментальности $\{A_n\}$ вытекает фундаментальность $\{\|A_n\|\}$. Значит,

$$\|A_n\| \to c_1 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Итак,

$$\|Ax\|_2 = \lim_{n \to +\infty} \|A_n x\|_2 \leqslant \lim_{n \to +\infty} \|A_n\| \|x\|_1 = c_1 \|x\|_1.$$

Тогда

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_2 \leqslant c_1.$$

Нам осталось доказать, что

$$\|A - A_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Действительно,

$$\|(A - A_n)x\|_2 = \lim_{m\to+\infty} \|(A_m - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|.$$

Следовательно,

$$\|A - A_n\| = \sup_{\|x\|_1=1} \|(A - A_n)x\|_2 \leqslant \lim_{m\to+\infty} \|A_m - A_n\|,$$

а в силу фундаментальности $\{A_n\}$ правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при больших n.

Теорема доказана.

§ 4. Линейные функционалы.

Прежде всего будем называть сходимость по норме

$$\|x - x_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

сильной сходимостью. Обозначается сильная сходимость следующим образом:

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}.$$

Рассмотрим частный, но очень важный случай линейных операторов — линейные функционалы:

$$f : (\mathbb{B}, \|\cdot\|) \to \mathbb{C},$$

причем

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$ и $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$.

Прежде всего вместо обозначения действия линейного функционала $f(\cdot)$ на элементе $x \in \mathbb{B}$ будем обозначать как

$$\langle f, x\rangle \quad \text{вместо} \quad f(x).$$

Очевидно, что множество линейных функционалов — само линейное пространство.

Определение 3. *Множество всех линейных функционалов над банаховым пространством* $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ *непрерывных в том смысле, что*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \textit{при} \quad n \to +\infty$$

для всех

$$x_n \to x \quad \textit{сильно в} \quad (\mathbb{B}, \|\cdot\|),$$

будем обозначать через $\mathbb{B}^*$.

Поскольку линейные функционалы — это линейные операторы, действующие из $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ в $\mathbb{C}$, а

$$\mathbb{C} - \text{полное банахово пространство},$$

то в силу доказанной теоремы пространство $\mathbb{B}^*$ является банаховым относительно следующей операторной нормы:

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Заметим, что сходимость последовательности $\{f_n\}$ по этой норме

$$\|f - f_n\|_* \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

является в наших обозначениях сильной сходимостью.

§ 5. Слабая и $*$-слабая сходимость.

Если есть сильная сходимость в банаховом пространстве $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$, то должна существовать и слабая сходимость.

Определение 4. *Слабой сходимостью последовательности* $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ *называется сходимость числовой последовательности*

$$\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \textit{для каждого фиксированного} \quad f \in \mathbb{B}^*.$$

Более того, на $\mathbb{B}^*$ можно ввести еще одну сходимость — $*-$слабую сходимость.

Определение 5. $*-$*слабой сходимостью последовательности* $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$ *называется сходимость следующей числовой последовательности*

$$\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle \quad \textit{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{B}.$$

1. Сильную сходимость мы обозначаем как

$$x_n \to x.$$

2. Слабую сходимость будем обозначать как

$$x_n \rightharpoonup x.$$

3. $*-$слабую сходимость будем обозначать как

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f.$$

Теперь мы проиллюстрируем введенные в этой лекции новые понятия на примере пространств Лебега. Дадим определения сильной, слабой и $*-$слабой сходимостей для пространств $L^p(X, \mu)$, где X область эвклидова пространства $\mathbb{R}^N$, а $p \in [1, +\infty]$.

Определение 6. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется сильно сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty]$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_n - u\|_p = 0.$$

Определение 7. *Последовательность* $\{u_n\} \subset L^p(\Omega)$ *называется слабо сходящейся к элементу* $u \in L^p(\Omega)$ *при* $p \in [1, +\infty)$, *если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{n \to +\infty} \langle f, u_n \rangle_p = \langle f, u \rangle_p \quad \textit{для всех} \quad f \in (L^p(\Omega))^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ — *это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^p(\Omega)$ *и* $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in [1, +\infty)$.

