Лекция 2. Математическое моделирование волноведущих систем

Излучатели конечных размеров, расположенные в свободном пространстве, возбуждают электромагнитное поле, распространяющееся по всем направлениям. Однако энергию электромагнитного поля часто необходимо передавать от излучателя к нагрузке так, чтобы она не рассеивалась в пространстве, а по возможности целиком поступала в нагрузку, для чего она должна быть локализована в части пространства – определенном канале. В качестве таких каналов используются волноведущие (направляющие) системы. Основой любой волноведущей системы являются волноводы.

Волновод – это специальное устройство или канал в неоднородной среде, в котором могут распространяться волны различной природы: акустические (в акустических волноводах), электромагнитные (в радиоволноводах, световодах), сейсмические и другие.

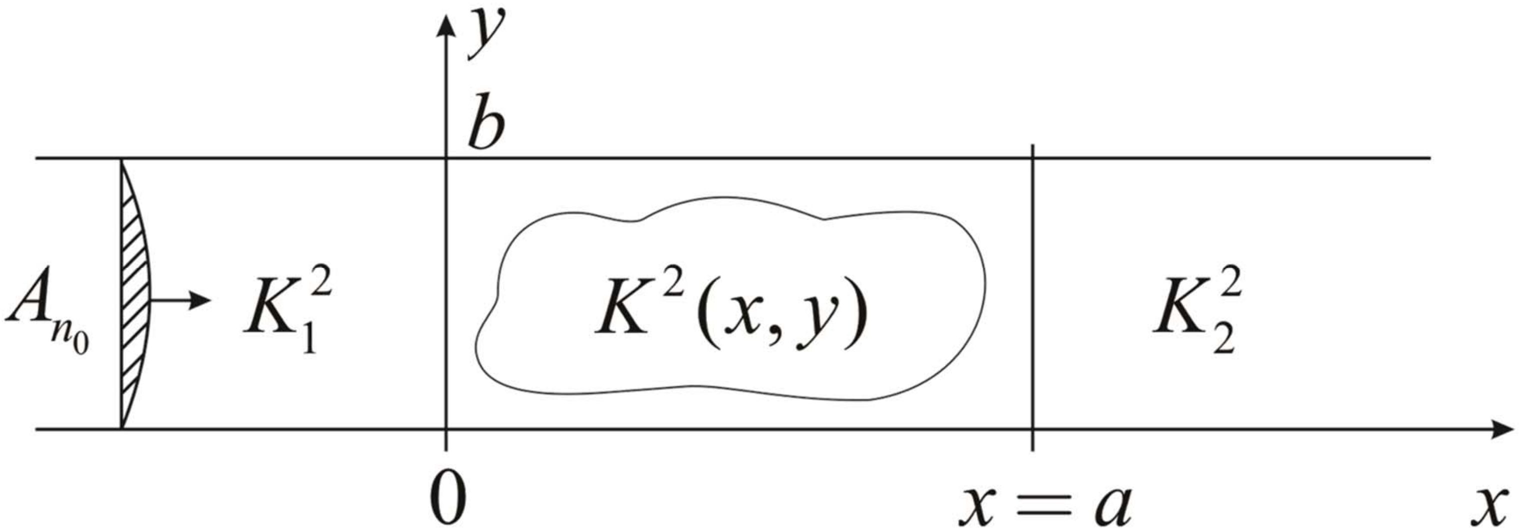
Акустические волноводы, как правило, представляют собой трубы со звукоотражающими стенками. Радиоволноводы – это трубы, полые или частично заполненные диэлектриком. Диэлектрические волноводы представляют собой диэлектрические стержни. Их разновидностью являются волоконные сваетоводы – преимущественно стеклянные нити, по которым при определенных условиях могут распространяться световые волны.

Одним из первых исследователей волноведущих систем был лорд Дж. У. Рэлей, который изучал акустические волны в органных трубах.

В настоящее время большой интерес вызывает применение в радиофизике, оптике, акустике и в ряде других областей науки и техники метаматериалов, с использованием которых возможно создание систем и устройств с уникальными свойствами. В частности такие метаматериалы используются для создания уникальных волноведущих систем.

Значительный интерес представляют волноведущие системы, основанные на применении фрактальных структур, а также бианизотропных и киральных (гиротропных сред) и фотонных кристаллов

Простейшая математическая модель волновода



Рассмотрим плоский волновод с локальной нерегулярностью.

При $x \le 0$ **и** $x \ge a$ **волновод регулярный: его заполнение однородно и геометрия сечения постоянна.**

Нормальные волны (моды) – **частные решения вида**

$$u(x,y)=e^{i\gamma x}\psi(y), \qquad (1)$$

где γ – **постоянная распространения,** $\psi(y)$ **- функция сечения.**

Поле $u(x,y)$ **в волноводе удовлетворяет уравнению Гельмгольца:**

$$\Delta u+k^2u=0,\quad (x,y)\in V\equiv\mathbb{R}^1\times(0,b), \qquad (2)$$

где $k^2(x,y)=\overline{k}^2(x,y)+i\overline{\overline{k}}^2(x,y),$

$$k^2(x,y)=\begin{cases} k_1^2=const, & x<0,\\ k^2(x,y), & 0<x<a,\\ k_2^2=const, & x>a. \end{cases} \qquad (3)$$

Электродинамический случай: $k^2(x,y)=k_0^2\varepsilon(x,y),$ **где**

$k_0=\frac{\omega}{c}$ **- волновое число,** $\varepsilon(x,y)$ **- диэлектрическая проницаемость.**

$$u(x,0)=0,\ \ u(x,b)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^1 - \tag{4}$$

- граничные условия (например, идеально проводящие стенки).

(1), (2), (4) =>

$$\begin{cases}\psi''(y)+\lambda\psi(y)=0, \quad 0<y<b, & (5)\\ \psi(0)=0, \quad \psi(b)=0, & (6)\end{cases}$$

где $\lambda = k^2 - \gamma^2$.

(5), (6) =>

$$\psi_n(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin\frac{\pi n y}{b}, \qquad \lambda_n=\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2, \ (n=1,2,\ldots) \tag{7}$$

Существует счетное множество нормальных волн (мод) вида:

$$u_n(x,y)=e^{i\gamma_n x}\psi_n(y), \qquad \gamma_n=\sqrt{k^2-\lambda_n}, \ (n=1,2,\ldots)$$

при $(x\le 0,\ x\ge a)$. (8)

Пусть на неоднородность падает слева нормальная волна индекса n_0 с амплитудой A_{n_0}. В сечении $x=0$ парциальные условия излучения при временной зависимости $e^{-i\omega t}$ имеют вид:

$$\int_0^b \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \cdot \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \cdot \delta_{n,n_0}, \quad (n=1,2,...) \tag{9}$$

Аналогично ставятся условия в сечении $x=a$.

Условия (9) – нелокальные.

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n(x)\psi_n(y), \tag{10}$$

$$Z_n(x) = \int_0^b u(x,y)\psi_n(y)dy \qquad (n=1,2,...) \tag{11}$$

Из (9), (11) следует, что парциальные условия излучения – это условия, которые накладываются на коэффициенты Фурье *Zn(x)* в разложении функции *U(x,y)* по функциям сечения $\psi_n(y)$:

$$Z_n{}'(0) + i\gamma_n^{(1)} Z_n(0) = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \qquad (11)$$

Пусть *D*-область между сечениями *x*=0 и *x*=*a*: $\bar{D} \equiv \{0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$.