Определение 8. *Последовательность* $\{f_n\} \subset L^\infty(\Omega)$ *называется* $*$*−слабо сходящейся к функции* $f \in L^\infty(\Omega)$, *если для всех* $u \in \in L^1(\Omega)$ *имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_n \langle f_n, u \rangle_\infty = \langle f, u \rangle_\infty \quad \textit{для всех} \quad u \in L^1(\Omega),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle_\infty$ — *это скобки двойственности между банаховыми пространствами* $L^\infty(\Omega)$ *и* $L^1(\Omega)$.

Позже в следующем семестре мы докажем следующую важную теорему:

Теорема 3. *Банахово пространство* $(L^p(\Omega))^*$ *при* $p \in (1, +\infty)$ *совпадает с банаховым пространством* $L^q(\Omega)$ *при* $q = p/(p-1)$, *а в случае* $p = 1$ *банахово пространство* $\left(L^1(\Omega)\right)^*$ *совпадает с пространством* $L^\infty(\Omega)$.

§ 6. Дважды сопряженное пространство.

Итак, мы ранее построили сопряженное банахово пространство $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$. Рассмотрим теперь линейное пространство всех линейных функционалов над этим банаховым пространством.

$$\langle x^{**}, f \rangle_* \quad \text{для всех} \quad x^{**} \in (\mathbb{B}^*)^*, \quad f \in \mathbb{B}^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между $\mathbb{B}^{**}$ и $\mathbb{B}^*$.

Определение 9. *Линейное пространство всех линейных функционалов* x^{**} *над банаховым пространством* $(\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*)$ *непрерывных в том смысле, что*

$$\langle x^{**}, f_n \rangle_* \to \langle x^{**}, f \rangle_*$$

как только

$$\|f_n - f\|_* \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

будем называть дважды сопряженным и обозначать как $\mathbb{B}^{**}$.

Поскольку каждый элемент $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$ — это линейный и непрерывный оператор, действующий как

$$x^{**} : (\mathbb{B}^*, \|\cdot\|_*) \to \mathbb{C},$$

то как и ранее приходим к выводу, что $\mathbb{B}^{**}$ является банаховым пространством относительно нормы

$$\|x^{**}\|_{**} \equiv \sup_{\|f\|_*=1} |\langle x^{**}, f\rangle_*| .$$

Сходимость последовательности $\{x_n^{**}\} \subset \mathbb{B}^{**}$ по введенной норме

$$\|x_n^{**} - x^{**}\|_{**} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty$$

в наших обозначениях является *сильной сходимостью.*

Разумеется, что после того как мы ввели в рассмотрение банахово пространство $(\mathbb{B}^{**}, \|\cdot\|_{**})$ мы можем ввести на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^{*}, \|\cdot\|_{*})$ обычную слабую сходимость.

Определение 10. *Сходимость числовой последовательности*

$$\langle x^{**}, f_n\rangle_* \to \langle x^{**}, f\rangle \quad \textit{для каждого} \quad x^{**} \in \mathbb{B}^{**}.$$

будем называть слабой сходимостью

$$f_n \rightharpoonup f \quad \textit{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом, мы построили три типа сходимостей на банаховом пространстве

$$(\mathbb{B}^{*}, \|\cdot\|_{*})$$

— это сильная, слабая и $*$-слабая, которое является сопряженным к исходному банахову пространству

$$(\mathbb{B}, \|\cdot\|).$$

Вопрос как они связаны.

Лемма 2. *Сильная сходимость влечет за собой слабую, а слабая сходимость влечет за собой $*$—слабую.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $\{x_n\} \subset (\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ и

$$x_n \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \Rightarrow \|x_n - x\| \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{6.1}$$

Согласно определению нормы $\|\cdot\|_*$ на банаховом пространстве $(\mathbb{B}^{*}, \|\cdot\|_{*})$ имеем

$$\|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle|. \tag{6.2}$$

Докажем, что имеет место следующая неравенство:

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \|f\|_* \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}. \tag{6.3}$$

$\square$ Действительно, в силу (6.2) имеет место следующее неравенство:

$$|\langle f, x\rangle| \leqslant \|f\|_* \quad \text{для всех} \quad \|x\| = 1.$$

1. Пусть $x = \vartheta$, тогда неравенство очевидно.

2. Пусть $x \neq \vartheta$ и

$$y = \frac{x}{\|x\|}, \quad \|y\| = 1 \ \Rightarrow \ |\langle f, y\rangle| \leqslant \|f\|_* \Rightarrow |\langle f, x\rangle| \leqslant \|f\|_* \|x\|. \quad \boxtimes$$

В силу неравенства (6.3) имеет место неравенство

$$|\langle f, x - x_n\rangle| \leqslant \|f\|_* \|x - x_n\|.$$

Поэтому из (6.1) вытекает, что для каждого фиксированного $f \in \mathbb{B}^*$ имеет место следующее предельное свойство:

$$\langle f, x - x_n\rangle \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Стало быть,

$$x_n \rightharpoonup x \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 2. Докажем теперь, что из слабой сходимости в $\mathbb{B}^*$ вытекает $*$-слабая сходимость.

Прежде всего напомним, что между $\mathbb{B}$ и подмножеством в $\mathbb{B}^{**}$ существует линейная изометрия

$$J : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^{**}, \quad \|Ju\|_{**} = \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}.$$

$\square$ Действительно, прежде всего определим функционал $Jx \in \mathbb{B}^{**}$ над $\mathbb{B}^*$ следующей формулой:

$$\langle Ju, f\rangle_* \stackrel{def:}{=} \langle u, f\rangle, \quad u \in \mathbb{B}, \ f \in \mathbb{B}^*.$$

1. Согласно определению имеем

$$\langle J(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2), f\rangle_* \stackrel{def:}{=} \langle \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, f\rangle = \\ = \alpha_1 \langle u_1, f\rangle + \alpha_2 \langle u_2, f\rangle = \alpha_1 \langle Ju_1, f\rangle_* + \alpha_2 \langle Ju_2, f\rangle_*.$$

Линейность доказана.

2. Согласно определению нормы на $(\mathbb{B}^*)^*$ имеем

$$\|Ju\|_{**} = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle Ju, f\rangle_*| = \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u\rangle|,$$

кроме того, согласно определению норму $\|f\|_*$ имеем

$$1 = \|f\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle f, x\rangle|.$$

Поэтому точная верхняя грань функционала $|\langle f, x\rangle|$ при дополнительном условии $\|f\|_* = 1$ достигается на единичной сфере $\|x\| = 1$. Следовательно, при $u \neq \vartheta$

$$\sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, u\rangle| = \|u\| \sup_{\|f\|_*=1} |\langle f, x\rangle| = \|u\| \cdot 1, \quad x = \frac{u}{\|u\|}.$$

Итак,

$$\|Ju\|_{**} = \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}. \quad \boxtimes$$

Пусть $\{f_n\} \subset \mathbb{B}^*$, причем

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \Rightarrow \langle x^*, f_n - f\rangle \to +0, \; \forall x^* \in \mathbb{B}^{**}.$$

Поскольку линейная изометрия J является взаимно однозначным отображением между $\mathbb{B}$ и $J(\mathbb{B})$, то приходим к выводу о том, что

$$\forall\, x \in \mathbb{B}, \quad \langle Jx, f_n - f\rangle_* = \langle f_n - f, x\rangle \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Таким образом,

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Лемма доказана.

Дадим следующее определение:

Определение 1.*Банахово пространство $\mathbb{B}$ называется рефлексивным, если $J(\mathbb{B}) = \mathbb{B}^{**}$.*

Если банахово пространство является рефлексивным, то имеет место равенство скобок двойственностей

$$\langle x^{**}, f\rangle_* = \langle f, x\rangle,$$

где

$$x^{**} \in \mathbb{B}^{**}, \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad x \in \mathbb{B},$$

причем

$$x^{**} = Jx.$$

И поэтому для рефлексивных банаховых пространств $\mathbb{B}$ слабая и $*-$ $-$слабая сходимости на банаховом пространстве $\mathbb{B}^*$ совпадают. Хотя в общем случае, как мы уже говорили, слабая сходимость «сильнее» $*-$слабой сходимости.

Теорема 4. *Если $\mathbb{B}$ — это рефлексивное нормированное пространство, то оно является банаховым.*

Доказательство.

Пусть $J(\mathbb{B}) = \mathbb{B}^{**}$, т.ѐ. пространство линейных непрерывных функционалов над $\mathbb{B}^*$, т. е. $\mathbb{B}^{**}$ — полно.