Краевая задача имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u + k^2(x,y)u = 0, \quad (x,y) \in D, & (12) \\ u(x,0)=0, \; u(x,b) = 0, \quad 0 \le x \le a, & (13) \\ \int\limits_0^b \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\gamma_n^{(1)} u \right\}_{x=0} \psi_n(y)dy = 2i\gamma_{n_0}^{(1)} A_{n_0} \delta_{n,n_0} \; (n = 1,2,\ldots), & (14) \\ \int\limits_0^b \left\{ \dfrac{\partial u}{\partial x} - i\gamma_n^{(2)} u \right\}_{x=a} \psi_n(y)dy = 0 \; (n = 1,2,\ldots), & (15) \end{cases}$$

где $\gamma_n^{(l)} = \sqrt{k_l^2 - \lambda_n}$ $(n = 1,2,\ldots; l = 1,2)$ – **постоянные распространения нормальных волн.**

Условия (15) означают отсутствие волн приходящих из $+\infty$ (то есть справа).

Теорема 3. **Пусть** $k^2 = \overline{k}^2 + i\overline{\overline{k}}^2, \overline{\overline{k}} \neq 0, \gamma_n^{(l)} = \overline{\gamma}_n^{(l)} + i\overline{\overline{\gamma}}_n^{(l)}, \overline{\gamma}_n^{(l)} > 0 (n = 1, \ldots; l = 1, 2).$

Тогда классическое решение задачи (12)-(15) единственно.

Доказательство

Предположим существование двух решений: $u_1(x, y) \neq u_2(x, y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x, y) = u_1(x, u) - u_2(x, y) \Rightarrow (12) - (15),\ A_{n_0} = 0.$$

Умножим (12) на u^* **и проинтегрируем по области** ***D*** **(интегрирование по частям):**

$$\int_0^a \int_0^b \left(\Delta u\ u^* + k^2 u\ u^* \right) dxdy = \int_0^b u_x\, u^* \Big|_{x=a} dy - \int_0^b u_x\, u^* \Big|_{x=0} dy -$$

$$- \int_0^a \int_0^b \left(|u_x|^2 + |u_y|^2 \right) dxdy + \int_0^a \int_0^b k^2\, |u|^2\, dxdy = 0, \qquad (16)$$

$$u^*(a,y)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^*\psi_n(y),\quad C_n^*=\int_0^b u^*(a,y)\psi_n(y)dy\quad (n=1,2,\dots)\quad (17)$$

$$\int_0^b u_x\, u^*\Big|_{x=a}dy=\sum_{n=1}^{\infty}C_n^*\int_0^b u_x(a,y)\psi_n(y)dy=$$

$$=i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}C_n^*\int_0^b u(a,y)\psi_n(y)dy=i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}C_n^*C_n=$$

$$=i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}\left|C_n\right|^2. \quad (18)$$

Аналогично получаем:

$$\int_0^b u_x\, u^*\Big|_{x=0}dy=-i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(1)}\left|B_n\right|^2, \quad (19)$$

где

$$u^*(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\psi_n(y),\quad B_n^*=\int_0^b u^*(0,y)\psi_n(y)dy\quad (n=1,2,\dots)\qquad (2050)$$

(16), (18), (19) $\Rightarrow$

$$i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(2)}\left|C_n\right|^2+i\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n^{(1)}\left|B_n\right|^2-$$

$$-\int_0^a\int_0^b\left|grad\ u\right|^2dxdy+\int_0^a\int_0^b k^2\left|u\right|^2dxdy=0\qquad (2151)$$

Возьмём в (21) мнимую часть:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\gamma}_n^{(2)}\left|C_n\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\gamma}_n^{(1)}\left|B_n\right|^2+\int_0^a\int_0^b\overline{\overline{k}}^2\left|u\right|^2dxdy=0\qquad (2252)$$

$(22)\Rightarrow u=0,\ \ (x,y)\in D;\ \ C_n=0\ \ (n=1,2,\dots)\Rightarrow u(a,y)=0;$

$B_n=0\ \ (n=1,2,\dots)\Rightarrow u(0,y)=0\Rightarrow u(x,y)=0\Rightarrow u_1(x,y)=u_2(x,y),$

$(x,y)\in\overline{D}.$