Поэтому если $\{x_n\} \subset \mathbb{B}$ — это фундаментальная последовательность, то

$$\|x_n - x_m\| \to +0 \quad \text{при} \quad n, m \to +\infty \Rightarrow \|Jx_n - Jx_m\|_{**} = \|x_n - x_m\| \to +0.$$

Следовательно, найдется такой $x^{**} \in \mathbb{B}^{**}$, что

$$J(x_n) \to x^{**} \in \mathbb{B}^{**}, \quad x = J^{-1}x^{**},$$

тогда

$$\|x_n - x\| = \|J(x_n) - x^{**}\|_{**} \to +0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 7. Теорема Хана–Банаха и ее следствия

В этом разделе мы докажем важную в приложениях теорему Хана–Банаха.

Теорема 5. *Пусть X — это вещественное векторное пространство, а $X_0 \subset X$ — векторное подпространство, на котором задан линейный функционал $\langle \lambda, x\rangle$, причем имеет место неравенство*

$$\langle \lambda, x\rangle \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0, \tag{7.1}$$

где для функции $p(x) : X \to \mathbb{R}^1_+$, удовлетворяющая свойствам

1. *свойство выпуклости*

$$p(tx + (1-t)y) \leqslant tp(x) + (1-t)p(y) \text{ для всех } x, y \in X,\ t \in [0,1],$$

2. *свойство положительной однородности*

$$p(tx) = tp(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X, \quad t > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\langle \Lambda, x\rangle$, определенный на X и имеют место свойства

$$\langle \Lambda, x\rangle = \langle \lambda, x\rangle \quad \text{на} \quad X_0, \tag{7.2}$$

$$\langle \Lambda, x\rangle \leqslant p(x) \quad \text{для} \quad x \in X. \tag{7.3}$$

Замечание. Прежде всего заметим, что в качестве функции $p(x)$ можно взять полунорму. Кроме того, из свойств 1 и 2 вытекает свойство 3

$$p(tz_1 + (1-t)z_2) \leqslant$$
$$\leqslant tp(z_1) + (1-t)p(z_2) = p(tz_1) + p((1-t)z_2), \quad \forall\, z_1, z_2 \in X, \quad t \in [0,1].$$

Стало быть,

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y), \quad \forall\, x, y \in X. \tag{7.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть

$$\{x_0\} \in X \backslash X_0 \neq \varnothing,$$

поскольку в случае $X = X_0$ доказывать нечего. Пусть $x, y \in X_0$. Тогда

$$\langle \lambda, x+y\rangle = \langle \lambda, x\rangle + \langle \lambda, y\rangle \leqslant p(x+y) =$$
$$= p(x - x_0 + x_0 + y) \leqslant p(x - x_0) + p(y + x_0).$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle \lambda, x\rangle - p(x - x_0) \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y\rangle,$$

$$\langle \lambda, x\rangle - p(x - x_0) \leqslant a(\lambda, x_0, x, y) \leqslant p(y + x_0) - \langle \lambda, y\rangle. \tag{7.5}$$

Правая часть не зависит от x, а левая — от y, поэтому постоянная $a = a(x_0, \lambda)$ и из неравенства (7.5) получим

$$a)\ \langle \lambda, x\rangle - a \leqslant p(x - x_0), \quad b)\ \langle \lambda, y\rangle + a \leqslant p(y + x_0). \qquad (7.6)$$

Шаг 2. Пусть

$$X_1 = X_0 \oplus tx_0 \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

Определим на X_1 функционал

$$\langle \Lambda, x + tx_0\rangle \stackrel{def:}{=} \langle \lambda, x\rangle + ta, \quad x \in X_0.$$

Докажем, что на множестве X_1 функционал Λ удовлетворяет следующим свойствам:

□ Действительно,

1. Докажем линейность.

$$\begin{aligned}\langle \Lambda, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) x_0\rangle &= \\ &= \langle \lambda, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\rangle + (\alpha_1 + \alpha_2) a = \\ &= \alpha_1 \langle \lambda, x_1\rangle + \alpha_1 a + \alpha_2 \langle \lambda, x_2\rangle + \alpha_2 a = \\ &= \alpha_1 (\langle \lambda, x_1\rangle + a) + \alpha_2 (\langle \lambda, x_2\rangle + a) = \\ &= \alpha_1 \langle \Lambda, x_1 + x_0\rangle + \alpha_2 \langle \Lambda, x_2 + x_0\rangle.\end{aligned}$$

2. Докажем, что функционал Λ удовлетворяет неравенству (7.3).

Докажем, что он удовлетворяет следующему неравенству:

$$\langle \Lambda, x + tx_0\rangle \leqslant p(x + tx_0) \quad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{R}^1.$$

С этой целью воспользуемся неравенствами (7.6).

Пусть $t > 0$, тогда из неравенства (7.6) b) вытекает, что

$$\langle \Lambda, x + tx_0\rangle = \langle \lambda, x\rangle + ta = t\left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t}\right\rangle + a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} + x_0\right) = p(x + tx_0),$$

а из неравенства (7.6) a) вытекает, что

$$\begin{aligned}\langle \Lambda, x - tx_0\rangle &= \langle \lambda, x\rangle - ta = \\ &= t\left(\left\langle \lambda, \frac{x}{t}\right\rangle - a\right) \leqslant tp\left(\frac{x}{t} - x_0\right) = p(x - tx_0).\end{aligned}$$

Таким образом, требуемое продолжение линейного функционала λ получено. ⊠

Шаг 3. Предложим теперь алгоритм продолжения.

Случай первый. Пусть линейное пространство X имеет счетный базис. Продолжение строим по индукции.

Случай второй. Пусть линейное пространство X имеет несчетный базис. В этом случае нужно применить так называемую *трансфинитную индукцию*, рассмотрение которой несложно, но выходит за рамки настоящего курса лекций.

Теорема доказана.

Замечание. Прежде всего отметим, что если $p(x) = p(-x)$, тогда при условиях теоремы имеет место следующее неравенство:

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x), \quad x \in X.$$

□ Действительно, доказываемое неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$$-p(x) \leqslant \langle \Lambda, x\rangle \leqslant p(x),$$

поэтому осталось доказать неравенство

$$\langle \Lambda, -x\rangle \leqslant p(x),$$

но это следствие неравенства

$$\langle \Lambda, -x\rangle \leqslant p(-x) = p(x). \quad \boxtimes$$

Замечание. Отметим, что продолжение функционала с некоторого подпространства линейного пространство неединственно и существенно зависит от функции $p(x)$, заданной на всем линейном пространстве X. Даже при одной и той же функции $p(x)$ продолженных функционалов может быть достаточно много. Ниже мы рассмотрим следствия, из которых мы будем пользоваться этим свойством.

Теперь мы рассмотрим комплексный вариант теоремы Хана–Банаха.

Теорема 6. *Пусть X — комплексно-линейное пространство, а $X_0 \subset X$ — его подпространство. Пусть для линейного функционала $\langle \lambda, x\rangle$, определенного на X_0, выполнено неравенство*

$$|\langle \lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X_0, \tag{7.7}$$

где $p(x)$ — полунорма, определенная на X. Тогда существует такой линейный функционал $\langle \Lambda, x\rangle$, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X \tag{7.8}$$

и

$$\langle \Lambda, x\rangle = \langle \lambda, x\rangle \quad \text{для} \quad x \in X_0. \tag{7.9}$$

Доказательство.

1. Рассмотрим вещественный функционал

$$\mathrm{Re}\langle \lambda, x\rangle.$$

Согласно условию (7.7) для функционала $\mathrm{Re}\langle \lambda, x\rangle$ выполнено следующее неравенство:

$$|\mathrm{Re}\langle \lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \Rightarrow \mathrm{Re}\langle \lambda, x\rangle \leqslant p(x).$$

2. Пусть

$$\mathrm{Re}\langle \Lambda, x\rangle$$

— это его расширение, полученное согласно уже доказанной теоремы Хана–Банаха. Поскольку $\langle \Lambda, x\rangle \in \mathbb{C}^1$ и поэтому имеем

$$\langle \Lambda, x\rangle = \operatorname{Re}\langle \Lambda, x\rangle + i\operatorname{Im}\langle \Lambda, x\rangle.$$

Докажем, что

$$\operatorname{Im}\langle \Lambda, x\rangle = -\operatorname{Re}\langle \Lambda, ix\rangle.$$

□ Эта формула получается так.

$$\operatorname{Re}\langle \Lambda, ix\rangle = \operatorname{Re}\left(i\langle \Lambda, x\rangle\right) = -\operatorname{Im}\langle \Lambda, x\rangle. \quad \boxtimes$$

Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\langle \Lambda, x\rangle = \operatorname{Re}\langle \Lambda, x\rangle - i\operatorname{Re}\langle \Lambda, ix\rangle. \tag{7.10}$$

2. Проверим неравенство, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x).$$

□ Действительно, пусть

$$\langle \Lambda, x\rangle = |\langle \Lambda, x\rangle|\, e^{i\varphi} \Rightarrow |\langle \Lambda, x\rangle| = e^{-i\varphi}\langle \Lambda, x\rangle = \langle \Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle,$$
$$\langle \Lambda, x\rangle = \operatorname{Re}|\langle \Lambda, x\rangle| = \operatorname{Re}\langle \Lambda, xe^{-i\varphi}\rangle \leqslant p(xe^{-i\varphi}) = p(x). \quad \boxtimes$$

Теорема доказана.

Теорема 7. *Пусть X — это нормированное линейное пространство, причем*

$$Y \subset X \quad \text{и} \quad \lambda \in Y^*,$$

где Y линейное подпространство X. Тогда найдется такое продолжение Λ функционала λ, что имеет место равенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Доказательство.

1. Возьмем в качестве полунормы

$$p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\|.$$

Справедлива следующая оценка:

$$|\langle \lambda, x\rangle| \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in Y. \tag{7.11}$$

□ Действительно, согласно определению имеем

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{y\in Y, \|y\|=1} |\langle \lambda, y\rangle| \Rightarrow |\langle \lambda, y\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$

Если $x = \vartheta$, то неравенство (7.11) имеет место. Пусть $x \neq \vartheta$, то для

$$y = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow |\langle \lambda, y\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*} \Rightarrow |\langle \lambda, x\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| = p(x). \quad \boxtimes$$

2. В силу теоремы Хана–Банаха существует линейный функционал Λ такой, что

$$|\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant p(x) = \|\lambda\|_{Y^*}\|x\| \quad \text{при} \quad x \in X.$$

Возьмем *supremumu* по $\|x\| = 1$ от обеих частей и получим неравенство

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \sup_{\|x\|=1} |\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant \|\lambda\|_{Y^*}.$$

3. С другой стороны,

$$|\langle \lambda, x\rangle| = |\langle \Lambda, x\rangle| \quad \text{для} \quad x \in Y,$$

поэтому взяв *supremum* по $x \in Y$ получим неравенство

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \lambda, x\rangle| = \sup_{\|x\|=1, x\in Y} |\langle \Lambda, x\rangle| \leqslant \leqslant \sup_{\|x\|=1, x\in X} |\langle \Lambda, x\rangle| = \|\Lambda\|_{X^*}.$$

Итак, первое следствие доказано.

Теорема доказана.

Рассмотрим следующее следствие из теоремы Хана–Банаха:

Теорема 8. *Пусть $y \in X$, где X — это нормированное пространство. Тогда существует ненулевой функционал $\Lambda \in X^*$ такой, что*

$$\langle \Lambda, y\rangle = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|.$$

Доказательство.

Пусть

$$Y = \left\{ay \mid a \in \mathbb{C}^1\right\} \quad \text{и} \quad \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\|$$

— это линейный функционал над $Y \subset X$. Согласно первому следствию из теоремы Хана–Банаха найдется линейный функционал

$$\Lambda \in X^*, \quad \|\lambda\|_{Y^*} = \|\Lambda\|_{X^*},$$

но

$$\|\lambda\|_{Y^*} = \sup_{\|y\|=1} |\langle \lambda, y\rangle| = \sup_{\|y\|=1} \|y\| = 1,$$

значит,

$$\|\Lambda\|_{X^*} = \|\lambda\|_{Y^*} = 1.$$

Причем на Y

$$\langle \Lambda, ay\rangle = \langle \lambda, ay\rangle = a\|y\| \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{C}^1.$$

Следовательно,

$$\langle \Lambda, y\rangle = \|\Lambda\|_{X^*}\|y\|.$$

Теорема доказана.

Без доказательства сформулируем еще одно следствие

Т е о р е м а 9. *Пусть Z — замкнутое подпространство нормированного пространства X и пусть $y \in X \backslash Z$, причем*

$$\operatorname{distance}\{y, Z\} = d > 0.$$

Тогда существует такой линейный функционал $\Lambda \in X^*$, что

$$\|\Lambda\|_{X^*} \leqslant 1, \quad \langle \Lambda, y \rangle = d, \quad \langle \Lambda, z \rangle = 0$$

для всех $z \in Z$.

Из этого следствия вытекает следующая важная теорема:

Т е о р е м а 10. *Пусть $\mathbb{B}$ — банахово пространство. Если $\mathbb{B}^*$ сепарабельно, то $\mathbb{B}$ также сепарабельно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Пусть $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{B}$ — счетное всюду плотное в $\mathbb{B}^*$ множество. Теперь выберем $\{x_n\} \in \mathbb{B}$ таким образом, чтобы имели место свойства

$$\|x_n\| = 1, \quad |\langle \lambda_n, x_n \rangle| \geqslant \|\lambda_n\|_*/2.$$

□ Поскольку

$$\|\lambda_n\|_* = \sup_{\|x\|=1} |\langle \lambda_n, x \rangle| \, .$$

Поэтому такая последовательность $\{x_n\}$ существует. ⊠.

2. Пусть

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \middle| \, \alpha_k \in \mathbb{Q}, \; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Докажем, что $\mathcal{D}$ плотно в $\mathbb{B}$. Пусть нет. Тогда существует такой элемент

$$y \in \mathbb{B} \backslash \overline{\mathcal{D}} \quad \text{и} \quad \lambda \in \mathbb{B}^*,$$

что

$$\langle \lambda, y \rangle \neq 0, \quad \langle \lambda, x \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{\mathcal{D}}.$$

В силу плотности $\{\lambda_n\}$ в $\mathbb{B}^*$, с одной стороны, найдется такая подпоследовательность $\{\lambda_{n_k}\}$ такая, что

$$\lambda_{n_k} \to \lambda \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*.$$

С другой стороны, имеет место цепочка неравенств

$$\|\lambda - \lambda_{n_k}\|_* \geqslant |\langle \lambda - \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| = |\langle \lambda_{n_k}, x_{n_k} \rangle| \geqslant \|\lambda_{n_k}\|_*/2.$$

Значит,

$$\lambda_{n_k} \to \vartheta \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}^*,$$

а значит

$$\lambda = \vartheta.$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 8. Теоремы Банаха–Штейнгауза.

Пусть
$$F_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2, \quad \alpha \in I$$
— это семейство не обязательно линейных отображений банаховых пространств относительно норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, соответственно.

В этом разделе лекций мы рассмотрим две теоремы, которые все принято называть теоремами Банаха–Штейнгауза.

Как мы покажем все эти теоремы являются следствиями теоремы Бэра о категориях. Но сначала докажем теорему о равномерной ограниченности

Теорема 11. *Пусть*

(i) *оператор F_α непрерывен для каждого $\alpha \in I$;*

(ii)
$$\|F_\alpha(x+y)\|_2 \leqslant \|F_\alpha(x) + F_\alpha(y)\|_2, \quad \|F_\alpha(\lambda x)\|_2 \leqslant |\lambda| \|F_\alpha(x)\|_2$$
для всех $x, y \in \mathbb{B}_1$, $\lambda \in \mathbb{R}^1$ и $\alpha \in I$;

(iii) *для каждого $x \in \mathbb{B}_1$*
$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty.$$

Тогда семейство отображений $\{F_\alpha\}$ равномерно по $\alpha \in I$ непрерывно в нуле: $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\alpha \in I,\ \|x\|_1 < \delta} \|F_\alpha(x)\|_2 = 0$.

Доказательство.

1. Докажем, что для каждого F_α множество
$$b_n(\alpha) = \{x \in \mathbb{B}_1 : \ \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n\}$$
замкнуто.

□ Действительно, пусть
$$x_m \to x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_1 \quad \text{и} \quad \{x_m\} \subset b_n,$$
тогда в силу непрерывности F_α
$$F_\alpha(x_m) \to F_\alpha(x) \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2.$$
Но
$$\|F_\alpha(x_m)\|_2 \leqslant n \Rightarrow \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n \Rightarrow x \in B_n. \quad \boxtimes$$

2. Поэтому множество
$$X_n = \bigcap_{\alpha \in I} b_n(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{B}_1 : \ \sup_\alpha \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n \right\} \quad \text{замкнуто.}$$

Докажем, что
$$\mathbb{B}_1 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n.$$

□ Действительно, заметим, что в силу условия (iii)

$$\sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

а поэтому для заданного $x \in \mathbb{B}$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $c(x) \leqslant n$ имеем

$$X_n = \left\{ x \in \mathbb{B}_1 : \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x)\|_2 \leqslant n \right\},$$

но тогда из (iii) вытекает, что каждый элемент $x \in \mathbb{B}_1$ принадлежит какому-то X_n. ⊠

3. Каждое X_n замкнуто в $\mathbb{B}_1$, а $\mathbb{B}_1$ является банаховым, поэтому в силу доказанной ранее теоремы Бэра о категориях найдется такое $n \in \mathbb{N}$ и такой открытый шар

$$O(x_0, \varepsilon) \subset X_n.$$

Это означает, что

$$\{y : \|y\|_1 < \varepsilon\} \subset \left\{ y \in \mathbb{B} : \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(x_0 + y)\|_2 \leqslant n \right\}.$$

В своя очередь из свойства (ii) вытекает неравенство

$$\forall \ \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y + x_0)\|_2 + \\ + \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(-x_0)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

4. Итак,

$$\text{для всех} \quad \|y\|_1 < \varepsilon, \quad \sup_{\alpha \in I} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant n + c(x_0) < +\infty.$$

В силу свойства (ii) однородности F_α имеем

$$y = \frac{\varepsilon}{\delta} x, \quad \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} \|F_\alpha(x)\|_2, \qquad \sup_{\alpha \in I, \ \|x\| < \delta} \|F_\alpha(y)\|_2 \leqslant \frac{\delta}{\varepsilon} \left(n + c_0(x_0)\right).$$

Теорема доказана.

Из теоремы о равномерной ограниченности вытекает следующая первая теорема Банаха–Штейнгауза:

Теорема 12. *Пусть $\{T_\alpha\}$ — это семейство линейных и непрерывных операторов*

$$T_\alpha : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in I.$$

Пусть для каждого $x \in \mathbb{B}_1$

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_2 \leqslant c(x) < +\infty,$$

тогда

$$\sup_{\alpha \in I} \|T_\alpha\|_{1 \to 2} < +\infty.$$

Доказательство.

Применим теорему о равномерной ограниченности к семейству

$$F_\alpha = T_\alpha.$$

Тогда получим, что

$$\sup_{\alpha\in I,\ \|x\|_1<\delta} \|T_\alpha x\|_2 < 1,$$

но отсюда заменой получим, что

$$\sup_{\alpha\in I} \|T_\alpha\|_{1\to 2} = \sup_{\alpha\in I,\ \|z\|_1<1} \|T_\alpha x\|_2 < 1/\delta.$$

Теорема доказана.

Справедлива вторая теорема Банаха–Штейнгауза.

Теорема 13. *Пусть* $\{T_n\}$ *— это последовательность линейных непрерывных операторов, причем*

$$T_n : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$$

и

$$T_n x \to T_0 x \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B}_2 \quad \text{для каждого} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Тогда T_0 *— линейный и непрерывный оператор.*

Доказательство.

1. Из сильной сходимости вытекает, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\|_2 \leqslant c_1(x) < +\infty,$$

но тогда из первой теоремы Банаха–Штейнгауза получим, что

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{1\to 2} < +\infty,$$

тогда

$$\|T_0 x\|_2 = \lim_{n\to+\infty} \|T_n x\|_2 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|T_n\|_{1\to 2} \|x\|_1 \leqslant c_2 \|x\|_1.$$

Значит, T_0 — это ограниченный оператор.

2. Докажем теперь, что оператор T_0 является линейным.

□ Действительно, в силу линейности T_n имеем

$$T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T_n x_1 + \alpha_2 T_n x_2.$$

Перейдем к пределу при $n \to +\infty$ имеем

$$T_n(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \to T_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \quad T_n x_1 \to T_0 x_1, \quad T_n x_2 \to T_0 x_2.$$

Значит,

$$T_0(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T_0 x_1 + \alpha_2 T_0 x_2.$$

Теорема доказана.

§ 9. Операторные топологии.

По ходу лекции мы столкнулись уже с двумя типами сходимостей операторов из пространства

$$\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2).$$

Первый тип — это равномерная сходимость:

$$\|A_n - A\|_{1\to 2} = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Второй тип — это сильная сходимость:

$$\|(A_n - A)x\|_2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1.$$

Наконец, еще один тип операторной сходимости — это слабая сходимость

$$\langle f, (A_n - A)x\rangle \to 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{B}_1, \quad \text{и} \quad f \in \mathbb{B}_2^*,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $\mathbb{B}_2$ и $\mathbb{B}_2^*$.

Разумеется у пространства $\mathcal{L}(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ есть и "обычные"типы сходимостей как и у всякого банахова пространства и при этом введенная только что слабая операторная сходимость, вообще говоря, отличается от стандартной слабой сходимости.